

Allgemeines. Didaktik. Bibliographisches.

● **Hadamard, Jacques:** The psychology of invention in the mathematical field.

2. ed. New York: Dover Publications Inc. 1954. XIII, 145 p. \$ 2,50.

Kapitelübersicht: Introduction. I General Views and Inquiries. II Discussions on Unconsciousness. III The Unconscious and Discovery. IV The Preparation Stage. Logic and Chance. V The Later Conscious Work. VI Discovery as a Synthesis. The Help of Signs. VII Different Kinds of Mathematical Minds. VIII Paradoxical Cases of Intuition. IX The General Direction of Research. Final Remarks and drei Appendices.
G. H. Müller.

Hadamard, J.: History of science and psychology of invention. *Mathematika*, London 1, 1—3 (1954).

Kotsakis, D.: Mathematical simplicity and elegance in natural research. *Bull. Soc. math. Grèce* 28, 51—61 und engl. Zusammenfassg. 61—62 (1954) [Griechisch].

Kline, Morris: The influence of Newtonian mathematics on literature and aesthetics. *Math. Mag.* 28, 93—102 (1954).

Gnedenko, B. V. und L. A. Kaloujnine (Kalužnin): Über das mathematische Leben in der Deutschen Demokratischen Republik. *Uspechi mat. Nauk* 9, Nr. 4 (62), 133—154 (1954) [Russisch].

● **Gellerstedt, Sven:** 800 Übungsaufgaben aus der Mathematik. Für Universitäten und Hochschulen mit Ergebnissen und Lösungshinweisen. Stockholm: Almqvist & Wiksell 1954. 200 Skr. 12,50 [Schwedisch].

Most of the problems in this collection are taken from examination papers at the University of Uppsala. The following fields are represented: Algebra; the differential and the integral calculus; sequences, series and products; plane and solid geometry. There is a valuable list of answers and hints. Many of the examples are very interesting and instructive. It must be emphasized that the solution of several of the problems requires a good deal of ingenuity and computational technique. There are few misprints.
W. Ljunggren.

● **Mitrinović, Dragoslav S.:** Mathematische Aufgabensammlung für Studenten der Technischen und Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultäten. Belgrad: Znanje 1954. 176 S. [Serbisch].

Eine Aufgabensammlung, die sich vorwiegend an Studenten der technischen Fakultäten wendet und versucht, das ganze mannigfaltige Interessengebiet solcher Studenten zu umfassen, obwohl die Aufgaben aus der Matrizenrechnung fast vollständig und die aus der Tensorrechnung vollständig fehlen. Die Sammlung ist in acht Teile geteilt (Einführende Aufgaben S. 9—14; Algebra S. 15—22; Analytische Geometrie S. 23—32; Differential- und Integralrechnung S. 33—59; Reihen S. 60—65; Differentialgleichungen S. 66—98; Funktionen komplexer Veränderlichen S. 99—108; Aufgaben aus verschiedenen Gebieten S. 109—138). Zum Schluß ist noch eine Sammlung von Prüfungsaufgaben, die auf verschiedenen technischen und math.-phys. Fakultäten in Jugoslawien gegeben wurden, größtenteils in ungeänderter originaler Fassung hinzugefügt, S. 139—174. Die Aufgaben aus den einzelnen Gebieten sind nicht gleichmäßig vertreten, z. B. überwiegen die Aufgaben über Differentialgleichungen. Diese Aufgabensammlung ist nicht systematisch geordnet, und sie enthält weder Lösungen der Aufgaben noch irgendwelche Anweisungen dazu.
T. P. Angelitch.

● Dini, Ulisse: Opere a cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Vol. II. Funzioni di variabile reale e sviluppi in serie — problema di Dini-Neumann — funzioni analitiche. Roma: Edizioni Cremonese 1954. 508 p. L. 4500.—

(Band I, dies. Zbl. 51, 1). Der vorliegende zweite Band, der an Sorgfalt und Ausstattung dem ersten in keiner Weise nachsteht, bringt im ersten Teile, eingeleitet von G. Sansone und G. Scorza-Dragoni, die Beiträge Dinis zu den stetigen, nirgends differenzierbaren Funktionen und zum Problem der mechanischen Quadratur, im zweiten und dritten Teile, ebenfalls von G. Sansone und G. Scorza-Dragoni eingeleitet, die interessanten Untersuchungen über die Entwickelbarkeit von Funktionen in eine Reihe von Kugelfunktionen, über Fourierreihen mit nach den Wurzeln einer transzendenten Gleichung fortschreitenden Eigenwerten und deren Verallgemeinerungen durch Jacobische Funktionen. Es folgen im vierten Teile, eingeleitet von M. Picone, die klassischen Arbeiten Dinis zur Potentialgleichung mit den berühmten Formeln für die Lösung des Neumannschen Problems für Kreis, Kreisring und Kugel. Der letzte Teil, eingeleitet von F. Cecioni, bringt drei Beiträge Dinis zur Theorie der analytischen Funktionen und ihrer Anwendungen, die an Weierstraß und Mittag-Leffler anschließen. O. Volk.

Karpinski, Louis C.: Third supplement to the bibliography of mathematical works printed in America through 1850. Scripta math. 20, 197—202 (1954).

● Die Hauptreferate des 8. Polnischen Mathematikerkongresses vom 6.—12. September 1953 in Warschau. Herausgegeben von Heinrich Grell. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1954. 125 S.

Die Arbeiten werden in dies. Zbl. einzeln angezeigt.

● Studies in Mathematics and Mechanics. Presented to Richard von Mises by Friends, Colleagues and Pupils. New York: Academic Press Inc. 1954. IX, 353 p. \$ 9,00.

Die Arbeiten werden in dies. Zbl. einzeln angezeigt.

Frank, Philipp: Introduction. Studies Math. Mech., presented to Richard von Mises, 1—14 (1954).

Mit Schriftenverzeichnis von R. v. Mises.

Geschichte.

Clagett, Marshall: The De curvis superficiebus Archimedis: A medieval commentary of Johannes de Tinemue on book I of the De sphaera et cylindro of Archimedes. Osiris 11, 295—358 (1954).

Schon vor der Archimedesübersetzung des Wilhelm Moerbeke (i. J. 1269) existierte ein Kommentar (selbständige Arbeit oder wohl Übersetzung aus dem Arabischen) über das 1. Buch „De sphaera et cylindro“. Der Autor (oder Übersetzer) der 10 Sätze umfassenden Schrift: „De curvis superficiebus Archimedis“ ist ein noch nicht näher bestimmbarer Johannes de Tinemue (Johannes Gervasius de Exonia?), der Euklids Elemente und Archimedes („De sphaera et cylindro“ und „De mensura circuli“) gut kennt und der auch das Exhaustionsverfahren beherrscht. Der Verf. bringt nach einer Diskussion über den Autor den lateinischen Text unter Berücksichtigung der Varianten und führt auch in der Inhaltsbeschreibung die entsprechenden Sätze aus Archimedes (nach Moerbeke und Heiberg), aus den „Verba filiorum“ der Banū Mūsā und aus der „Practica geometrie“ des Leonardo von Pisa an. Ein Nachtrag bringt weitere Sätze aus den Handschriften, darunter eine bisher nicht bekannte Volumenformel für den Kegelstumpf: Hat man R, r, h und l = Lot vom Mittelpunkt des Grundkreises auf eine Mantellinie, so ist

$$V = \frac{l \cdot \text{Mantelfläche}}{3} + \frac{h \cdot r^2 \pi}{3}.$$

K. Vogel.

Clagett, Marshall: King Alfred and the Elements of Euclid. *Isis* 45, 269—277 (1954).

Die von E. Jörg (1935) wieder aufgegriffene Behauptung Regiomontans, Alfred der Große von England habe im 9. Jahrhundert bereits einen Kommentar zu Euklid verfaßt, die sich auf eine Randbemerkung in einer venezianischen Handschrift stützt, erweist sich durch Vergleich mit anderen Handschriften als Irrtum des Schreibers aus dem 13. Jahrhundert. Die Handschrift enthält nicht Übersetzungen von Alfred und Boethius, sondern Adelards Version II und III (s. M. Clagett, dies. Zbl. 50, 241). — Im Anhang gibt Verf. eine an Hand dieses Manuskripts und von Regiomontans Abschrift verbesserte Fassung der Einleitung zu Version III.

H. I. Hermelink.

Levey, Martin: Abraham Savasorda and his algorism: A study in early European logistic. *Osiris* 11, 50—64 (1954).

Die bis jetzt unediert gebliebene hebräisch geschriebene Enzyklopädie des Abraham Savasorda († ca. 1136), eines der ersten Vermittler arabischen Wissens im Abendland, enthält Abschnitte über Zahlentheorie, Grundoperationen, Geschäftsrechnen, geometrische Definitionen, Optik und Musik. Verf. berichtet nach einer Münchner Handschrift (Cod. Hebr. 36) über den die Grundoperationen betreffenden Teil und vergleicht Inhalt und Anordnung der einzelnen Abschnitte mit anderen Algorismen, wobei sich die Abhängigkeit von arabischen Quellen ergibt. Die vom Verf. übernommene Ansicht Curtzes über den Schreiber des Wiener Algorismus a. d. J. 1143 (nicht 1115), der einen Magister A (Adelhart?) zum Autor hat, wurde von G. Leidinger (Beilage zur Allgemeinen Zeitung 1903, S. 324, 343) in Zweifel gezogen. Eine Ausgabe der Enzyklopädie mit Übersetzung wäre dringend zu wünschen.

K. Vogel.

Clagett, Marshall: A medieval Latin translation of a short Arabic tract on the hyperbola. *Osiris* 11, 359—385 (1954).

Text, englische Übersetzung und Analyse einer vom Verf. in einer Oxforder Euklidhandschrift entdeckten kurzen Abhandlung über die Hyperbel, die der von Leonardo von Pisa her bekannte Magister Johann von Palermo, der Philosoph und „Notarius“ Friedrichs II., aus dem Arabischen ins Lateinische übersetzt hat. In ihr wird vor allem mit Hilfe der Grundeigenschaft der Hyperbel ($y_1^2/x_1(d+x_1) = y_2^2/x_2(d+x_2)$) deren asymptotisches Verhalten bewiesen. Bemerkenswert ist, daß es sich um eine Schrift handelt, die rein mathematischen Charakter trägt, während die meisten im 13. Jhdt. bekannten Kegelschnittfragmente, die der Verf. alle anführt, der Vorbereitung katoptischer Studien dienen.

K. Vogel.

Galli, Mario: Sui contributi di Galileo alla fondazione della dinamica. *Boll. Un. mat. Ital.*, III. Ser. 9, 289—300 (1954).

Verf. betont, daß Galilei — obwohl noch nicht im Besitz des allgemeinen Trägheitsgesetzes und der Beschleunigungsformel — doch als Begründer der modernen Mechanik angesehen werden kann, da er den Wandel von der mittelalterlichen zur neueren Auffassung einleitet. Im einzelnen stützt er seine Belege auf die Jugendschrift *De motu* (vor 1600), auf den Briefwechsel mit Valerio (1609), auf die Erstausgabe der *Discorsi* (1638) und die von Viviani auf Galileis Anweisung hin für die zweite Ausgabe vorbereiteten Ergänzungen.

J. E. Hofmann.

• **Leisegang, Gertrud:** Descartes Dioptrik. (Monographien zur Naturphilosophie. Bd. 2). Meisenheim am Glan: Westkulturverlag Anton Hain 1954. 168 S. Brosch. DM 9,—; Ganzleinen DM 11,—.

Verf. legt eine ausgezeichnete deutsche Übersetzung der Dioptrik (1637) vor, die nach der maßgeblichen Ausgabe von Adam-Tannery (1902) angefertigt ist. Vorangestellt ist eine sehr interessante Einleitung. Das Hauptgewicht liegt auf dem philosophischen Kern, aber auch die wissenschaftsgeschichtlichen und rein physi-

kalischen Fragen werden hinlänglich behandelt. Leider fehlt ein Namensregister, das (wenigstens für die Einleitung) sehr nötig gewesen wäre. *J. E. Hofmann.*

Miller, Maximilian: Isaac Newton: Über die Analysis mit Hilfe unendlicher Reihen. Wiss. Z. Hochschule Verkehrswesen Dresden 2 (1954), Heft 2, 1—16 (1954).

Verf. legt eine gute deutsche Übersetzung der Newtonschen Abhandlung (1669) vor, der einige knappe Anmerkungen folgen. Er kennt jedoch weder die Gregory-Ausgabe von H. W. Turnbull (dies. Zbl. 26, 289) noch des Ref. Materialien zur 1. Schaffensperiode Newtons [Abh. Preuß. Akad. Wiss., Berlin, math.-naturw. Kl. 1943, Nr. 2 (1943)]. Daher sind ihm die dort beigebrachten neuen historischen Einzelheiten entgangen. Außerdem sind manche seiner Angaben ungenau. Z. B. ging die Abhandlung zunächst an Collins und Brouncker, nicht an Collins und Oldenburg. Oldenburgs Lebensdaten sind (1615 ?/77) und nicht (1626/78) usw. *J. E. Hofmann.*

Hadamard, J.: Sur des questions d'histoire des sciences. La naissance du calcul infinitésimal. Anais Acad. Brasil. Ci. 26, 19—23 (1954).

Mit Recht mahnt Verf. zur Vorsicht bei der modernen Interpretation wissenschaftsgeschichtlicher Fragen. Er betont vor allem die Bedeutung des Reifeprozesses, der durch die intensive Beschäftigung von Generationen mit den Einzelfragen eingeleitet wird und zu grundsätzlichem Auffassungswandel führen kann. Seine Einzelausführungen über Fermats Extremwertmethode sind nicht ganz richtig; leider scheint ihm Gregorys Werk und Bedeutung unbekannt geblieben zu sein. Das führt zu unrichtiger Einschätzung Barrows. *J. E. Hofmann.*

● **Smirnov, V. I. und E. S. Kuljabko: Michail Sofronov. Ein russischer Mathematiker aus der Mitte des XVIII. Jahrhunderts.** Moskau-Leningrad: Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR 1954. 54 S. R. 2.10 [Russisch].

Gajduk, Ju. M.: Zur Geschichte des Kampfes um die Anerkennung der geometrischen Ideen Lobačevskijs in Rußland. Ukrain. math. Žurn. 6, 476—478 (1954) [Russisch].

● **Ore, Øystein: Niels Henrik Abel. Ein Genie und seine Zeit.** Oslo: Gyldendal Norsk Forlag 1954. 317 S. [Norwegisch].

Hervorragend geschriebene Abelbiographie. Sie berücksichtigt Funde und reife Einsichten der letzten Jahrzehnte, läßt Abels „Elend“ in milderem Lichte erscheinen, führt solche Auffassungen auf ihre Quelle in einer mehr angriffslustigen, denn verantwortungsbewußten Darstellung bei Libri zurück, und zeigt dagegen in billiger Würdigung der Zeitläufte, wie Norwegen und seine junge Universität nach Kräften, und sogar großzügig eingetreten sind. Die warmherzige Zeichnung der Persönlichkeit bleibt sachlich genug, auch die in Niels Henrik selbst und in seiner Familie wurzelnden Schwächen zu erkennen und zu prüfen, und neben strahlenden Lichtern auch die Rolle der Schatten im Schicksal bewußt zu machen. Unsrer Zeit kennt nicht mehr die Heldengestalt so, wie Mitte und Ende des vorigen Jahrhunderts sie gesehen haben. Unsere Zeit prüft und wägt, sie wertet mit neuen Gründen, und sie stellt ein neues Menschenbild vor uns. Abel büßt dabei nichts ein. Er besteht. Er gewinnt. Auch in neuer Sicht bleibt er uns liebenswertes Vorbild. — Das Buch ist norwegisch und zunächst für Norweger geschrieben. Das Mathematische tritt gegenüber dem Menschlichen zurück. Aber das Buch hat abendländische Geltung. Es sollte nicht verborgen bleiben. *E. Ullrich.*

Segre, Beniamino: L'opera scientifica di Fabio Conforto. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 14, 48—74 (1954).

Mit Schriftenverzeichnis.

Benedicty, Mario e Mario Rosati: Un maestro. Archimede 6, 95—96 (1954). Nachruf auf Fabio Conforto als Lehrer.

Breus, K. und G. Položij: Vadim Evgenevič D'jačenko. Ukrain. mat. Žurn. 6, 367—370 (1954) [Russisch].

Nachruf mit Schriftenverzeichnis.

Dehalu, M., J.-L. Pauwen et P. Ledoux: Liste des publications de R. H. Germay. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 23, 340—359 (1954).

Wartmann, Rolf: Professor Dr.-Ing. habil. Ulrich Graf †. Mitteil.-Bl. math. Statistik 6, 185—187 (1954).

Tietze, Heinrich: Gustav Herglotz. 2. 2. 1881—22. 3. 1953. Jahrbuch Bayr. Akad. Wiss. 1953, 188—194 (1954).

Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

• Dürr, K.: Lehrbuch der Logistik. (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften.) Basel/Stuttgart: Verlag Birkhäuser 1954. VIII, 181 S. Ganzleinen. Fr. 22,90.

Inhalt: I. Der klassische Aussagenkalkül (Matrizenmethode), II. Quantifikatorenthorie der ersten Stufe, mit zwei Zusätzen: (1) Aussagenkalkül mit Quantifikatoren, (2) Erste Umriss einer Quantifikatorenthorie der zweiten Stufe, III. Theorie der Identität, Kennzeichnungstheorie, Klassenkalkül und Elemente einer Theorie der zweistelligen Relationen.

Zu I.—III.: Klammerfreie Ausdrücke, nach der Methode von J. Łukasiewicz, von dem für II. und III. auch die Formalisierung der Beweise übernommen ist. — Zu II.: Quantoren im Anschluß an Peirce und die Warschauer Logiker: $\Pi, \Sigma, \Pi x p, \Pi x \Sigma x \theta$ als Ausdrücke zugelassen. Keine Semantik. Stattdessen p. 28, Def. 33: „Die Formel \forall heißt dann und nur dann allgemeingültig, wenn jede Aussage, die aus \forall durch Einsetzung ableitbar ist (diese einer Präzisierung bedürftige Redeweise ist unpräzisiert vorausgesetzt), wahr ist“ usf. Zur Charakteristik der Prädikate, über die man sich offenbar verständigt haben muß, bevor man von einer Einsetzung eines Prädikates in eine Prädikatenvariable sprechen kann: „Prädikate im engeren oder ursprünglichen Sinn bezeichnen einstellige Aussagefunktionen, Prädikate im erweiterten Sinn einstellige oder mehrstellige Aussagefunktionen“ (p. 23). Aber können Prädikate etwas anderes „bezeichnen“ als Attribute? Es ist also wohl gemeint, daß sie als Aussagefunktionen „aufgefaßt“ werden können, obschon auch dies für den Fall der Einsetzung noch nicht ganz befriedigend ist. — Aufbau des Prädikatenkalküls in engstem Anschluß an W. V. Quine [J. symbolic Logic 10, 1—12 (1945)]. Die nicht unwichtige Variante in dem Buche, dies. Zbl. 38, 148, p. II und III, ist nicht mehr herangezogen: Trennung des ein- und des mehrstelligen Kalküls, Konstituierung des einstelligen Kalküls über dem Quineschen Testverfahren, Konstituierung des mehrstelligen über dem einstelligen mit Hilfe einer erweiterten Abtrennungs- und einer auf das Verbot der Konfusion von freien und gebundenen Variablen bezugnehmenden Einsetzungsregel. Auf den Beweis für die Notwendigkeit der ersten Testregel ist verzichtet worden (p. 48). — Das Entscheidungsverfahren für den erweiterten Aussagenkalkül hätte wesentlich vereinfacht werden können durch den Bezug auf die Tatsachen der Zweiwertigkeit und der Eliminierbarkeit der Quantifikatoren in allen endlichen Bereichen. — Auf die Theorie der Identität folgt die Russellsche Theorie des bestimmten Artikels mit der sie beherrschenden Auffassung von der grundsätzlichen Eliminierbarkeit der mit seiner Hilfe erzeugbaren Kennzeichnungen. Was hiermit geleistet ist, ist bekannt; aber die Theorie als solche ist so verwickelt, daß man für alle Fälle, für welche es nicht auf die Eliminierbarkeit ankommt, also insbesondere für den mathematischen Handgebrauch, jetzt die ungleich bequemere Theorie bevorzugen wird, die J. B. Rosser in seinem Buch, Logic for mathematicians, New York 1953, entwickelt hat (ch. VIII: Descriptions). — Es folgen, in engster Anlehnung an die „Principia Mathematica“, die Elemente des Klassenkalküls und des Kalküls der zweistelligen Relationen (die Verkettung ist nicht mehr einbezogen). — Für jedes Hauptstück sind die wichtigsten Theoreme in einer Tafel angegeben. Von II. an ist jeweils eine Anzahl von Probestücken explizit bewiesen: wie schon angedeutet, nach der Methode der Beweiszeilen von Łukasiewicz.

Hiermit ist der Inhalt erschöpft. Das Buch ist ein eklektisches Werk, sehr pünktlich; aber mußte es deshalb so umständlich sein? Es soll „allen denen dienen, die an Hochschulen dem Studium der Wissenschaften obliegen“. Wie weit ihm dies gelingen wird, wird die Erfahrung lehren müssen. Dem Ref. sei es erlaubt zu bemerken, daß es für diesen Zweck in einer wesentlich flüssigeren und vor allem auch anschaulicheren Sprache hätte verfaßt sein sollen: wie der in dieser Hinsicht immer noch unübertroffene Hilbert-Ackermann, der mit Hilfe dieser Methode und des hier ganz herausfallenden mathematischen Blickpunktes auf 150 Seiten zugleich so viel weiter führt. Die Beweise sind höchst korrekt; aber im allgemeinen Fall um den Preis einer Länge, die Abkürzungen zu einem dringenden Anliegen macht, und die klammerfreie Schreibart macht die Formeln für den Nicht-Spezialisten so unanschaulich, daß sie auf den Anfänger schwerlich anders als distanzierend einwirken wird. Und wie soll er am Leitfaden dieses Lehrbuchs erkennen, was mit dieser Logik zu machen ist? Das wird der Verf. selbst sagen müssen.

H. Scholz.

• Carnap, Rudolf: Einführung in die symbolische Logik mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen. Wien: Springer-Verlag 1954. X, 209 S. mit 5 Textabb. DM 27,—.

Diese „Einführung“ hat mit dem von demselben Verf. stammenden längst vergriffenen „Abriß der Logistik“ (Wien 1929) gemein die Aufgliederung in einen ersten, konstruktiven und einen zweiten, den Anwendungen dienenden Hauptteil mit den wichtigsten Themen desselben. Alles Übrige ist neu. Also nicht eine Neubearbeitung des Abrisses, sondern ein neues Werk, dem Abriß gegenüber (1) ein volles Kompendium der symbolischen Logik vom Typus eines Stufenkalküls, (2) ein Kompendium, für welches in einem vorbildlichen Sinne (vgl. § 11 und § 25) von der bahnbrechenden Tieferlegung der Fundamente durch die Tarskische Semantik (1935) Gebrauch gemacht ist. Um nicht stutzig zu werden, hat man nur von Anfang an zu beachten die vom Üblichen abweichende Unterscheidung zwischen tautologischen und *L*-wahren Sätzen. Als tautologisch gelten hier nur die Ausdrücke, die für jede Belegung der in ihnen vorkommenden Aussagevariablen mit der Menge der Wahrheitswerte und in diesem scharf eingeschränkten Sinne für jede Bewertung wahr werden, also effektiv nur die aussagenlogischen Identitäten. Alle Ausdrücke, die zusätzliche Bewertungsvorschriften erfordern, folglich alle prädikatenlogischen Ausdrücke heißen demgegenüber *L*-wahr, wenn sie auf Grund dieser zusätzlichen Vorschriften für jede Bewertung wahr werden. Es sind also zwar alle tautologischen Ausdrücke *L*-wahr; aber nicht umgekehrt. Der Bereich der *L*-wahren Ausdrücke ist wesentlich umfassender; und auf diese allein kommt es an.

In dem als System der symbolischen Logik charakterisierten ersten Hauptteil werden zwei Sprachen entwickelt: eine einfache Sprache *A* und eine erweiterte Sprache *C*. Es sind zwei nicht willkürlich, sondern mit Recht so genannte Sprachen; denn es sind Zeichensysteme mit semantisch interpretierten Ausdrucks- und Satzbestimmungen. Beide sind abgestimmt auf den Stufenkalkül, wobei die für den allgemeinen Fall sehr verwickelten Typenbestimmungen in einer musterhaft einfachen und durchsichtigen Formulierung dargeboten werden: eine Leistung, die in ihrer Art nicht zu übertreffen sein wird, neben der auf der Basis des Lambda-Operators entwickelten, eben so originellen und funktionsfähigen Typentheorie von A. Church (dies. Zbl. 23, 289, im Literaturverzeichnis nicht genannt), die im deutschen Raum noch nicht die Beachtung gefunden hat, die ihr zukommt. Die typenfreien Systeme der sogenannten mengentheoretischen Logik, die in den letzten 15 Jahren durch die Studien von P. Bernays, K. Gödel, W. Ackermann und, besonders eindrucksvoll, durch die „Mathematical logic“ von W. V. Quine in der revised edition von 1951 (dies. Zbl. 44, 247) so wesentlich an Interesse gewonnen hat, haben nur in einer Randbemerkung erwähnt werden können. Der Semantiker wird zur Kritik dieser Systeme bemerken dürfen, daß eine seinen Ansprüchen genügende Interpretation bis jetzt für keines von ihnen gewonnen worden ist, so daß sie in einem diesen Anforderungen genügenden Sinne auch noch nicht als formalisierte Sprachen anerkannt werden können. Umgekehrt ist für den Stufenkalkül von Interesse die Andeutung p. 99f. über die noch ganz in den Anfängen steckende Einführung transfiniter Stufen, mit deren Hilfe die so unerwünschte, aber im Russell-Kalkül unvermeidliche Wiederholung der Arithmetik der natürlichen Zahlen auf jeder über ihrer Konstitutionsstufe liegenden Stufe überwunden werden könnte. Hierzu sei beiläufig bemerkt, daß im Gegensatz zu den Systemen von Frege und Russell nicht zwischen Eigenschaften und Klassen, Beziehungen und Relationen unterschieden wird. Es ist also z. B. die Drei nicht mehr die (wenigstens in der Russellschen Interpretation etwas vage) Klasse aller Dreierklassen, sondern die gemeinsame Eigenschaft aller Eigenschaften, die genau drei Dingen zukommen.

Die Darstellungskunst steht überall auf der Höhe des Erreichbaren. Nur so ist es gelungen, auf noch nicht 70 Seiten mit der Entwicklung der Sprache *A* ein vollständiges Kompendium der Stufenlogik zu liefern. Die Erweiterung dieser Sprache zur Sprache *C* besteht in der planmäßigen Einführung von Stenogrammen, die für die Anwendungen nicht nur oft dringend erwünscht, sondern im Interesse der Durchsichtigkeit mehr oder weniger unentbehrlich sind. Die Darstellung endet mit der Dedekindschen und der Cantorsche Stetigkeit. Als ein Paradigma wird hier vor allem die Einführung des Lambda-Operators in § 33 hervorzuheben sein, ferner die ungewöhnlich ertragreiche Reihe der mit den gewonnenen Ausdrucksmöglichkeiten erreichbaren Formalisierungen der Unendlichkeitsannahme p. 132. Von einer besonderen Eindringlichkeit als Beispiel für die Souveränität, mit welcher der Verf. auch über wohlbekannte Materien verfügt, ist die Darstellung der Russellschen Kennzeichnungstheorie in § 35. Hier wird auch dem wohlunterrichteten Leser mindestens in der Anschreibung mehreres anziehend Neues geboten. Vermißt hat der Ref., daß neben den Ordnungen nicht auch die inzwischen so wichtig gewordenen Halbordnungen berücksichtigt sind. Und nicht befriedigend scheint ihm das Gödelsche Vollständigkeitstheorem p. 91f. formuliert zu sein.

Zwischen die Sprachen *A* und *C* ist eingeschaltet eine mit Rücksicht auf die metasprachlichen Bestimmungen an expliziten Ausdrucksmitteln wesentlich ärmere, aber in bezug auf ihre effektive Ausdrucksfähigkeit dasselbe leistende Sprache *B*, für die neben der Semantik eine vollständige Syntax definiert ist. Die Entwicklung der Sprache *C* ist jedoch hiervon unabhängig, so daß das Studium von *B* unbedenklich ans Ende gerückt werden kann.

Der zweite, den Anwendungen dienende Hauptteil wird eingeleitet durch einige allgemeine Erörterungen über Methoden und Formen des Aufbaus von Sprachen (Dingsprachen, Koordinatensprachen, quantitative Begriffe in Ding- und in Koordinatensprachen). Dazu ein sehr gealtericher Paragraph über die axiomatische Methode. Es folgen in beispielhaften Formalisierungen Axiomensysteme (1) der Mengenlehre und Arithmetik, (2) der Geometrie, (3) der Physik, (4) der Biologie. Zu (1): Formalisierung des Fraenkelschen AS der Mengenlehre, mit dem wesentlichen Nebeneffekt, daß der von F. selbst angemeldete Zweifel an einer einwandfreien Formulierbarkeit seines Beschränktheitsaxioms durch eine geeignete Formalisierung hat zerstreut werden können. Als nächstes zwei Formalisierungen der Peano-Axiome. Als drittes eine Formalisierung eines Tarskischen AS der reellen Zahlen. Zu (2): Zwei Formalisierungen der Hausdorffschen Umgebungsaxiome, anschließend eine Formalisierung von ASen der projektiven, der affinen und der metrischen Euklidischen Geometrie, im Anschluß an eine aus der Schule von Münster hervorgegangene Arbeit von E. Roth. Zu (3): Drei Formalisierungen der relativistischen Raum-Zeit-Topologie: Höchstleistungen der Formalisierungstechnik, fußend auf einer Analysis der voraussetzungsvollen Materie, die für den Ref. die Analysis von H. Reichenbach in bezug auf den Grad ihrer Genauigkeit noch um ein Wesentliches übertrifft, so daß sie wahrscheinlich das Genaueste darstellt, was zu diesem Thema bis jetzt überhaupt gesagt worden ist. Lehrreich zugleich als ein Beispiel dafür, wie selbst Formulierungen, die mathematische Ansprüche befriedigen, noch mehrere Möglichkeiten der Formalisierung zulassen können. Als Anhang folgt noch ein Paragraph über Determination und Kausalität. Zu (4): Hierzu die Frage, ob die biologischen Begriffsbildungen überhaupt schon so weit entwickelt sind, daß eine Formalisierung sich lohnt, Ref. ist geneigt, dies zu bezweifeln.

Es folgen in einem Anhang noch Übungsaufgaben; aber bei weitem die beste Fortsetzung scheint dem Ref. zu sein das hervorragende Werk von J. B. Rosser, *Logic for mathematicians*, New York 1953. Abschließend ein wohlgedachtes Literaturverzeichnis, eben solche Literaturhinweise und ein sehr zuverlässiges Namen- und Sachverzeichnis. Zusammenfassend ist diese Einführung zu charakterisieren als eine Schöpfung vom Rang eines Meisterwerks, das auch dem weit Vorgerückten durch die Art der Darstellung und den Rang der Probestücke mannigfache Anregungen bieten wird.

H. Scholz.

• **Applications scientifiques de la logique mathématique.** Actes du 2^e Colloque International de Logique Mathématique, Paris 25—30 Aout 1952. (Collection de Logique Mathématique, Ser. A. V.) Paris: Gauthier-Villars; Louvain: E. Nauwelaerts 1954. 176 p. 2200 Fr.

Die Arbeiten werden in dies. Zbl. einzeln angezeigt.

Fiala, F., H. Goldmann, H. König et A. Portmann: *L'idée de preuve dans les sciences.* (Symposium 6 sept. 1953. Soc. suisse logique philos. sci.). Verhdl. Schweizer. naturforsch. Ges. 133. Versammlung in Lugano 1953, 43—59 (1954).

Lorenzen, Paul: *Zur Begründung der zweiwertigen Aussagenlogik.* Arch. math. Logik Grundlagenforsch. 2, 29—32 (1954).

The author shows how the classical two-valued propositional logic can be built up from the basic activity of defining predicates ostensibly by indicating examples and counter-examples. If $e \in P$ denotes that the predicate P is applicable to e and $e \notin P$ that it is not then we may define $e \in P$ as $e \notin P$ and $e \notin P$ as $e \in P$. In this way the negation \bar{A} of a „descriptive“ statement A of the form $e \in P$ or $e \notin P$ is defined. If we now have any system D of descriptive statements A_1, \dots, A_n which is consistent, i. e. contains no pair A, \bar{A} , then we may introduce conjunction and disjunction by constructing a calculus (D) out of D as follows: The formulae of (D) are those obtainable by the rules (1) if A or \bar{A} is in D then A is in (D) , (2) if A_1, A_2 are in (D) so are $A_1 \wedge A_2, A_1 \vee A_2$. The rules of derivation of (D) are (R_1) . If A is in D then $\rightarrow A$, (R_2) $A_1, A_2 \rightarrow A_1 \wedge A_2$, (R_3) $A_1 \rightarrow A_1 \vee A_2$, (R_4) $A_2 \rightarrow A_1 \vee A_2$. If we now write $\omega(A) = V$ (resp. \bar{A}), „ $\omega(A)$ has the truth value $V = \text{verum}$ (resp. $\bar{A} = \text{falsum}$)“ instead of „ A is (resp. is not) a theorem of (D) “ then we can prove by induction that every formula A of (D) has just one of the truth values V, \bar{A} and that these satisfy the usual truth tables. For descriptive statements A the negation \bar{A} has already been defined and satisfies the customary truth table for negation. We may now extend the class of formulae of (D) by adding the rule that if A is a formula so is \bar{A} . If we now use the truth tables as definitions of

the truth values of compound statements we shall still have the result that every formula has just one of the truth values V, A . J. C. Shepherdson.

Harrop, R.: An investigation of the propositional calculus used in a particular system of logic. Proc. Cambridge philos. Soc. 50, 495—512 (1954).

Die vorliegende Studie enthält die Ergebnisse einer Diskussion der beiden typenfreien Ackermann-Kalküle A_1 und A_2 (dies. Zbl. 36, 147 bzw. 50, 245). (1) Für einen mit dem Aussagenkalkül (AK) von A_1 äquivalenten AK A wird gezeigt (Th. 5), daß es für A keine zwei voneinander verschiedenen im üblichen Sinne äquivalenten Ausdrücke gibt, so daß die Ersetzungsregel für A , mithin auch für A_1 gegenstandslos wird, entgegen einer Behauptung von Ackermann. (2) In A gilt (unter der Voraussetzung, daß Einsetzungen nicht zugelassen sind) ein modifiziertes Deduktionstheorem (Th. 6). (3) Es wird ein Kalkül A^* konstruiert, der zwar die Voraussetzung für die übliche Ersetzungsregel liefert, aber nicht mehr das modifizierte Deduktionstheorem (Th. 7). (4) Im Anschluß an A_2 werden zwei Kalküle A' , A'' konstruiert, die (a) die Voraussetzung für die übliche Einsetzungsregel liefern, (b) das modifizierte Deduktionstheorem (p. 509). (5) \rightarrow ist in A' und A'' mit Hilfe der übrigen A -Konstanten nicht definierbar (Th. 9), ebenso \sim (Th. 11). (6) Für A ist das Entscheidungsproblem lösbar. Dasselbe wird vermutet für A' und A'' . — Für die Beweise ist sehr viel Rechnung erforderlich. H. Scholz.

Parry, William Tuthill: A new symbolism for the propositional calculus. J. symbolic Logic 19, 161—168 (1954).

„This paper reviews various symbolisms for the two valued propositional calculus and introduces a new set of signs which embodies the principles of Leśniewski's symbolism, yet resembles better known signs. This type of symbolism, serving as a diagram, may be used either in place or as auxiliary to the usual symbolisms“. The author is considering the following symbolisms 1. Peano-Whitehead-Russel, 2. Hilbert-Ackermann, 3. Łukasiewicz, 4. Peirce, 5. Leśniewski. „To have three principal symbolisms with many variants and rivals is a scandal“. Facility of systematic propositional computation together with psychological and practical considerations recommend to him his „trapezoid“ symbolism: He puts $p - q$ for $p \cdot q$ ($p \& q$), $p \backslash q$ for $p \cdot \bar{q}$, $p \neg q$ for $\bar{p} \cdot \bar{q}$, p / q for $\bar{p} \cdot q$ and rules that a general binary have just those sides of a full trapezoid ∇ which correspond to the alternants of its Boolean expansion. This gives $p \nabla q$ for tautology, $p \supset q$ for implication (usually \supset or \rightarrow), \vee for alternation (\vee), \equiv for biconditional (or equivalence \equiv or \sim), etc. The blank of contradiction is replaced by an \times . The proposed singulary functions are $\neg p$ for negation (p) derived from $p \neg q$, $\lfloor p$ for affirmation derived from $p \backslash q$, their common part gives $|p$ for contradiction and their union $\top p$ for tautology. For n -ary functions he proposes the generalization given by G. B. Standley (see following review). D. Tamari.

Standley, Gerald B.: Ideographic computation in the propositional calculus. J. symbolic Logic 19, 169—171 (1954).

The principle of Parry's notation (see preceding review) is modified by substituting for the variables and retaining the constants, in transcribing from conventional to trapezoid symbolism. Thus one writes, in the binary case $n = 2$, ∇ for $p \cdot q$, \backslash for q , and, e.g. \vee for $p \vee q$. For n variables p_1, \dots, p_{n-1}, p_n one juxtaposes twice the symbols of p_1, \dots, p_{n-1} in their $(n-1)$ -ary writing, and for p_n one writes a sequence of 2^{n-3} ∇ followed by $2^{n-3} \times$ (blanks), getting always sequences of 2^{n-2} simple (binary) symbols. Thus for $n = 3$: $\backslash \backslash, / /$, $\nabla \times$; for $n = 4$: $\backslash \backslash \backslash \backslash, / / / /$, $\nabla \times \nabla \times$, $\nabla \nabla \times \times$; etc. „Problem-solving consists of merging the trapezoidal symbols according to procedures specified by the constants“ which are eliminated, the resultant symbol being the solution. Thus disjunction of two symbols superimposes them, their conjunction preserves only their common part, negation replaces a symbol by its complementary with respect to a full trapezoid. Examples of computation are given. D. Tamari.

Steiger, A. L. von: Vom maximalen Satzkalkül des „Common sense“ (Ph. Frank). Verhdl. Schweizer. naturforsch. Ges. 133. Versammlung in Lugano 1953, 51 (1954).

Henkin, L.: Boolean representation through propositional calculus. *Fundamenta Math.* **41**, 89—96 (1954).

Bezeichnen wir mit STR den Stoneschen Repräsentationssatz (vgl. Stone, dies. Zbl. **14**, 340) für Boolesche Algebren (Bo. Al.) (demzufolge jede Bo. Al. isomorph einer Bo. Al. von Mengen ist), ferner mit VP den Vollständigkeitssatz für den Prädikatenkalkül (demzufolge jede widerspruchsfreie Menge von Sätzen des Prädikatenkalküls 1ter Stufe simultan erfüllbar ist) und mit VA den entsprechenden Vollständigkeitssatz für den Aussagenkalkül. Durch unwesentliche Änderungen in einem Beweis von VP bei Rasiowa und Sikorski (dies. Zbl. **45**, 295) ergibt sich, daß VP und auch VA aus STR folgt. Das umgekehrt STR aus VP folgt, hat Verf. in seiner Arbeit dies. Zbl. **50**, 6 bewiesen. Hier wird nun gezeigt, daß STR auch aus VA folgt. Alle hier genannten Beziehungen zwischen STR, VP und VA ergeben sich ohne Verwendung des Auswahlaxioms. (Man beachte, daß Verf. den Fall nichtabzählbarer Mengen von Formeln in VP und VA nicht ausschließt.) — In einem zweiten Abschnitt gibt Verf. (unter Verwendung von VA und dem Auswahlaxiom im Beweis) eine notw. und hinr. Bedingung dafür an, daß eine Bo. Al. A isomorph ist einer Bo. Al. von Mengen mit einem Einselement von kleinerer Mächtigkeit als die der Menge M der Elemente von A . Nennen wir eine Menge E von Elementen einer Bo. Al. „von endlich verschlungener Struktur“ (e. v. St.; diese Ausdrucksweise muß der Ref. verantworten), wenn für jede endliche Menge von Elementen x_1, x_2, \dots, x_n aus E gilt: $x_1 \cap x_2 \cap \dots \cap x_n \neq 0$, dann lautet das Kriterium: Es existiert eine Menge U derart, daß 1. jedes Element von U eine Teilmenge von e. v. St. von M ist, 2. jedes Element $x \neq 0$ von M Element mindestens eines Elementes von U ist und 3. die Mächtigkeit von U kleiner als die von M ist. G. H. Müller.

Povarov, G. N.: Über die funktionale Abtrennbarkeit Boolescher Funktionen. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **94**, 801—803 (1954) [Russisch].

Eine Boolesche Funktion $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ heißt funktional abtrennbar, wenn es zwei Boolesche Funktionen $g(z_1, z_2, \dots, z_{n-s+1})$, $h(z_1, z_2, \dots, z_s)$ ($1 < s < n$) gibt, so daß

$$(*) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(h(y_1, y_2, \dots, y_s), y_{s+1}, y_{s+2}, \dots, y_n),$$

wo y_1, y_2, \dots, y_s eine Untermenge der Menge der Variablen x_1, x_2, \dots, x_n ist und $y_{s+1}, y_{s+2}, \dots, y_n$ die Menge der zurückgebliebenen Variablen x_j ist. Der Verf. formuliert eine notwendige und hinreichende Bedingung für die funktionale Abtrennbarkeit einer Booleschen Funktion f , und er stellt fest, daß die Funktionen $x_1 x_2 \dots x_n$, $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n$, $x_1 + x_2 + \dots + x_n$, $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_n$, $x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$ (die symmetrische Differenz), $\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2 \oplus \dots \oplus \bar{x}_n$ die einzigen funktional abtrennbaren, symmetrischen Funktionen sind. Das Problem der Eindeutigkeit der Zerlegung (*) und die praktische Bedeutung der Möglichkeit der Zerlegung (*) für die Theorie der Relais-schaltungen werden auch besprochen.

R. Sikorski.

Halmos, Paul R.: Polyadic Boolean algebras. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **40**, 296—301 (1954).

It is well known that Boolean algebras and the propositional calculus are, in a sense, the same things. The interesting notion of polyadic Boolean algebras, defined in the paper, is a mathematical version of the first-order functional calculus. — Propositional functions (of several variables) may be interpreted as functions p from a Cartesian power X^I into a Boolean algebra B which depend on finitely many co-ordinates only. The set A^* of all such functions p is a Boolean algebra. Let T be the semigroup of all transformations τ of I into I such that the set $\{i: \tau(i) \neq i\}$ is finite. Each transformation $\tau \in T$ induces a Boolean endomorphism $p \rightarrow \tau p$ on A^* which is the mathematical version of the logical operation of substitution. If J is a finite subset of I , then is the mathematical version of the logical operation of substitution. If J is a finite subset of I , then $\mathfrak{E}_J p$ denotes the function $q \in A^*$ defined as follows: for $x \in X^I$, $q(x)$ is the supremum of all $p(y)$ where $y \in X^I$ and the i -th co-ordinates of x and y are equal for $i \in I - J$. The operation \mathfrak{E}_J is the mathematical version of existential quantifiers $\mathfrak{E}_{i_1} \dots \mathfrak{E}_{i_n}$ where $J = (i_1, i_2, \dots, i_n)$. — A (B -valued) functional polyadic Boolean algebra is a Boolean subalgebra A of A^* such that for each $p \in A$: (1) $\mathfrak{E}_J p$ exists and belongs to A for every finite set $J \subset I$; (2) $\tau p \in A$ for every $\tau \in T$. The following conditions are satisfied in every functional polyadic Boolean algebra A : (P₁) If J is empty, then $\mathfrak{E}_J p = p$. (P₂) $\mathfrak{E}_J \mathfrak{E}_K = \mathfrak{E}_{J+K}$. (P₃) If τ is the identity, then $\tau p = p$. (P₄) $(\sigma \tau) p = \sigma(\tau p)$. (P₅) If $\sigma = \tau$ outside J , then $\sigma \mathfrak{E}_J p = \tau \mathfrak{E}_J p$. (P₆) If τ is one-to-one on $\tau^{-1}J$, then $\mathfrak{E}_J p = \tau \mathfrak{E}_{\tau^{-1}J} p$. (P₇) For every $p \in A$ there exists a finite subset $J \subset I$ such that $\mathfrak{E}_K p = p$ whenever $JK = 0$. — The general concept of a polyadic Boolean algebra is obtained by abstraction from the functional case: A polyadic Boolean algebra is a Boolean algebra A , an index set I , a correspondence from finite subsets $J \subset I$ to quantifiers \mathfrak{E}_J (i. e. to some trans-

formation $p \rightarrow \mathbb{E}_j p$ of A into A), and a correspondence from transformations $\tau \in T$ to Boolean endomorphisms $p \rightarrow \tau p$ on A , such that $(P_1 - P_7)$ are satisfied. — The author defines the notion of a model, of the semantic completeness of a polyadic Boolean algebra, of constants (obviously those notions are the analogues of the corresponding logical notions) and he formulates the fundamental representation theorems for polyadic Boolean algebras. *R. Sikorski.*

Ridder, J.: Über modale Aussagenlogiken und ihren Zusammenhang mit Strukturen. I—IV, IV^{bis}, V, VI, VI^{bis}. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **55**, 213—223, 459—467 (1952), **56**, 1—11, 99—110, 378—388 (1953), **57**, 2—8, 117—128, 389—396 (1954).

Im Anschluß an eine frühere Abhandlungsreihe (dies. Zbl. **40**, 147) definiert Verf. modale Aussagenlogiken $A_1^{(g)}, A_2^{(g)}, M^{(g)}, I^{(g)}, K^{(g)}$, die aus den in den zitierten Abhandlungen eingeführten Kalkülen A_1, A_2, M, I, K hervorgehen durch Adjunktion des modalen Operators N (notwendig), der Axiome $NX \subset X$ und $N(X \subset Y) \subset (NX \subset NY)$, sowie einer Schlußregel, die den Übergang von $\nu \subset \mathfrak{P}$ zu $\nu \subset N\mathfrak{P}$ erlaubt. [In $K^{(g)}$ wird $M\mathfrak{A}$ (\mathfrak{A} ist möglich) eingeführt durch $(N\mathfrak{A})'$]. Neben diesen „affirmativen“ Logiken werden jeweils duale „negierende“ Logiken $A_1^{*(g)}, A_2^{*(g)}, \tilde{I}^{*(g)}, K^{*(g)} = K^{(g)}$ betrachtet, die aus den in den zitierten Abhandlungen eingeführten Kalkülen $A_1^*, A_2^*, M^*, I^*, K^* = K$ hervorgehen durch Adjunktion des modalen Operators M , der Axiome $X \subset MX$ und $(MY \subset MX) \subset M(Y \subset X)$, sowie einer Schlußregel, die den Übergang von $\mathfrak{P} \subset \lambda$ zu $M\mathfrak{P} \subset \lambda$ erlaubt [in $N\mathfrak{A}$ wird in $K^{(g)}$ definiert durch $(M\mathfrak{A})'$]. Die genannten Systeme werden verglichen mit den bekannten Kalkülen von Lewis, Langford, McKinsey und Tarski und einer Reihe von Erweiterungen dieser Kalküle durch zusätzliche Axiome und Schlußregeln. In den Teilen II—VI wird z. T. unter Verwendung topologischer Strukturen die Entscheidbarkeit von $A_2, M, I, A_2^*, M^*, I^*, A_2^{(g)}, M^{(g)}, I^{(g)}, K^{(g)}, A_2^{*(g)}, M^{*(g)}, I^{*(g)}$ und einer Reihe weiterer Kalküle bewiesen. Diese Methoden liefern u. a. auch ein Entscheidungsverfahren für Gleichungen und Ungleichungen in gewissen topologischen Strukturen. In VI^{bis} untersucht Verf. für die von ihm behandelten modalen aussagenlogischen Kalküle Ableitbarkeitsfragen, Fragen der Unabhängigkeit und der Charakterisierbarkeit durch endliche Matrizen. *H. Hermes.*

Łoś, J.: Sur le théorème de Gödel pour les théories indénombrables. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III **2**, 319—320 (1954).

Das Gödelsche Vollständigkeitstheorem für den Prädikatenkalkül der ersten Stufe mit Identität besagt, daß jeder widerspruchsfreie Ausdruck dieses Kalküls erfüllbar ist. Hier ist die Menge der Ausdrücke als abzählbar vorausgesetzt. L. Henkin (dies. Zbl. **34**, 6) hat als erster das Gödelsche Theorem auch für den Fall bewiesen, daß die Menge der Grundsymbole, folglich erst recht der Ausdrücke überabzählbar ist. In dieser Formulierung wird das Theorem verwendbar für wichtige metamathematische Beweise, z. B. für den Beweis des Stoneschen Theorems, daß jedes Modell einer Booleschen Algebra isomorph ist zu einem Mengenkörper. Verf. zeigt, daß das verallgemeinerte Gödelsche Theorem effektiv gleichwertig ist mit dem Theorem, das besagt, daß in einer Booleschen Algebra jedes vom Einsideal verschiedene Ideal in einem Primideal enthalten ist. *H. Scholz.*

Quine, W. V.: Quantification and the empty domain. J. symbolic Logic **19**, 177—179 (1954).

A. Mostowski (dies. Zbl. **43**, 9) hat als erster gezeigt, wie die Syntax des Prädikatenkalküls der ersten Stufe so formuliert werden kann, daß die beweisbaren Ausdrücke allgemeingültig sind in dem erweiterten Sinne, der auch den leeren Bereich umfaßt. Th. Hailperin (dies. Zbl. **52**, 9) hat die Konstruktion von Mostowski durch geringfügige Veränderungen wesentlich vereinfachen können. Quine zeigt, wie dasselbe Resultat in seiner „Mathematical logic“ (dies. Zbl. **44**, 247) durch Abschwächung eines einzigen Axioms erreicht werden kann. Voraussetzung: Es sind nur abgeschlossene Ausdrücke zugelassen. *H. Scholz.*

Quine, W. V.: Reduction to a dyadic predicate. *J. symbolic Logic* 19, 180—182 (1954).

L. Kalmár (dies. Zbl. 15, 338) hat gezeigt, daß jeder mehrstellige Ausdruck des Prädikatenkalküls der ersten Stufe mit Identität erfüllbarkeitsgleich ist mit einem Ausdruck, der nur genau eine zweistellige Prädikatenvariable enthält. In einer Gemeinschaftsarbeit haben Church, Craig und Quine gezeigt, daß für diese Prädikatenvariable zusätzlich die Symmetrie gefordert werden kann, unter der Voraussetzung, daß x der Bereich der natürlichen Zahlen ist (Church und Quine, dies. Zbl. 47, 9; Craig und Quine, dies. Zbl. 47, 9). In der vorliegenden Studie wird gezeigt, daß eine interpretierte Theorie θ , die im Prädikatenkalkül der ersten Stufe formalisiert ist, mit interpretierten Prädikatenvariablen, übersetzbar ist in eine eben so formalisierte Theorie, die nur genau eine zweistellige Prädikatenvariable enthält. Für den Beweis werden als eine Art von Hilfstruppen aus der typenfreien mengentheoretischen Logik die bekannten Symbolschöpfungen herangezogen, mit deren Hilfe nach der Methode von Kuratowski das geordnete Paar $x; y$ eingeführt werden kann durch $\{x, \{x, y\}\}$, das geordnete Tripel $x; y; z$ durch $\{x, \{y, z\}\}$, das geordnete Quadrupel $x; y; z; w$ durch $x; (y; z; w)$ usw. In θ mögen die beliebigestelligen Prädikatenvariablen F_1, F_2, \dots in endlicher oder unendlicher Anzahl vorkommen, in θ' genau eine zweistellige Prädikatenvariable F , so daß

$$x; y \leftrightarrow \exists z (x = \{y, z\}) \vee x = y$$

$$\exists n \exists w_1 \dots \exists w_n (F_x w_1 \dots w_n \wedge x = n w_1; w_1; w_1; w_2; w_3; \dots; w_n).$$

Der Bereich von θ' soll alle Objekte des Bereiches von θ enthalten und zusätzlich mit jedem x, y auch $\{x, y\}$. Es wird gezeigt, wie unter diesen Voraussetzungen $x = y$, $x = \{y, z\}$, endlich $F_1 w_1 \dots w_n, F_2 w_1 \dots w_n$ usw. in θ' definiert werden können.

H. Scholz.

Izumi, Yosihisa: Sur les formes normales. *Tôhoku math. J., II. Ser.* 6, 26—29 (1954).

The author makes two rather trivial remarks about the relation between normal forms with respect to satisfiability and normal forms with respect to derivability in the first order predicate calculus.

J. C. Shepherdson.

Rasiowa, H. and R. Sikorski: On existential theorems in non-classical functional calculi. *Fundamenta Math.* 41, 21—28 (1954).

Verf. beweist durch eine algebraische Methode, die auf McKinsey und Tarski zurückgeht, den folgenden Satz: Wenn in dem Heytingschen Prädikatenkalkül eine Disjunktion beweisbar ist, so ist auch das erste oder das zweite Glied der Disjunktion beweisbar. Wenn eine Existenzbehauptung beweisbar ist, so ist die betreffende Formel ohne das Existenzzeichen mit einer gewissen freien Variablen, die an die Stelle der durch das Existenzzeichen gebundenen Variablen tritt, beweisbar. — [Die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich übrigens unmittelbar aus dem Hauptsatz von Gentzen (dies. Zbl. 10, 145, 146).] — Entsprechende Sätze werden für einige andere nicht klassische Kalküle bewiesen, z. B. für den positiven Prädikatenkalkül und den Lewisschen Prädikatenkalkül, wobei natürlich im letzten Falle der Satz eine etwas andere Form erhält.

W. Ackermann.

Henkin, Leon: A generalization of the concept of ω -consistency. *J. symbolic Logic* 19, 183—196 (1954).

F sei ein formales System über der Prädikatenlogik mit Identität, I eine nicht leere Menge von Individuenkonstanten aus F . Verf. bezeichnet F als I^k -widerspruchsfrei, wenn es keine Formel $A(x_1, \dots, x_k)$ mit den einzigen freien Variablen x_1, \dots, x_k gibt, so daß $(\exists x_1) \dots (\exists x_k) A(x_1, \dots, x_k)$ und $\sim A(x_1, \dots, x_k)$ für alle $x_i \in I$ in F herleitbar ist. Die bekannte ω -Widerspruchsfreiheit ist die I^ω -Widerspruchsfreiheit, falls I die Menge der natürlichen Zahlen darstellt. Verf. gibt zu jeder natürlichen Zahl k ein F_k und I_0 an, so daß F_k zwar I^k -widerspruchsfrei, aber nicht I_0^{k+1} -widerspruchsfrei ist. F heiße I -erfüllbar, wenn es ein Modell besitzt, dessen Individuen eindeutig den Elementen von I zugeordnet sind. Aus der I -Erfüllbarkeit folgt

die I^k -Widerspruchsfreiheit. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nur für endliche I . Sogar die I^∞ -Widerspruchsfreiheit (d. h. I^k -Widerspruchsfreiheit für jede natürliche Zahl k) ist schwächer als die I -Erfüllbarkeit, wie an einem Beispiel gezeigt wird. Als äquivalent zur I -Erfüllbarkeit erweist sich die „strenge I -Widerspruchsfreiheit“. Diese wird so erklärt: Zu jeder Formel $A_i(x)$ aus F mit der einzigen freien Variablen x soll sich ein $\alpha_i \in I$ zuordnen lassen, so daß keine Disjunktion aus Formeln der Gestalt $(\exists x) A_i(x) \wedge \sim A_i(\alpha_i)$ in F herleitbar ist. — Verf. stellt abschließend die Fragen: 1. Läßt sich die Klasse derjenigen Systeme, bei denen die I -Erfüllbarkeit aus der I^1 -Widerspruchsfreiheit (bzw. I^∞ -Widerspruchsfreiheit) folgt, formal charakterisieren? 2. F enthalte keine Funktionszeichen und genau k einstellige Prädikatsymbole. I sei die Menge aller Individuenkonstanten von F . Folgt dann die I^∞ -Widerspruchsfreiheit aus der I^{k+1} -Widerspruchsfreiheit?

K. Schütte.

Šestakov, V. L.: Über die Transformation einer monozyklischen Folge in eine rekurrente. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 98, 541—544 (1954) [Russisch].

Man betrachtet Folgen n -stelliger dyadischer Zahlen $\eta(i) = \sum_{k=1}^n \eta_k(i) 2^{n-k}$ [η_0 eine durchaus feste ganze Zahl, $\eta_k(i) = 0$ oder 1]. Die periodische Folge $\eta(0), \dots, \eta(i_0 - 1), (\eta(i_0), \dots, \eta(i_0 + m - 1))$ heißt monozyklisch mit Periode m ; sie heißt elementar, wenn alle $i_0 + m$ ersten Glieder wirklich verschieden sind. Durch evtl. Übergang zu größerem n (und auch zu größerem $i_0 + m$) kann jede monozyklische Folge zu einer elementaren verfeinert werden. Andererseits definiert man eine rekursive Folge durch $\eta_1(0) = \eta_0$, $\eta_1(i + 1) = q(\eta_1(i))$, q eine eindeutige Funktion. Der Inhalt der Note besteht im wesentlichen in der Bemerkung, daß nicht nur jede rekursive Folge elementar monozyklisch mit Periode $m \leq 2^n$, sondern auch umgekehrt jede elementar monozyklische Folge rekursiv ist, und die dazugehörige Funktion q sich (in üblicher Weise) explizit in Booleschen Normalformeln darstellt. Zum Schluß Bemerkungen über Anwendbarkeit und praktische Realisierung durch ein autonomes System von n Relais.

D. Tamari.

Janiczak, A.: Some remarks on partially recursive functions. Colloquium math. 3, 37—38 (1954).

The remarks are: There exists a PR (partial recursive) function taking only the values 0, 1 which cannot be extended to a R (recursive) function. There exists a PR function which cannot be majorized by any R function. There exists a PR function $f(n, x)$ such that the function $g(n) =$ „the least x such that $f(n, x) = 0$ “ is not PR. If $D^*(f)$ (the domain of f) is the complement of a RE (recursively enumerable) set and f can be extended to a PR function, then f can be extended to a R function. If f is PR and X is RE and $X \subset D^*(f)$ then $f(X)$ is RE. Similarly if $X \subset D(f)$ then $f^{-1}(X)$ is RE. A simple set can be defined very easily using PR functions. Proofs are not given, but they are not difficult to supply.

J. C. Shepherdson.

Janiczak, A.: On the reducibility of decision problems. Colloquium math. 3, 33—36 (1954).

Let a function f be called computable with respect to a function g if f belongs to the smallest class which contains the functions $g, x + 1, x \cdot y, x \div [x]$ and is closed under the operations of substitution, of identification of variables, and of the effective minimum [the operation which is defined for all functions h such that $(u) (\exists x) (h(u, x) = 0)$ and leads from h to the functions $\varrho(u) =$ the smallest x such that $h(u, x) = 0$]. Then the decision problem of the set X can be reduced to the decision problem of the set Y by means of a Turing machine if and only if the characteristic function of X is computable with respect to the characteristic function of Y . The author shows the utility of this remark by proving that the decision problem of a set X is reducible to the decision problem of a recursively enumerable set if and only if both X and its complement are expressible as the set of all x 's such that $(\exists y) (z) R(x, y, z)$ where R is a recursive relation. This is a particular case of a theorem of Kleene [Introduction to Metamathematics (this Zbl. 47, 7) p. 293, Theorem X].

J. C. Shepherdson.

McNaughton, Robert: A non-standard truth definition. Proc. Amer. math. Soc. 5, 505—509 (1954).

Es sei Z_0 irgendein System mit nur endlich vielen der wesentlich unendlich vielen Axiome von Z_0 , einer als widerspruchsfrei vorausgesetzten Erweiterung der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre, die natürlich die Arithmetik umfaßt. Nach Hao Wang (dies. Zbl. 47, 13 [1]; Math. Ann.

25, 56—66 (1952) [2]) besitzt Z' in Z ein Modell D' bestehend aus abzählbar vielen Mengen 1), $e(2), \dots$ von Z_c . Die Zuordnung $x_i \rightarrow e(g_i)$ übersetzt die freien Variablen x_1, x_2, \dots von Z_c in die verschiedenen Zuordnungsmöglichkeiten, d. h. den verschiedenen Folgen g_1, g_2, \dots , entsprechen eineindeutig die natürlichen Zahlen g , ebenso allen Formeln $F(m)$ von Z_c die natürlichen Zahlen m (nach Gödel). Die $F(m)$ sind aus atomischen Formeln $x_n = x_k$ und in zwei logischen Operatoren (Shefferstrich) und (\dots) („All“-Quantifikator) aufgebaut. Durch Rekursion über die Zahl der logischen Operatoren in $F(m)$ wird zunächst ein Erfüllungsprädikat gSm , „bei der Zuordnung g ist $F(m)$ in D' erfüllt“, und dann durch $(g)gSm$ das Wahrheitsprädikat $Tr(m)$, „ $F(m)$ ist wahr“, für Z' in Z_c bezüglich D' definiert. Die für diesen Wahrheitsbegriff geltenden Sätze wie „ $Tr(m) = F(trans(m))$ “ ist ein Satz von Z_c “ (m durchläuft diejenigen natürlichen Zahlen, für die $F(m)$ nur gebundene Variablen enthält; $F(trans(m))$ ist die Übersetzung von $F(m)$ in eine Aussage in Z , über D') und die entsprechende Widerspruchsfreiheit „ $(m)(Thm(m) \supset Tr(m))$ “ (Thm(m) bedeutet „ $F(m)$ ist ein Satz von Z_c “) werden durch Berufung auf Hao Wang [2] bewiesen. Für den Begriff des „non-standard“-Modells beruft sich Verf. auf die „verallgemeinerten Modelle“ von Henkin (dies. Zbl. 39, 8), für die Rechtfertigung seines Gebrauchs auf Rosser und Hao Wang (dies. Zbl. 37, 295), und für den Wahrheitsbegriff auf Tarski (dies. Zbl. 13, 289, insbes. p. 305 der dort besprochenen Arbeit). Verf. bemerkt die Ähnlichkeit seiner verallgemeinerten Wahrscheinlichkeitsdefinition mit dem „Modell zweiter Art“ von Mostowski [Fundamenta Math. 39, 113—158 (1953)], ebenso die der entsprechenden Aussage der Widerspruchsfreiheit.

D. Tamari.

Fuentes Miras, José Ramón: Die „deduktive Wahrheit“ nach Tarski. *Gac. Mat.*, Madrid 6, 110—120 (1954) [Spanisch].

Jablonskij, S. V.: Die Realisierung einer linearen Funktion in der Klasse der Γ -Schemata. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. 94, 805—806 (1954) [Russisch].

The author proves that it is possible to represent the Boolean function $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ by a series-parallel network with less than $9n/8$ contacts.

J. C. Shepherdson.

Jaśkowski, S.: Example of a class of systems of ordinary differential equations having no decision method for existence problems. *Bull. Acad. Polon. Sci.*, A. III 2, 155—157 (1954).

Die Möglichkeit, reelle Zahlen als Parameter in einer Schwingungsgleichung als ganzzahlig zu charakterisieren, wird zur Beschreibung arithmetischer Beziehungen durch ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen ausgenutzt. Die Unentscheidbarkeit einer speziellen Klasse von arithmetischen Problemen [hier die der Peppischen Reduktion des Entscheidungsproblems für den Prädikatenkalkül zugrunde liegenden (dies. Zbl. 15, 385)] liefert eine Klasse von Gleichungssystemen, für welche das Problem der Existenz von Singularitätenfreien Lösungen im Intervall $-1, 1$) unentscheidbar ist. Ohne Beweise.

G. Hasenjaeger.

Brouwer, L. E. J.: Intuitionistische Differenzierbarkeit. *Nederl. Akad. Wet., Proc.*, Ser. A 57, 201—203 (1954) [Holländisch].

Unterschied zwischen schwacher und starker Differenzierbarkeit, die bzw. auf dem negativen und dem positiven Konvergenzbegriff beruhen, insbesondere im Hinblick auf den klassischen Satz von der Differenzierbarkeit fast überall einer monotonen Funktion.

H. Freudenthal.

Brouwer, L. E. J.: An example of contradictoriness in classical theory of functions. *Nederl. Akad. Wet., Proc.*, Ser. A 57, 204—205 (1954).

Counter example for the assertion that each monotone function of the unity continuum is almost everywhere differentiable.

H. Freudenthal.

Algebra und Zahlentheorie.

● Enzyklopädie der Elementarmathematik. Redaktion: P. S. Alexandroff, A. I. Markuschewitsch und A. J. Chintschin. Band I: Arithmetik. (Hochschulbücher für Mathematik. Band 7.) Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1954. XI, 403 S.

Vgl. die Besprechung des russischen Originals in dies. Zbl. 45, 151.

Zech, Th.: Potenzsummen und Bernoullische Zahlen. *Z. angew. Math. Mech.* 34, 119—120 (1954).

● Heath, Royal Vale: *Mathematics. Magic puzzles and games with numbers.* New York: Dover Publications 1954. 126 p. \$ 1,00 paperbound.

Kale, M. N.: A note on the magic square of 9 cells. *Math. Student* **22**, 144—145 (1954).

Langman, Harry: A problem in checkers. *Scripta math.* **20**, 206—208 (1954).

Grossman, Howard D.: Fun with lattice points. *Scripta math.* **20**, 203—204 (1954).

Thébault, V.: Curiosités arithmétiques. *Mathesis* **63**, 384—386 (1954).

Kombinatorik:

Braumann, Pedro Bruno Teodoro: Beziehungen zwischen Kombinationen und Partitionen. Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A **3**, 75—76 (1954).

Expression évidente des coefficients binomiaux $\binom{m}{l}$ sous la forme d'un polynôme en m dont les coefficients sont des sommes de fonctions de partitions de m et qui résulte d'une propriété bien connue des nombres de Stirling de 2^e espèce et d'une formule bien connue que le rapporteur attribuerait à von Ettinghausen (*Die kombinatorische Analysis*, Vienne 1826). J. Riguet.

Braumann, Pedro: Bemerkungen zu einer aus der Kombinatorik bekannten Formel. Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A **3**, 158—160 (1954).

Diverses interprétations stochastiques d'une formule très ancienne, puisqu'elle figure déjà dans de Montmort (*Essay d'Analyse*, Paris 1713, paragraphe 40, p. 43). Calcul de valeurs moyennes. Cas particuliers. A. Sade.

Yamamoto, Koichi: Euler squares and incomplete Euler squares of even degrees. *Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ.*, Ser. A **8**, 161—180 (1954).

Etant donné un ensemble $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, un carré latin, L , peut être considéré comme un système de points (x_1, x_2, x_3) , où les coordonnées parcourent les n valeurs de S . Si n est pair un „demi-ensemble“ est un sous-ensemble quelconque $C \subset S$, contenant exactement $n/2$ éléments. Soient K_1, K_2, K_3 , trois demi-ensembles, non nécessairement distincts, de S et $A(K_1, K_2, K_3)$ le système contenant tous les points (x_1, x_2, x_3) tels que $x_1 \in K_1, x_2 \in K_2, x_3 \in K_3$. Soit $a(K_1, K_2, K_3)$ le nombre de ces points. Lorsqu'on choisit les K de toutes les manières possibles dans L , la fonction a passe par un minimum appelé „defect“ de L . L'A. fonde sur la notion de „defect“ une démonstration de l'impossibilité de former une série orthogonale pour $n = 6$. Il montre qu'un carré graeco-latin incomplet (c'est-à-dire où deux éléments font défaut) peut toujours être construit pour $n = 4m + 2$ quand $n - 1$ est une puissance d'un nombre premier. Exemples. A. Sade.

Lineare Algebra. Polynome. Formen:

● Aitken, D. J. and K. B. Hendersen: *Algebra. Its big ideas and basic skills.* I. London: McGraw-Hill Publishing Co. 1954. XI, 419 p. 22 s.

Williamson, J. H.: The characteristic polynomials of AB and BA . *Edinburgh math. Notes* **39**, 13 (1954).

Richter, Hans: Bemerkung zur Norm der Inversen einer Matrix. *Arch. der Math.* **5**, 447—448 (1954).

A sei eine n -reihige quadratische Matrix mit komplexen Elementen. $\|A\| = \sqrt{\sum_{i,k} |a_{ik}|^2}$ ihre Norm und Q die Matrix der algebraischen Komplemente von A . $AQ = QA = (\det A) E$. Die Note des Verf. handelt von der Bestimmung einer oberen Grenze der Norm von Q . Da die Elemente von Q Polynome vom Grade $n - 1$ in den a_{ik} sind, gilt $\|Q\| \leq \chi_n \|A\|^{n-1}$. Es ist $\chi_1 = \chi_2 = 1$. Verf. zeigt, daß χ_n^2 die obere Grenze von $(\prod \lambda_r^2) \left(\sum \frac{1}{\lambda_r^2} \right)$ ist, wenn die λ_r der Nebenbedingung $\sum \lambda_r^2 = 1$

enügen. Die λ_i^2 sind dabei die nichtnegativen charakteristischen Zahlen der hermiteschen Matrix A^*A . Die Lösung dieses Maximumproblems mit Nebenbedingungen liefert $\lambda_n = (1/n)^{n-2/2}$ und damit $\|Q\| \leq (1/n)^{n-2/2} \|A\|^{n-1}$. Die obere Grenze wird genau dann angenommen, wenn A ein Vielfaches einer unitären Matrix ist. *W. Quade.*

Wong, Y. K.: Quasi-inverses associated with Minkowski-Leontief matrices. *Econometrica* **22**, 350—359 (1954).

Verf. schreibt die bekannte Formel $X^{-1} - Y^{-1} = X^{-1}(Y - X)Y^{-1}$ auf Quasiinverse $A^{-} = I - (I - A)^{-1}$ um und schätzt die Änderung von A^{-} beim Übergang von A zu B durch Reihenentwicklung ab, indem er einen allgemeinen Normbegriff benutzt und $\|B - A\| \leq \min(\|A\|, 1 - \|A\|)$ voraussetzt. *H. Wielandt.*

Afriat, S. N.: Composite matrices. *Quart. J. Math., Oxford II. Ser.* **5**, 81—98 (1954).

Ist $A = (A_{ij})$ eine aus n^2 paarweise vertauschbaren Matrizen A_{ij} des Grades m gebildete Matrix des Grades mn , so ist $\det A = \det \Sigma \pm A_{11} A_{22} \cdots A_{nn}$. Daher lassen sich die mn Eigenwerte von A als die Eigenwerte von m Matrizen des Grades n berechnen, die aus den (nach Frobenius gekoppelten) Eigenwerten der A_{ij} gebildet sind. Ferner gibt Verf. u. a. eine Verallgemeinerung des Satzes von Hamilton-Cayley auf Matrizen aus kommutativen Matrizen. *H. Wielandt.*

Roy, S. N.: A useful theorem in matrix theory. *Proc. Amer. math. Soc.* **5**, 635—638 (1954).

Verf. beweist: Sind A und B komplexe $n \times n$ -Matrizen und ist λ ein Eigenwert von AB , so ist $A * B * \leq \lambda \leq A * B^*$; dabei bedeutet $A *$ den kleinsten und A^* den größten Eigenwert der hermiteschen Matrix AA^* . (Bemerkung: Der Satz ist wohlbekannt, sogar in der schärferen Fassung $|AB *| \leq \lambda \leq |AB^*|$; vgl. z. B. S. N. Afriat, dies. Zbl. **43**, 16).

H. Wielandt.

Fantappiè, Luigi: Sulle funzioni di una matrice. *Anais Acad. Brasil. Ci.* **26**, 25—33 (1954).

Let $p(\lambda)$ be the minimum polynomial of an $n \times n$ matrix K . The relation $0 = p(K) = (K - \lambda I)g(\lambda) - p(\lambda)I$, I being the unit matrix, is used to obtain the inverse of $K - \lambda I$. This result, together with those in an earlier paper [*C. r. Acad. Sci., Paris* **186**, 619—621 (1928)], is used to find the matrix $g(K)$. When $g(\lambda)$ belongs to a certain set of analytic functions whose singularities lie outside a domain containing the characteristic roots of K then $g(K)$ may be expressed as a polynomial in K of degree n at most. *F. W. Posing.*

Vivier, Marcel: Note sur la structure des matrices unitaires. *C. r. Acad. Sci., Paris* **238**, 1957—1959 (1954).

Eine unitäre Matrix des Grades n mit n^2 reellen Parametern läßt sich als das Produkt von unitären diagonalen Matrizen mit einem Parameter, elementaren orthogonalen Matrizen und Permutationsmatrizen darstellen. Für den Fall $n = 5$ gibt der Verf. die Zerlegung ausführlich an. *K. Shoda.*

Morinaga, Kakutaro and Takayuki Nôno: On the non-commutative solutions of the exponential equation $e^X e^Y = e^{X+Y}$. *J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A* **17**, 345—358 (1954).

Diese Arbeit stützt sich auf frühere Arbeiten der Verff. über die logarithmischen Funktionen der Matrizen [*J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A* **14**, 107—114 (1950) und dies. Zbl. **45**, 158] und auf eine Arbeit von Fréchet über die Lösungen von $e^X e^Y = e^{X+Y} = e^Y e^X$ durch Matrizen X, Y des Grades 2 (dies. Zbl. **47**, 18). Die Verff. erhalten nicht nur die Resultate von Fréchet, sondern auch die Lösungen von $e^X e^Y = e^{X+Y} = e^Y e^X$, und zwar in der beliebigen komplexen Algebra des Grades 2. Das Fréchet'sche Problem wird dann gelöst, als Spezialfall, für die ternäre Algebra

des Grades 2, die Quaternionenalgebra und die vollständige Matrizenalgebra des Grades 2. K. Shoda.

Okamoto, Masashi: On a certain type of matrices with an application to experimental design. Osaka math. J. 6, 73—82 (1954).

The author calls any non-negative, symmetric matrix whose each diagonal element is larger than or equal to the sum of all elements in the same row except the diagonal one itself a matrix of type D . He gives a theorem to determine the rank of a matrix of type D , in the aim to apply it to a problem of the experimental design. The result obtained is as follows: In the two-way classification a necessary and sufficient condition that every row (or column) comparison is estimable is that the experiment does not split into more than two independent subexperiments.

K. Shoda.

Michel'son, V. S.: Über die Vorzeichen der Lösung eines Systems linearer Gleichungen. Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 3 (61), 163—170 (1954) [Russisch].

Das System der Vorzeichen $\delta_j = \text{sign } x_j$ werde die Charakteristik $\delta(x)$ eines Systems x_1, \dots, x_n von reellen Zahlen genannt. Entsprechend heißt $\delta_1, \dots, \delta_i$ eine Teilcharakteristik von $\delta(x)$ zur Indexfolge i_1, \dots, i_r . Es handelt sich hier um Bedingungen für die Existenz von Lösungen mit vorgegebener Charakteristik für das Gleichungssystem (1) $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + a_{i0} = 0$ ($i = 1, \dots, m$). Die Determinante $|a_{ij}|$ ($i = 1, \dots, R$, $j = 1, \dots, R + 2$, $j \neq \beta_1, \beta_2$) werde mit D_{β_1, β_2} bezeichnet. Sei nun R der Rang der Matrix des zu (1) gehörigen homogenen Gleichungssystems ($a_{i0} = 0$) und $D_{R+1, R+2} \neq 0$. Eine Lösung u_1, \dots, u_n mit vorgeschriebener Charakteristik $\delta(u)$ existiert dann und nur dann, wenn es $R - 1$ Indices i_1, \dots, i_{R-1} ($1 \leq i_j \leq n$, $i_k < i_{k+1}$) gibt, derart daß der Rang der Matrix $(a_{i_r, j})$ gleich R ist und das zu dieser Matrix gehörige homogene Gleichungssystem eine Lösung $v_{i_1}, \dots, v_{i_{R+1}}$ besitzt, deren Charakteristik mit der Teilcharakteristik von $\delta(u)$ zur Indexfolge i_1, \dots, i_{R+1} zusammenfällt. Die Notwendigkeit der Bedingung wird durch eine komplizierte Induktion nach n bewiesen. Im Falle eines nicht-homogenen Systems (1) läßt sich der Satz sofort übertragen, wobei in der Bedingung an Stelle von $\delta(u) = \{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ die Charakteristik $\delta(u) = \{\delta_1, \dots, \delta_n, 1\}$ einzuführen ist. Es folgt sodann eine Anwendung auf ein System linearer Ungleichungen $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + a_{i0} \leq 0$. Damit dies eine Lösung mit vorgeschriebener Charakteristik $\delta(u)$ besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß das System $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + a_{i0} + x_{n+1} = 0$ eine Lösung mit der Charakteristik $\{\delta_1, \dots, \delta_n, 1, \dots, 1\}$ hat. H. Schwerdtfeger.

Oppenheim, A.: Inequalities connected with definite Hermitian forms. II. Amer. math. Monthly 61, 463—466 (1954).

[Teil I, J. London math. Soc. 5, 114—119 (1930).] Es werden zwei Beweise (von denen der erste vom Verf. stammt) für den folgenden Satz gegeben. Sind $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ die latenten Wurzeln der nicht-negativ definiten (semidefiniten) Matrizen $\|a_{ik}\|, \|b_{ik}\|, \|a_{ik} + b_{ik}\|$, so gilt: $(\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n)^{1/i} \geq (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)^{1/i} + (\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n)^{1/i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Dies enthält die Ungleichung von H. Minkowski [J. reine angew. Math. 129, 220—274 (1905)] und Verschärfungen von zwei Ungleichungen von Ky Fan [dies. Zbl. 41, 6; Amer. math. Monthly 58, 194 (1951); 60, 48 (1953)]. Der erste Beweis erfolgt durch den Satz, der behauptet, daß $(c_1 + f_1)(c_2 + f_2) \dots (c_n + f_n)$ nicht wächst, bzw. nicht abnimmt falls $\{c_i\}$ und $\{f_i\}$ in gleicher bzw. umgekehrter Reihenfolge ungeordnet werden (vgl. H. D. Ruderman, dies. Zbl. 46, 51); von hier an ist aber dieser Beweis nicht mehr richtig [vgl. das Referat von W. Givens, Math. Reviews 16, 328 (1955)] — Der zweite Beweis stützt sich auf ein Resultat von Ky Fan [Amer. math. Monthly 58, 194 (1951); 60, 48 (1953)].

J. Aczél.

Carlitz, L.: A problem involving quadratic forms in a finite field. *Math. Nachr.* **11**, 135—142 (1954).

The author determines the number of $m \times t$ matrices X for which $\frac{AX}{X'0} = \beta$, here A is a non-singular symmetric matrix with elements in $GF(q)$, q being odd. The problem is reduced to a special case of one treated in the author's paper this Zbl. **55**, 13.

M. C. R. Butler.

Carlitz, L.: Representations by skew forms in a finite field. *Arch. der Math.* **19**—31 (1954).

Let A, B be skew-symmetric matrices of orders m, t respectively with elements in $GF(q)$ (q odd). The author uses the methods of his paper this Zbl. **55**, 13 to find the number of $m \times t$ matrices X , with elements in $GF(q)$, for which $X'AX = B$.

M. C. R. Butler.

Duncan, D. G.: Note on the algebra of S -functions. *Canadian J. Math.* **6**, 509—510 (1954).

If $t_i = \{\mu\} \otimes S_i$ then $\prod (\exp(z^i t_i, i)) = \sum \{\mu\} \otimes \{r\} z^r$. The author deduces the result

$$\{\mu\} \otimes \{2k\} = \sum_{s=1}^k (-1)^{k-1} \{\mu\} \otimes \{2k-s\} \{\{s\}\} = \frac{1}{2} \sum_{(i,j)} \frac{1}{\beta_1! \cdots \beta_k!} \left(\frac{t_2}{1}\right)^{\beta_1} \cdots \left(\frac{t_{2k}}{k}\right)^{\beta_k}.$$

F. W. Ponting.

Stöhr, Alfred: Eine Formel für gewisse symmetrische Polynome. *Acta Sci. Math.* **15**, 209—210 (1954).

Let x_1, x_2, \dots be indeterminate, all other small letters non-negative integers, $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, the determinants $D = |x_r^{a_1} x_r^{a_2} \cdots x_r^{a_n}|$, $r = 1, 2, \dots, n$, and the difference products $\Delta = \prod_{1 \leq l < k \leq n} (x_k - x_l)$. Let $\sigma_0 = 1$, σ_i for $1 \leq i \leq n$ be the elementary symmetric functions of i -th degree of x_1, x_2, \dots, x_n . Let $m \geq 1$, $n \geq a_n - n + 1$. Let the numbers b_1, b_2, \dots, b_m be so determined that $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m$ are a permutation of the numbers $0, 1, \dots, n + m - 1$. Then the following formula holds:

$$D/\Delta = \sum' \operatorname{sgn}(c_1, c_2, \dots, c_m) \sigma_{n+c_1-b_1} \sigma_{n+c_2-b_2} \cdots \sigma_{n+c_m-b_m},$$

where \sum' denotes the summation over all those permutations c_1, c_2, \dots, c_m of the numbers $0, 1, \dots, m-1$, which, for $i = 1, 2, \dots, m$, satisfy the inequalities $0 \leq b_i - c_i \leq n$, and $\operatorname{sgn}(c_1, c_2, \dots, c_m)$ denotes the sign of the permutation concerned. [This formula generalizes a problem of G. Pólya and G. Szegő (*Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Berlin 1925, v. 2, pp. 99 and 302, no. 10; and pp. 45 and 229, no. 48).]

E. Frank.

Butler, M. C. R.: On the reducibility of polynomials over a finite field. *Quart. J. Math., Oxford II. Ser.* **5**, 102—107 (1954).

Sei $f(x)$ ein Polynom vom Grade m über dem Körper K und R der Ring aller Restklassen modulo $f(x)$ im Ring aller Polynome über K . Sei $f(x) = \prod_1^r f_i(x)^{k_i}$, wobei $f_1(x), \dots, f_r(x)$ die verschiedenen über K irreduziblen Faktoren von $f(x)$ sind. Dann gibt es r Polynome $\eta_i(x)$ derart, daß $\sum_{i=1}^r \eta_i(x) = 1$, $\eta_i(x)^2 = \eta_i(x)$, $\eta_i(x) \eta_j(x) = 0$ ($i \neq j$) (mod $f(x)$) und $\eta_i(x) = 0$ (mod $f_j(x)^{k_j}$) ($i \neq j$) $\eta_i(x) = 1$ (mod $f_i(x)^{k_i}$), mit denen jedes Element $\zeta(x)$ aus R in der Form $(1) \zeta(x) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(x) \eta_i(x)$ (mod $f(x)$) dargestellt werden kann, wobei $\zeta_i(x) = \zeta(x)$ (mod $f_i(x)^{k_i}$). Es wird gezeigt, daß, falls $K = GF(p^n)$, jede Lösung der Kongruenz $(2) z^{p^n} = z$ (mod $f(x)$)

2

sich in der Form (1) mit konstanten Koeffizienten $\zeta_i = \alpha_i$ aus $GF(p^n)$ darstellen läßt. Alle diese Ausdrücke bilden einen Teilring $S \subset R$. Die $\eta_i(x)$ sind linear unabhängig über R und bilden daher eine irreduzible Basis von S (als Modul). Jede andere solche Basis hat also auch r Elemente. Diese Anzahl r erweist sich als $m - s$, unter s den Rang der Matrix $(A_{jl} - \delta_{jl})$ verstanden $[j = 1, \dots, m-1, l = 0, 1, \dots, m-1; \delta_{jl} = 0 \ (j \neq l), \delta_{jj} = 1]$, wobei $(3) x^{jp^n} \equiv \sum_{l=0}^{m-1} A_{jl} x^l \pmod{f(x)}$. Macht man dann für irgendeine Lösung von (2) den Ansatz $\zeta(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{m-1} x^{m-1}$, so ergibt sich für die α_j aus (3) ein System linearer homogener Gleichungen mit der Matrix $(A_{jl} - \delta_{jl})$. Zusammen mit dem willkürlich wählbaren α_0 hat man somit s linear unabhängige Lösungen. Das Polynom $f(x)$ ist dann und nur dann irreduzibel, wenn $s = m - 1$. H. Schwerdtfeger.

Farinha, João: Sur les limites des zéros d'un polynôme. Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A 3, 181—186 (1954).

For the polynomial $f(z)$, conditions are found such that $f(z)$ does not have zeros in certain regions. These conditions are found by means of a continued fraction expansion for $1/f(z)$. E. Frank.

Vythouklas, Dennis P.: On the minimum modulus of a root of a polynomial. Proc. Amer. math. Soc. 5, 797—798 (1954).

The following theorems are proved: (1) The equation $P_k(z) = 1 + z + a_1 z^{n_1} + \dots + a_{k-1} z^{n_{k-1}} = 0$ ($2 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1}$), $a_i = 0$, ($i = 1, 2, \dots, k-1$) has at least one root within or on the circumference of a circle with center $-\lambda/2$ and radius $\lambda/2$ where $\lambda = (n_1/(n_1-1)) \cdot (n_2/(n_2-1)) \cdot \dots \cdot (n_{k-1}/(n_{k-1}-1))$. (2) The polynomial $P_k(z)$ has at least one root within or on the circumference of a circle of center $-k/2$ and radius $k/2$. (3) The equation $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_m z^m = 0$ has at least one root within or on the circumference of a circle of center $-(a_0/a_1) \cdot m/2$ and radius $|a_0/a_1| \cdot m/2$. (4) Let C be a closed circular disk containing on its boundary the points $z = 0$ and $z = -\lambda$. Then C contains at least one root of $P_k(z)$. E. Frank.

Osório, Vasco: A new method of elimination. Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A 3, 77—86 (1954).

A method of elimination between two polynomials in one variable is given which is based mainly on the process of successive division. If $f(x)$ and $g(x)$ are any two polynomials of degrees $n \geq m$, respectively, there are two not identically vanishing polynomials $q(x)$ and $p(x)$, of degrees smaller than m and n , respectively, such that $f(x)q(x) + g(x)p(x) = R$. Thus R is a resultant of $f(x)$ and $g(x)$. Subresultants are also discussed. For example, if $R = 0$, the first subresultant of $f(x)$ and $g(x)$ is numerically equal to the resultant of the quotients $f_1(x)$ and $g_1(x)$ obtained by the division of $f(x)$ and $g(x)$ by $x - r_1$, where r_1 is one of the common roots of $f(x)$ and $g(x)$. Furthermore, some questions related to the Bezout and Euler identities are considered, and polynomials which satisfy these identities are obtained. E. Frank.

Seidenberg, A.: A new decision method for elementary algebra. Ann. of Math., II. Ser. 60, 365—374 (1954).

Das Problem, durch eine endliche Anzahl von elementaren Schritten zu entscheiden, ob ein vorgegebenes System von endlich vielen algebraischen Gleichungen und Ungleichungen mit reellen Koeffizienten in k Unbekannten eine reelle Lösung hat, kann auf eine einzige Gleichung $F(x_1, \dots, x_k) = 0$ zurückgeführt werden. Den Fall $k = 2$ behandelt Verf. durch Betrachtung jener Lösungen von $F = 0$, welche $(x_1 - a_1)^2 + x_2^2$ zu einem Minimum machen (a_1 ist ein Hilfsparameter), und Rückführung auf den Sturmschen Satz. Allgemein wird bewiesen: Ist \mathfrak{F} ein endliches System von algebraischen Gleichungen und Ungleichungen in den Unbekannten x_1, \dots, x_k und y_1, \dots, y_m mit reellen Koeffizienten, so kann man in endlich vielen

Schritten Systeme $\Omega_1, \dots, \Omega_s$ von algebraischen Gleichungen und Ungleichungen konstruieren, in welchen nur die y_i auftreten, so daß für jeden reell-abgeschlossenen Körper K und jedes Wertsystem \bar{y}_i der y_i aus K folgende Aussagen gleichwertig sind: (a) \bar{x} hat eine Lösung in K ; (b) Für wenigstens ein j ($= 1, \dots, s$) ist Ω_j (für die \bar{y}_i) erfüllt. Weitere Bemerkungen beziehen sich auf die allgemeine (noch nicht veröffentlichte) Tarskische Entscheidungsmethode der elementaren Algebra, auf das „Tarskische Prinzip“, wonach jede elementar-algebraische Aussage, welche in einem reell-abgeschlossenen Körper gilt, auch für jeden anderen solchen Körper zutrifft, auf den Zusammenhang mit dem Hilbertschen Nullstellensatz, auf die ursprüngliche Tarskische Methode und die mögliche Anwendung der Methode des Verf. auf Rechenmaschinen.

G. Aumann.

Gruppentheorie:

MacKenzie, Robert E.: Commutative semigroups. Duke math. J. **21**, 471—477 (1954).

L'A. adapte aux idéaux d'un demi-groupe commutatif certains résultats de la théorie d'Emmy Noether sur la décomposition des idéaux d'un anneau commutatif. Son mode d'exposition substitue aux notions classiques d'idéal, idéal premier, idéal primaire d'un demi-groupe commutatif celles de co-idéal, co-idéal premier, co-idéal primaire, ces sous-ensembles étant simplement définis comme étant les compléments des précédents. Il ne semble pas que ce mode d'exposition présente beaucoup d'avantages sur le mode d'exposition classique malgré les affirmations de L'A. De toute façon, on peut lui reprocher de n'avoir pas traduit ses résultats dans le langage classique.

R. Croisot.

Thierrin, Gabriel: Sur quelques propriétés de certaines classes de demi-groupes. C. r. Acad. Sci., Paris **239**, 1335—1337 (1954).

L'A. caractérise d'abord les homogroupes; ce sont les demi-groupes réversibles contenant un idéal à droite et un idéal à gauche minimaux; en particulier, les homogroupes finis sont les demi-groupes réversibles finis. Il introduit ensuite les demi-groupes qui sont réunions de demi-groupes disjoints sans idéaux premiers véritables; il en donne deux exemples: les demi-groupes fortement réversibles, c'est-à-dire tels que, pour tout couple a, b d'éléments, il existe des entiers positifs r, s, t , tels que l'on ait $(a b)^r = a^s b^t = b^t a^s$; les demi-groupes finis. Finalement, la notion de demi-groupe sans idéaux premiers véritables lui fournit une nouvelle caractérisation

R. Croisot.

Preston, G. B.: Inverse semigroups. J. London math. Soc. **29**, 396—403 (1954).

Cette note est consacrée aux demi-groupes inversifs à idempotents permutables. La notion de demi-groupe inversif a été introduite en 1951 indépendamment par G. Thierrin (ce Zbl. **42**, 253) et J. A. Green (ce Zbl. **43**, 256). D'autre part, les demi-groupes inversifs à idempotents permutables ont aussi été étudiés en 1953 par V. V. Vagner [Mat. Sbornik, n. Ser. **32** (74), 545—632 (1953)]. L'A. examine en particulier les homomorphismes de ces demi-groupes; il montre qu'ils sont déterminés uniquement par la connaissance des classes d'homomorphisme contenant au moins un idempotent; ce résultat avait été obtenu par Vagner; mais, l'A. caractérise de plus l'ensemble de ces classes d'homomorphisme, ce qui lui permet de démontrer un théorème réciproque. Il donne finalement une adaptation du théorème de Jordan-Hölder-Schreier aux demi-groupes inversifs à idempotents permutables.

R. Croisot.

Preston, G. B.: Inverse semi-groups with minimal right ideals. J. London math. Soc. **29**, 404—411 (1954).

Dans cette note, l'A. examine plus spécialement le cas des demi-groupes inversifs à idempotents permutables (cf. analyse précédente) qui possèdent des idéaux

à droite minimaux. Cette étude illustre, en en donnant un exemple intéressant, celles de A. H. Clifford sur les demi-groupes à idéaux à gauche minimaux, avec ou sans zéro [ce Zbl. 38, 11 et Amer. J. Math. 71, 834—844 (1949)]. Il est remarquable, qu'ici, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe au moins un idéal à droite minimal est qu'il existe au moins un idéal à gauche minimal; il faut et il suffit pour cela que le demi-groupe possède au moins un idempotent primitif. Signalons que le lemme 1 de l'A. généralise le théorème 3.1 de A. H. Clifford (ce Zbl. 51, 13) et qu'il avait été obtenu indépendamment par V. V. Vagner (Mat. Sbornik, n. Ser. 32 (74), 545—632 (1953), théorème 5.14]. Signalons aussi que les demi-groupes complètement simples du lemme 5 sont en fait très particuliers: ce sont des groupes partiels avec zéro (cf. R. Croisot, ce Zbl. 30, 294, et V. V. Vagner, loc. cit., p. 580). Pour terminer, l'A. étudie les demi-groupes inversifs à idempotents permutables dits primitifs, pour lesquels il existe un idempotent primitif sous chaque idempotent non nul; ceux de ces demi-groupes qui sont simples sont les groupes partiels avec zéro. Il utilise cette notion pour donner un théorème de structure général et il examine un exemple suggestif.

R. Croisot.

Preston, G. B.: Representations of inverse semi-groups. J. London math. Soc. 29, 411—419 (1954).

L'A. étudie les représentations des demi-groupes inversifs à idempotents permutables (cf. analyses précédentes). Outre un résultat obtenu également par V. V. Vagner [Mat Sbornik, n. Ser 32 (74), 545—632 (1953)], et permettant de représenter isomorphiquement tout demi-groupe inversif à idempotents permutables comme demi-groupe d'applications biunivoques partielles d'un ensemble dans lui-même, il démontre des théorèmes concernant la représentation à l'aide d'applications d'idempotents du demi-groupe, particulièrement dans le cas des demi-groupes primitifs.

R. Croisot.

Aubert, Karl Egil: Généralisation de la théorie des r -idéaux de Prüfer-Lorenzen. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 2214—2216 (1954).

The author defines in a commutative semigroup D a system of r -ideals as a mapping $\alpha \rightarrow \alpha_r$ of all subsets α of D on subsets of D satisfying: (i) $\alpha \subseteq \alpha_r$, (ii) $\alpha \subseteq b_r \rightarrow \alpha_r \subseteq b_r$, (iii) $\alpha b_r \subseteq b_r \cap (\alpha b)_r$. [Misprint in the original paper: in (iii) the sign \cap should be changed into \cup (Correction of the author).] A set α_r is called the r -ideal generated by α . He calls a system of r -ideals of finite character if the r -ideal generated by α is the union of the r -ideals generated by all finite subsets of α . His definition is a generalization of the definition of Lorenzen (this Zbl. 21, 387), who defines r -ideals in the quotient group of a commutative semigroup with cancellation, which satisfy somewhat stronger axioms than those mentioned above. The author states a large number of applications of his r -ideals of finite character, which may be summarized as follows. The radical of an r -ideal α_r is the intersection of all minimal prime r -ideals containing α_r . This theorem has applications for ordinary ideals in commutative rings, distributive lattices, differential rings and topological rings: in the last case with some restrictions, the closed ideals of a topological ring not being of finite character. An integral multiplicative lattice with ascending chain condition is isomorphic to the multiplicative lattice of the r -ideals of a certain semigroup. This theorem makes it possible to apply the theory of r -ideals to the theory of multiplicative lattices. Concerning multiplicative ideal theory the connection between the author's theory and that of Lorenzen is given. Finally the author remarks that the non-commutative case may be treated in an analogous way. No proofs are given.

W. Peremans.

Parker, E. T.: On multiplicative semigroups of residue classes. Proc. Amer. math. Soc. 5, 612—616 (1954).

L'A. caractérise les demi-groupes susceptibles d'être immergés dans un demi-groupe multiplicatif de classes résiduelles d'entiers modulo un entier positif. Ceci

qui permet d'établir que le produit de deux demi-groupes possédant cette propriété possède aussi cette propriété. D'autre part, il donne un exemple montrant qu'un demi-groupe homomorphe à un demi-groupe possédant la propriété ne la possède pas nécessairement.

R. Croisot.

Faragó, Tibor: Contribution to the definition of group. Publ. math., Debrecen B, 133—137 (1954).

Verf. bestimmt die Eigenschaften derjenigen Systeme von Elementen, die man erhält, wenn das Assoziativgesetz der Gruppenpostulate durch allgemeinere, jedoch ähnliche Gesetze ersetzt wird.

R. Permutti.

Piccard, Sophie: Structure de groupes. Verhdl. Schweizer. naturforsch. Ges. 133. Versammlung in Lugano 1953, 66—67 (1954).

Piccard, Sophie: Quelques problèmes de la théorie des substitutions. Verhdl. Schweizer. naturforsch. Ges. 133. Versammlung in Lugano 1953, 67—68 (1954).

Iwahori, Nagayosi and Akira Hattori: On associative compositions in finite nilpotent groups. Nagoya math. J. 7, 145—148 (1954).

Soit $f(X, Y) = X^{m_1} Y^{n_1} \dots X^{m_s} Y^{n_s}$ un mot en deux variables X, Y . Dans un groupe G quelconque, on définit une loi de composition par: $a \circ b = f(a, b)$. Dans quel cas cette loi est-elle associative? Si G est un groupe libre à deux générateurs F_2 , les AA. démontrent que $f(X, Y)$ ne peut être que 1, X, Y, XY, YX . Ils observent de plus que le résultat s'étend aux groupes quotients F/N , toutes les fois que l'intersection des sous-groupes N correspondants est réduite à l'unité. Il en est ainsi lorsque F/N est nilpotent fini ou plus généralement un p -groupe fini.

R. Thom.

Morimoto, Akihiko: A lemma on a free group. Nagoya math. J. 7, 149—150 (1954).

Soit $f(X, Y) = X^{m_1} Y^{n_1} \dots X^{m_s} Y^{n_s}$ un "mot" écrit par rapport aux deux éléments X, Y . Dans un groupe libre à deux générateurs F_2 , on définit une loi de composition: $a \circ b$ en posant: $a \circ b = f(a, b)$. Si on suppose que cette loi vérifie les identités: $(x \circ y) \circ y = x \circ (y \circ y)$; $(x \circ x) \circ y = x \circ (x \circ y)$ sur les générateurs x et y de F_2 (forme affaiblie de l'associativité) alors $f(X, Y)$ est l'un des 5 mots suivants: 1, X, Y, XY, YX (cf. le rapport précédent).

R. Thom.

Howson, A. G.: On the intersection of finitely generated free groups. J. London math. Soc. 29, 428—434 (1954).

The author proves: The intersection of two subgroups U and V of finite rank m and n respectively of a free group F has at most rank $2mn - m - n + 1$. — The idea of the proof is interesting. An element $\hat{f} \in F$ is called branch point with respect to U , if its reduced representation is the longest common initial segment of two different, non-trivial elements $\hat{f}\hat{f}_1$ and $\hat{f}\hat{f}_2$ of U . If more than one such pair \hat{f}_1, \hat{f}_2 exists for \hat{f} , the branch point is counted with an appropriate multiplicity. If F is of rank 2 (without loss of generality), then the number $E(U)$ of modulo U different branch points, taking account of their multiplicity, is connected with the rank m of U by the formula $E(U) = 2m - 1$. But it is clear that every branch point with respect to $U \cap V$ is also branch point with respect to both U and V , which leads to $E(U \cap V) \leq E(U) \cdot E(V)$. The resulting estimate for the rank of $U \cap V$ may not be best possible, but it is of the right order: an example shows that the intersection may have rank $mn - m - n + 2$. — The proof of the crucial relation $E(U) = 2m - 1$ rests on topological properties of Dehn's group diagram of the free group F .

Hanna Neumann.

Plotkin, B. I.: Verbandisomorphismen auflösbarer R -Gruppen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 95, 1141—1144 (1954) [Russisch].

The author proves the following theorem: Let G be an R^* -group with an ascending invariant soluble series and q a lattice isomorphism between G and a group Gq . Then Gq is also an R^* -group with an ascending invariant soluble series; the image Hq of a normal isolated subgroup H of G is a normal isolated subgroup of Gq ;

the image in $G\varphi$ of the isolator of the derived group of G is the isolator of the derived group of $G\varphi$. (All the relevant definitions are contained in papers by Kontorovič, this Zbl. 40, 6, and Plotkin, this Zbl. 47, 24.) K. A. Hirsch.

McLain, D. H.: A characteristically-simple group. Proc. Cambridge philos. Soc. 50, 651—642 (1954).

Eine einfache Konstruktion einer Gruppe G mit den folgenden Eigenschaften wird angegeben: G ist unendlich; jede endlich erzeugbare Untergruppe ist endlich von Primzahlpotenzordnung; G läßt sich nicht als direktes Produkt echter Untergruppen darstellen; G ist charakteristisch einfach. R. Baer.

Huppert, Bertram und Noboru Itô: Über die Auflösbarkeit faktorisierbarer Gruppen. II. Math. Z. 61, 94—99 (1954).

Als Verallgemeinerung der Resultate einer früheren Arbeit des ersten Verf. (dies. Zbl. 51, 16) wird bewiesen: Die Gruppe \mathcal{Q} habe einen zyklischen Normalteiler vom Index 2. Dann ist das Produkt von \mathcal{Q} mit einer nilpotenten Gruppe auflösbar. Ersetzt man hierin 2 durch eine ungerade Primzahl, so ist die entsprechende Aussage falsch. — Die Gruppe \mathcal{G} heiße p -nilpotent, wenn sie einen Normalteiler \mathcal{N} besitzt, dessen Faktorgruppe \mathcal{G}/\mathcal{N} zu einer p -Sylowgruppe von \mathcal{G} isomorph ist. \mathcal{U} sei 2-nilpotent, und die Kommutatorgruppe \mathcal{U}' sei nilpotent. Dann ist das Produkt von \mathcal{U} mit einer zyklischen Gruppe ungerader Ordnung auflösbar.

R. Kochendörffer.

Čunichin, S. A.: Über die Faktorisierung der endlichen Gruppen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 97, 977—980 (1954) [Russisch].

Let N be a finite set of equal or distinct natural numbers. 1. Two numbers $n_1, n_2 \in N$ shall be called linked if there is a sequence of numbers in N , beginning with n_1 and ending with n_2 , such that any two consecutive members of the sequence have a greatest common divisor > 1 . This relation is an equivalence and splits N into disjoint classes. The product of all the numbers in one class shall be called the block of that class. These concepts are applied to the set of composition factors of a finite group G of order g ; a block is then called a composition block of G . The composition blocks of G will be denoted by the letters m_1, m_2, \dots, m_k or briefly m , while letters h , with or without suffix, will stand for products of composition blocks (a single factor not being excluded). To every $h \mid g$ the group G contains at least one subgroup of order h . (This result includes Schur's theorem on splitting extensions). To every representation of g in form of a product $g = h_1 h_2 \dots h_r$ there corresponds a factorisation of G , $G = H_1 H_2 \dots H_r$, where the order of the subgroup H_i is h_i . In particular, for $g = m_1 m_2 \dots m_k$ the corresponding subgroups M_i are called components of G , and the collection M_1, M_2, \dots, M_k in $G = M_1 M_2 \dots M_k$ a complete system of components. A subgroup of index m_i is called an m_i -complement. The existence of an m_i -complement for every composition block m_i is assured by the first theorem above. These m_i -complements are used, just as they have been used in the case of soluble groups by P. Hall (this Zbl. 17, 154), to prove that every finite group has at least one complete system of components in which any two components are permutable. If $k' \mid h'g$ (h' is a product of composition blocks), then every soluble subgroup of order k' occurs in at least one subgroup of order h' . A subgroup M of order m can be soluble only if $m = p^n$, p a prime. If G has soluble subgroups M_i of each order m_i , $i = 1, 2, \dots, k$, then G itself is soluble. If one subgroup of order h is soluble, then all subgroups of that order are soluble and are conjugate in G . The well known results of P. Hall on finite soluble groups (loc. cit.) are included as special cases of these theorems.

K. A. Hirsch.

Szélpál, L.: The Abelian groups with torsion-free endomorphism ring. Publ. math., Debrecen 3, 106—108 (1954).

The author proves that the additive group of all endomorphisms of an abelian group G is torsion free if and only if G is a direct sum of an algebraically closed

version group A and a torsion free group B such that $pB = B$ for every prime p for which A contains an element of order p .
D. G. Higman.

Fuchs, L., A. Kertész and T. Szele: Abelian groups in which every serving subgroup is a direct summand. Publ. math., Debrecen 3, 95–105 (1954).

The authors prove that an abelian group G has every serving subgroup as a direct summand if and only if G is a direct sum, $G = A + B$, where A is algebraically closed and B is either the direct sum of cyclic p -groups such that for each fixed prime p the orders of the cyclic p -groups are bounded, or the direct sum of groups which are isomorphic to a fixed proper subgroup of the additive group of rational numbers.
D. G. Higman.

Szele, T.: On the basic subgroups of Abelian p -groups. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 5, 129–140 und russ. Zusammenfassg. 141 (1954).

The author gives a new introduction to the concept, discovered by L. Kulikov [Mat. Sbornik, n. Ser. 16 (58), 129–162 (1945)] of basic subgroup B of an abelian p -group G . He then shows the existence of a homomorphism of G onto B by an argument paraphrased by Kaplansky as follows: B is a direct sum of cyclic groups. There is a homomorphism of G into the torsion subgroup T of their complete direct sum. This can be followed by the homomorphism of T onto B which sends the $2n$ -th component onto the n -th. As an application the author proves that if direct sum Z of cyclic groups is a homomorphic image of G then there exists a homomorphism of B onto Z .
D. G. Higman.

Fuchs, L.: On a property of basic subgroups. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 5, 143–144 (1954) und russ. Zusammenfassung 144 (1954).

A simpler proof of the second result of the paper of the preceding review is obtained by proving directly that if H is a homomorphic image of a p -group G then any basic subgroup of H is a homomorphic image of a basic subgroup of G , and combining this result with the first result of that paper.
D. G. Higman.

Nebe, Wolfgang: Über Permutationsgruppen mit Abelschem Normalteiler. Jenaer Jahrbuch 1954, 1. Teil, 251–278 (1954).

Weitläufige Beschreibung bekannter Beziehungen, die zwischen den Zyklenzerlegungen vertauschbarer Permutationen bestehen; Darstellung der Automorphismen einer abelschen Gruppe durch Matrizen; Zerlegung des Holomorphs einer abelschen Gruppe \mathfrak{A} in das Kroneckersche Produkt der Holomorphe der Sylowgruppen von \mathfrak{A} .
H. Wielandt.

Suprunenko, D.: Über nilpotente transitive Untergruppen der symmetrischen Gruppe. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 99, 23–25 (1954) [Russisch].

Beweis des Satzes, daß in der symmetrischen Gruppe \mathfrak{S}_n vom Grade n alle maximalen nilpotenten transitiven Untergruppen zueinander konjugiert sind. Insbesondere wird auch die Struktur einer solchen maximalen nilpotenten und transitiven Untergruppe N aufgeklärt. Ist $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_s^{a_s}$ die Primzahlzerlegung von n , so ist N isomorph dem direkten Produkt der p -Sylowgruppen \mathfrak{P}_{a_i} der symmetrischen Gruppen $\mathfrak{S}_{p_i^{a_i}}$ vom Grade $p_i^{a_i}$ ($i = 1, 2, \dots, s$). Die Struktur der letzten Gruppen ist vom Ref. eingehend untersucht worden (dies. Zbl. 34, 305).
L. Kaloujnine.

Berman, S. D.: Über die Darstellungen des halbdirekten Produktes von Abelschen Gruppen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 98, 177–180 (1954) [Russisch].

Für eine zerfallende Schreiersche Erweiterung einer endlichen abelschen Gruppe mit einer anderen werden aufgestellt ein volles System primitiver orthogonaler Idempotente des Gruppenringes sowie ein entsprechendes System für sein Zentrum.
R. Kochendörffer.

Keller, Ott-Heinrich: Eine Darstellung der Komposition endlicher Gruppen durch Streckenkomplexe. Math. Ann. 128, 177–199 (1954).

Sind K und K^* zwei Kompositionsreihen der endlichen Gruppe \mathfrak{G} und $\tilde{\gamma}_i, \tilde{\gamma}_i^*$ die in ihnen auftretenden einfachen Faktorgruppen, so gibt es nach dem Satz von Jordan-Hölder mindestens eine eindeutige Zuordnung $\tilde{\gamma}_i \leftrightarrow \tilde{\gamma}_i^*$ derart, daß $\tilde{\gamma}_i$ isomorph zu $\tilde{\gamma}_i^*$ ist. Treten unter den abstrakten Kompositionsfaktorgruppen von \mathfrak{G} zwei zueinander isomorphe auf, so gibt es stets mehrere derartige Zuordnungen; Verf. behandelt die interessante Frage, unter welchen Umständen eine von ihnen auf natürliche Art ausgezeichnet ist. Sind K und K^* benachbart in dem Sinn, daß sie sich nur in einem (etwa dem k -ten) Glied unterscheiden, so besteht die natürliche Zuordnung $\tilde{\gamma}_i \leftrightarrow \tilde{\gamma}_i^*$ ($i \neq k, k+1$), $\tilde{\gamma}_k \leftrightarrow \tilde{\gamma}_{k+1}^*$, $\tilde{\gamma}_{k+1} \leftrightarrow \tilde{\gamma}_k^*$, welche als Vertauschung von $\tilde{\gamma}_k$ mit $\tilde{\gamma}_{k+1}$ bezeichnet werden kann. Sind K und K^* beliebig, so lassen sie sich durch eine Kette Γ benachbarter Kompositionsreihen von \mathfrak{G} miteinander verbinden. Diese führt schrittweise zu einer bestimmten Zuordnung $\tilde{\gamma}_i \leftrightarrow \tilde{\gamma}_i^*$, welche i. a. noch von Γ abhängt. Läßt man jedoch nur solche Ketten zu, in denen bei keinem Schritt zwei benachbarte Faktorgruppen derselben Primzahlordnung vertauscht werden, so ist die Wahl der Kette Γ ohne Einfluß. Durch derartige zulässige Ketten kann man nicht in jeder Gruppe \mathfrak{G} jede Kompositionsreihe mit jeder anderen verbinden. Doch ist dies dann möglich, wenn \mathfrak{G} im folgenden Sinn „locker“ ist: In keiner Kompositionsreihe von \mathfrak{G} treten benachbarte Faktorgruppen von derselben Primzahlordnung auf. In lockeren Gruppen (aber nicht nur in diesen) besteht also eine natürliche Zuordnung zwischen den einfachen Faktorgruppen in je zwei Kompositionsreihen: Die Faktorgruppen haben eine Art von Eigenexistenz unabhängig von der Wahl der speziellen Kompositionsreihe. Verf. ordnet in diesem Fall jeder Kompositionsfaktorgruppe von \mathfrak{G} einen Punkt zu, verbindet die Punkte nach gewissen Regeln durch Pfeile und kann dann aus dem entstandenen Streckenkomplex die sämtlichen Kompositionsreihen und Hauptreihen von \mathfrak{G} konstruieren. In nicht-lockeren Gruppen gelten entsprechende Sätze für die „Pseudo-Kompositionsreihen“ $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 \supset \mathfrak{G}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{G}_m = E$, in denen jeweils \mathfrak{G}_i normal in \mathfrak{G}_{i-1} ist und die Faktorgruppe entweder einfach ist oder eine Primzahlpotenz als Ordnung hat. Die Ergebnisse lassen sich nicht kurz zusammenfassen: sie sind weniger durchsichtig und vollständig als im Fall der lockeren Gruppen (und inhaltlos, wenn die Ordnung von \mathfrak{G} eine Primzahlpotenz ist). Der größte Teil der Arbeit ist der Untersuchung der Vertauschbarkeitsverhältnisse in Pseudo-Kompositionsreihen gewidmet.

H. Wielandt.

Gaschütz, Wolfgang: Über modulare Darstellungen endlicher Gruppen, die von freien Gruppen induziert werden. Math. Z. 60, 274–286 (1954).

Es sei g eine endliche Gruppe und p eine Primzahl. Das folgende Verfahren dient zur Konstruktion von Darstellungen von g im Primkörper $\Gamma^{(p)}$ der Charakteristik p : Man bette g als Faktorgruppe \tilde{g} in eine andere Gruppe \tilde{g} ein (\tilde{g} ist der zugehörige Normalteiler von \tilde{g}) und betrachte den kleinsten Normalteiler \tilde{f}_p von \tilde{g} , für welchen \tilde{g}/\tilde{f}_p abelsch vom Exponenten p ist. Wird dann \tilde{g}/\tilde{f}_p als additiver $\Gamma^{(p)}$ -Modul und bei den inneren Automorphismen von \tilde{g} als Darstellungsmodul für g angesehen, so erhält man eine Darstellung von g in $\Gamma^{(p)}$. Verf. untersucht diese Darstellung für den Fall, daß \tilde{g} eine freie Gruppe mit e Erzeugenden ist; eine Einbettung von g als Faktorgruppe in \tilde{g} läuft dann auf eine Beschreibung von g durch e Erzeugende mit Relationen zurück. Der zugehörige Darstellungsmodul von g in $\Gamma^{(p)}$ hängt nur von g , p und e ab (nicht von der Art der Einbettung) und werde mit $\tilde{f}_{g,e}^{(p)}$ bezeichnet. Der Grad von $\tilde{f}_{g,e}^{(p)}$ ist gleich $1 + (e-1)g$, wenn g die Ordnung von g ist. Verf. zeigt zunächst, daß $\tilde{f}_{g,e}^{(p)}$ dieselben irreduziblen Bestandteile besitzt wie die $(e-1)$ -fache reguläre Darstellung von g über $\Gamma^{(p)}$, plus einmal die Einsdarstellung. Dies gibt nur im Falle $p \nmid g$ eine vollständige Bestimmung des Darstellungsmoduls $\tilde{f}_{g,e}^{(p)}$; die Abweichungen im allgemeinen Falle werden beeinflußt durch die Struktur des zur Einsdarstellung gehörigen direkten unzerlegbaren Summanden der regulären

Darstellung von \mathfrak{g} . Kennt man diese, so kann man angeben, wie oft ein beliebiger direkter Summand der regulären Darstellung von \mathfrak{g} als direkter Summand von $\Gamma_{n,c}^{(p)}$ auftritt, und wie der verbleibende Rest beschaffen ist. Dieser Rest kann auch folgendermaßen gruppentheoretisch beschrieben werden: Es sei \mathfrak{H} eine möglichst große Gruppe mit abelschem Normalteiler \mathfrak{h} von Exponenten p , derart daß $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{H}/\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h} = \Phi(\mathfrak{H})$ [$\Phi(\mathfrak{H})$ ist der Durchschnitt aller maximalen Untergruppen von \mathfrak{H}]. Der durch dieses \mathfrak{H} in der eingangs beschriebenen Weise bestimmte Darstellungsmodul für \mathfrak{g} liefert dann gerade den oben erwähnten „Rest“ von $\Gamma_{n,c}^{(p)}$. — Die Gruppe \mathfrak{H} als Erweiterung von \mathfrak{g} heißt die „ \mathfrak{g} -Hauptweiterung“ zum Exponenten p ; sie ist durch \mathfrak{g} und p ihrem Typus nach eindeutig bestimmt. — Zum Abschluß werden ein Beispiel behandelt und Anwendungen auf die Bestimmung der Erzeugendenanzahlen endlicher Gruppen gemacht. P. Roquette.

Robinson, G. de B.: On the modular representations of the symmetric group.

IV. Canadian J. Math. 6, 486—497 (1954).

(Teil III, dies. Zbl. 46, 251.) Gegeben sei eine natürliche Zahl q (sie braucht für die Entwicklungen dieser Arbeit keine Primzahl zu sein; bei der Anwendung auf die modularen Darstellungen, die nicht zur Sprache kommt, ist es eine). Unter dem Gewicht eines Young-Diagrammes $[\lambda]$ wird die Anzahl der Haken der Länge q verstanden, die man von ihm wegnehmen kann; unter dem q -Kern das, was nach Wegnahme aller q -Haken übrigbleibt. Der Stelle (i, j) von $[\lambda]$ wird die Restklasse $j - i \bmod q$ zugeordnet. Dafür, daß zwei Diagramme, die aus $[\lambda]$ durch Hinzufügung (Wegnahme) einer Stelle entstehen, denselben q -Kern besitzen, ist notwendig und hinreichend, daß die hinzugefügten (weggenommenen) Stellen zur selben Restklasse gehören. Die Anzahlen d bzw. d^* von zur Restklasse r gehörigen Stellen (r -Stellen), die man zu $[\lambda]$ hinzufügen bzw. von $[\lambda]$ wegnehmen kann, heiße der r -Defekt bzw. r -Affekt von $[\lambda]$. Die entsprechenden Zahlen für den Kern mögen δ und δ^* heißen; eine von ihnen ist immer 0; außerdem ist $d - d^* = \delta - \delta^*$, was δ, δ^* aus d, d^* zu berechnen erlaubt. Das Gewicht von $[\lambda]$ ändert sich bei Hinzufügung (Wegnahme) einer r -Stelle um $d - d^* - 1$ ($d^* - d - 1$; die Angabe b auf S. 492 enthält ein Versehen). Aus einem q -Kern mit dem r -Defekt δ und dem r -Affekt δ^* entsteht durch Hinzufügung von δ oder Wegnahme von δ^* r -Stellen wieder ein q -Kern. Für ein gegebenes r bilden die Diagramme, die man aus $[\lambda]$ durch Wegnahme und Hinzufügen von r -Stellen erhält, in naheliegender Weise eine Boolesche Algebra. In ihr gehört in einer gewissen Weise zu jedem Diagramm ein duales. H. Boerner.

Itô, Noboru: On monomial representations of finite groups. Osaka math. J. 6, 119—127 (1954).

Diese Arbeit schließt an an die Arbeit von Shoda (dies. Zbl. 7, 197). Die Hauptresultate von Shoda werden wieder matrizentheoretisch einfach abgeleitet und weiter geführt. Unter den neu bewiesenen Sätzen ist der folgende als das Hauptresultat anzusehen. Jede irreduzible monomiale Darstellung einer endlichen Gruppe, die durch eine zyklische Untergruppe induziert ist, enthält mindestens eine nicht skalare diagonale Matrix. K. Shoda.

Murnaghan, Francis D.: On the symmetry properties of powers of representations of the two-dimensional unimodular unitary group. Proc. nat. Acad. Sci. USA 40, 822—825 (1954).

Mit $\{m\}$ wird hier die $(m+1)$ -dimensionale irreduzible Darstellung der 2-dimensionalen unitären unimodularen Gruppe bezeichnet (es gibt von jeder Dimension eine; $\{2\}$ ist die 3-dimensionale Drehgruppe). Das Kroneckerquadrat von $\{m\}$ zerfällt in die Darstellung durch symmetrische und die durch schiefsymmetrische Tensoren, bezeichnet mit $\{m\} \otimes 2$ und $\{m\} \otimes 12$; weiter weiß man, daß $\{m\}^3 = (\{m\} \otimes 3) + 2(\{m\} \otimes 21) + (\{m\} \otimes 13)$ ist, usw. Gestützt auf einige ohne Beweis angegebene Rekursionsformeln werden alle Darstellungen $\{m\} \otimes (\lambda)$, wo (λ) eine

Partition von k , für $m k \leq 20$ berechnet, d. h. ihr Aufbau aus den Darstellungen $\{n\}$ angeben. H. Boerner.

Ibrahim, E. M.: On a theorem by Murnaghan. Proc. nat. Acad. Sci. USA **40**, 306—309 (1954).

Zusammenstellung einiger im wesentlichen von D. E. Littlewood [Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A **239**, 387 (1944)] stammenden Formeln über den Zusammenhang zwischen den einfachen Charakteren $[\lambda]$ der $2k$ -dimensionalen orthogonalen Gruppe und $\langle \lambda \rangle$ der $2k$ -dimensionalen unitären symplektischen Gruppe, wo (λ) ein Young-Diagramm bedeutet. Dabei wird die von Murnaghan (dies. Zbl. **48**, 255) angegebene Formel $\langle \lambda \rangle = [\lambda^*]^*$ bewiesen; hier bedeutet der Stern den Übergang zum assoziierten Diagramm, beim äußeren Stern hat man zuerst $[\lambda^*]$ nach Littlewood als Linearkombination von einfachen Charakteren $\{\mu\}$ der vollen linearen Gruppe zu schreiben und hier zu den assoziierten μ^* überzugehen. Diese Formel ist von Nutzen, um Produkte $\langle \lambda \rangle \otimes \{\mu\}$ zu berechnen, wenn die Produkte $[\lambda] \otimes \{\mu\}$ bekannt sind. H. Boerner.

Burrow, M. D.: A generalization of the Young diagram. Canadian J. Math. **6**, 498—508 (1954).

Die von G. Frobenius gegebene Methode zur Auffindung der primitiven Idempotenten des Gruppenringes einer symmetrischen Gruppe wird durch folgenden Satz verallgemeinert. Es sei G eine endliche Gruppe und es seien R und C zwei Untergruppen von G . Zwei Darstellungen ersten Grades Θ von R und Φ von C mögen die Eigenschaft haben, daß für je drei Elemente $s \in G$, $r \in R$ und $c \in C$, welche der Gleichung $srs^{-1} = c$ genügen, das Element s genau dann sogar im Komplex CR liegt, wenn $\Theta(r) = \Phi(c)$ ist. Setzt man dann noch im Gruppenring von G abkürzend $P = \sum_{r \in R} r \Theta(r)$ und $N = \sum_{c \in C} c \Phi(c)$, so ist PN ein skalares

Vielfaches eines primitiven Idempotents. Die Voraussetzung dieses Satzes über Θ und Φ erweist sich genau dann als erfüllt, wenn die beiden von Θ und Φ in G induzierten Darstellungen eine und nur eine irreduzible Darstellung von G gemeinsam haben und diese gemeinsame irreduzible Darstellung in beiden induzierten Darstellungen mit der genauen Vielfachheit Eins vorkommt. Ist die Voraussetzung des Satzes erfüllt, so ist der Charakter χ der zu PN gehörigen irreduziblen Darstellung von G durch die Formel $\chi(g) = (n \cdot i(R \cdot C; 1)) \sum \Theta(r) \Phi(c)$ gegeben, wo n den Grad dieser Darstellung und i den Index des Normalisators des Elementes $g \in G$ bezeichnet, und wo über alle diejenigen Elemente $r \in R$ und $c \in C$ zu summieren ist, für die rc in G zu g konjugiert ist. Im zweiten Teil der Arbeit wird als Beispiel die lineare Gruppe $GL(2, q)$ der Dimension 2 über einem beliebigen endlichen Körper von q Elementen ausführlich behandelt. Es wird versucht, durch geeignete Wahl der Untergruppen R und C die primitiven Idempotenten und darüber hinaus Matrizeinheiten für alle irreduziblen Darstellungen von $GL(2, q)$ zu finden. Dieses gelingt für alle irreduziblen Darstellungen der Grade 1, q und $q - 1$, nicht dagegen für die außerdem noch vorkommenden irreduziblen Darstellungen des Grades $q - 1$.

P. Wolf.

Raševskij, P. K.: Über die linearen Darstellungen nicht-halbeinfacher Liescher Gruppen mit nilpotentem Radikal. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **97**, 781—783 (1954) [Russisch].

In diesem Artikel wird kurz beschrieben, wie sich die Darstellungen einer Gruppe der im Titel genannten Art aus Darstellungen der halbeinfachen Komponente im Raum des Radikals herleiten lassen mit Hilfe eines Aggregates von Tensoren, die linearen Bedingungen unterworfen sind, deren Koeffizienten die Strukturkonstanten des Radikals sind. Es werden ferner zwei Sätze über unzerlegbare unimodulare Darstellungen mitgeteilt, von denen der erste besagt, daß jede solche Darstellung äquivalent ist einer Darstellung in einem gewissen Tensorraum oder in

nem invarianten linearen Teilraum desselben. Beweis ist unterdrückt „wegen Laummangel“.

H. Schwerdtfeger.

Bernard, Daniel: Sur la structure des pseudogroupes de Lie. C. r. Acad. Sci., Paris **239**, 1263—1265 (1954).

Unter Zugrundelegung der auf die Cartansche Schule zurückgehenden Begriffsbildungen werden folgende Sätze bewiesen: 1. Damit zwei isotrop-homogene G -Strukturen dieselben Automorphismen gestatten, ist notwendig und hinreichend, daß sie assoziiert seien. 2. Ist G involutorisch, so sind die zu einer integrierbaren Struktur assoziierter Strukturen S integrierbar. Es sind die einzigen G -Strukturen, die dieselben Automorphismen wie S zulassen. 3. Damit zwei transitiv-normale Liesche Pseudogruppen, die derselben Gruppe G entsprechen, lokal ähnlich seien, ist notwendig und hinreichend, daß sie gleiche reduzierte Strukturkonstanten besitzen.

E. Hardtwig.

Kim, Sen En: Über imprimitive Liesche Gruppen. Doklady Akad. Nauk SSSR, Ser. **99**, 205—207 (1954) [Russisch].

The purpose of this note is to list the cases of imprimitive complex local homogeneous spaces of dimensions 2 and 3 of complex local Lie groups. Let H denote an imprimitive local homogeneous space of dimension n , acted effectively on by and obtained from a local group G , everything being complex. The following theorems serve as an aid in making up the mentioned list. (1) If $G = \prod_{i=1}^s G_i$ is semi-simple with simple (non-abelian) factors G_i , then either none of the G_i or precisely one G_i is transitive on H . In the latter case obviously $3(s-1) \leq n-1$. (2) If $G = S \cdot R$, S semi-simple, R radical, S and R both non-trivial, S transitive on H . Then R is intransitive. (3) If in (2) S contains a local subgroup generated by the infinitesimal transformations $X_1 = \xi_1 \partial / \partial \xi_1$, $X_2 = \xi_1^2 \partial / \partial \xi_1$, $X_3 = \xi_1^3 \partial / \partial \xi_1$, then, R will leave invariant the $(n-1)$ -planes $\xi_1 = \text{constant}$. The reviewer did not check the given list on completeness or mistakes.

W. T. van Est.

Følner, Erling: Generalization of a theorem of Bogoliouboff to topological Abelian groups. With an appendix on Banach mean values in non-Abelian groups. Math. Scandinav. **2**, 5—18 (1954).

Es sei G eine topologische Abelsche Gruppe und E eine Teilmenge von G . Es bedeute z. B. $E + E$ die Menge aller $x + y$ mit $x, y \in E$. Hauptresultat: Ist $E = (E + a_1) \cup \dots \cup (E + a_r)$, also E relativdicht, und ist V eine Umgebung der 0, so existieren q stetige Charaktere $\chi_1(x), \dots, \chi_q(x)$ von G mit $q \leq k^2$, so daß aus $\operatorname{Re} \chi_i(x) > 0$ $i = 1, \dots, q$ folgt $x \in E + E + E + \dots + E + V$. Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von Bogoliouboff über die Gruppe G der reellen Zahlen, aus dem ein besonders einfacher Beweis des Hauptsatzes über Bohr's fastperiodische Funktionen gefolgt werden kann. Der Autor beweist seinen Satz unter Benutzung des Hauptsatzes über fastperiodische Funktionen und eines Aufspaltungssatzes von Godement, positivdefinite Funktionen betreffend (dies. Zbl. **31**, 359, insbesondere S. 64 dieser Arbeit). — Im Anhang wird eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür angegeben, daß in einem rechtsinvarianten Modul beschränkter reeller Funktionen auf einer (nicht notw. Abelschen) Gruppe eine rechtsinvariante „Mittelwertoperation“ existiert.

W. Maak.

Koch, R. J.: Remarks on primitive idempotents in compact semigroups with zero. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 828—833 (1954).

L'A. caractérise les idempotents primitifs d'un demi-groupe topologique compact avec zéro à l'aide de cinq propriétés équivalentes et il en tire des conséquences concernant la structure d'un tel demi-groupe. Il établit ensuite que, e étant un idempotent primitif d'un demi-groupe topologique compact et commexe avec zéro X , et X l'ensemble des éléments de X dont les puissances convergent vers zéro, l'ensemble $(eXe) \cap X$ est dense dans eXe . Il signale que les résultats de sa note

s'étendent aux idempotents M -primitifs (M étant un idéal d'un demi-groupe X , avec ou sans zéro, un idempotent e est dit M -primitif si tout idempotent de eXe distinct de e appartient à M).
R. Croisot.

Mostert, Paul S.: On a locally compact group acting on a manifold. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 769—770 (1954).

Verf. verallgemeinert einen Satz von Montgomery [ibid. **1**, 467—469 (1950)]. Er beweist: Es sei G eine zusammenhängende lokal-kompakte Gruppe, die dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt. G operiere transitiv auf einer kompakten Mannigfaltigkeit M . Die Isotropiegruppe sei zusammenhängend. Dann enthält G eine kompakte Untergruppe, die transitiv auf M operiert. — Beim Beweis wird eine Arbeit von Yamabe [Ann. of Math. **58**, 351—365 (1953)] benutzt.

F. Hirzebruch.

Ono, Takashi: On the compacity of the orthogonal groups. Nagoya math. J. **7**, 111—114 (1954).

Soit $O_n(K, f)$ le groupe orthogonal sur un espace de dimension n sur un corps commutatif K de caractéristique $\neq 2$, f étant une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. En supposant que K est un corps valué complet, l'A. montre que, pour que $O_n(K, f)$ soit borné dans K^{n^2} (espace des matrices carrées d'ordre n sur K), il faut et il suffit que l'indice de f soit 0. Lorsque K est localement compact, cela donne une condition de compacité pour $O_n(K, f)$.

J. Dieudonné.

Verbände. Ringe. Körper:

Sorkin, Ju. I.: Über die Einbettung von Strukturoiden in Strukturen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **95**, 931—934 (1954) [Russisch].

T. Evans (ce Zbl. **42**, 33) a montré que si \mathfrak{A} est une classe d'algèbres au sens de G. Birkhoff (ce Zbl. **13**, 1) telle que toute \mathfrak{A} -algèbre incomplète (c'est à dire toute algèbre a opérations non nécessairement partout définies mais satisfaisant aux axiomes de la classe \mathfrak{A}) puisse être immergée dans une algèbre de \mathfrak{A} , le problème des mots est résoluble pour toute algèbre de \mathfrak{A} définie par un nombre fini de générateurs et de relations. De plus il a montré que ceci implique, grâce au théorème d'immersion de MacNeille d'un ensemble ordonné dans un treillis, que le problème des mots est résoluble pour les treillis. Cependant ceci suppose que tout treillis incomplet (appelé ici „structuroïde“) peut être immergé dans un treillis. C'est ce qui est démontré dans le présent travail ainsi du reste que le théorème suivant: Tout „structuroïde“ dénombrable peut être immergé dans un „structuroïde“ à trois générateurs. On en déduit diverses conséquences, dont le théorème de Whitman: tout treillis libre ayant un ensemble dénombrable de générateurs est isomorphe à un sous-treillis libre à trois générateurs.

J. Riguet.

Montague, Richard and Jan Tarski: On Bernstein's selfdual set of postulates for Boolean algebras. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 310—311 (1954).

On montre dans cette note que l'ensemble de postulats donnés en 1916 par B. A. Bernstein pour les algèbres de Boole n'est pas indépendant. (Une erreur dans les démonstrations d'indépendance avait été décelée: Cf. B. A. Bernstein, ce Zbl. **40**, 154.)

J. Riguet.

Riguet, Jacques: Sur l'extension du calcul des relations binaires au calcul des matrices à éléments dans une algèbre de Boole complète. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 2382—2385 (1954).

Verf. betrachtet vollständig distributive Verbände L und 1- bzw. 2-stellige Funktionen („Vektoren“ u, v, \dots bzw. „Matrizen“ α, β, \dots) auf einer Menge E mit

Werten in L . Neben $u \wedge v, \dots, \alpha \wedge \beta, \dots$ wird definiert $(x, y, z, \dots \in E)$:
 $(u \times v)(x, y) = u(x) \wedge v(y), \quad (\alpha u)(y) = \bigvee_z (\alpha(z, y) \wedge u(z)), \quad (\alpha \beta)(x, y) =$
 $\bigvee_z (\alpha(z, y) \wedge \beta(x, z)).$ Mit $\tilde{\alpha}(x, y) = \alpha(y, x)$ übertragen sich alle Formeln, die

Verf. für 2-stellige Relationen aufgestellt hat (dies. Zbl. 33, 3) auf diesen allgemeinen Fall, z. B. $\alpha \beta \wedge \gamma \leq (\alpha \wedge \gamma \beta) (\beta \wedge \tilde{\alpha} \gamma)$. Dadurch lassen sich viele Untersuchungen von Löwenheim über die Auflösbarkeit von Gleichungen $\alpha u = v, \alpha \beta = \gamma$ vereinfachen [Math. Ann. 79, 223—236 (1919)].

P. Lorenzen.

Neumann, B. H.: An embedding theorem for algebraic systems. Proc. London math. Soc., III. Ser. 4, 138—153 (1954).

Let C be a class of algebraic systems (in the most general sense) and P a property that is meaningful for the systems of C . Then a system A of C is said to have the property P „locally“ if every finitely generated subsystem of A has the property P ; and „the local theorem“ is said to hold in C for the property P (or P is a property „of local character“ for C) if a system A of C has the property P if and only if it has the property P locally. A number of such local theorems are known, especially in the theory of groups. The author proves a very general local theorem about the embeddability of a partial algebraic system of a class in a full system (that is, one in which the operations can be carried out without restriction). To lend precision to this somewhat vague statement, an apparatus of mixed logical and algebraic nature to deal with embedding questions in the most general algebraic systems is very lucidly and carefully developed. The theorem is then proved and applied to yield among its many corollaries the following cases: A group G can be fully ordered if (and only if) every finitely generated subgroup of G can be fully ordered. A ring R can be embedded in a division ring if every finitely generated subring of R can be so embedded. The edges of a graph can be coloured with k colours so that no concurrent edges are equally coloured if the edges of every finite subgraph can be so coloured. (For this last result see also Bruijn and Erdős, this Zbl. 44, 382.)

K. A. Hirsch.

Andrunakievič, V. A.: Ringe mit Minimalbedingung für Ideale. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 98, 329—332 (1954) [Russisch].

Es wird bewiesen: Jeder Ring \mathfrak{A} mit Minimalbedingung für zweiseitige Ideale läßt sich auf genau eine Weise als direkte Summe $\mathfrak{A} = E + E^0$ darstellen, wobei E ein halbeinfacher Ring im Sinne von Brown-McCoy ist und E^0 die Eigenschaft besitzt, daß der Annulator des Radikals N von E^0 in N enthalten ist.

R. Kochendörffer.

Deskins, W. E.: A radical for near-rings. Proc. Amer. math. Soc. 5, 825—827 (1954).

D. W. Blackett (this Zbl. 52, 267) defined semisimple near-rings in terms of their right-modules. The author shows that an analogue to the radical in rings may instead be used. He defines in every near-ring N an ideal R such that the near-ring $N - R$ is semisimple in Blackett's sense, and N is semisimple if, and only if, R is zero. Moreover, if N is a ring, R coincides with the usual radical.

Hanna Neumann.

Geddes, A.: A short proof of the existence of coefficient fields for complete equicharacteristic local rings. J. London math. Soc. 29, 334—341 (1954).

The author first defines a weak local ring \mathfrak{R} to be a commutative ring with a unit element in which the non-units form an ideal \mathfrak{m} satisfying $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}^i = (0)$. Any local ring is a weak local ring by a theorem of Krull, and one can define the completeness of a weak local ring in an obvious way. A subfield F of a weak local ring \mathfrak{R} is called a coefficient field, if the natural homomorphism of \mathfrak{R} onto $\mathfrak{R}/\mathfrak{m}$

mapps F onto \mathfrak{R}/m . The characteristic of \mathfrak{R} is either zero or the smallest positive integer which annuls the unit element. In a slightly general form the main part of „Cohen's structure theorem“ for the equicharacteristic case is stated as follows: Let \mathfrak{R} be a complete weak local ring whose characteristic is the same as that of \mathfrak{R}/m . Then \mathfrak{R} contains a coefficient field. The author gives a simpler proof of this important result of Cohen by reducing it to the case of a weak primary ring of exponent 2. Here a commutative ring \mathfrak{R} with a unit element is called weak primary, if the non-units form a nilpotent ideal \mathfrak{p} . The exponent of \mathfrak{R} is the smallest positive integer q satisfying $\mathfrak{p}^q = (0)$. The whole proof is quite „elementary“ and the reduction arguments are ingenious. J. Igusa.

Weiner, L. M.: Algebras based on linear functions. Math. Mag. 28, 9—12 (1954).

Einer nicht notwendig assoziativen Algebra A über einem Körper K mit von 2 verschiedener Charakteristik wird eine Algebra A' mit der Multiplikation $x \circ y = f(x)y + f(y)x + xy$ zugeordnet, wo x, y in A und $f(x), f(y)$ in K liegen. $f(x)$ ist linear, das heißt $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Verf. stellt notwendige und hinreichende Bedingungen dafür auf, daß A und A' vom selben Typus sind. Zum Beispiel sind (zu K nicht isomorphe) A und A' dann und nur dann beide assoziativ, wenn $f(x)f(y) = -f(xy)$. Besonders wird der Fall der „power associative algebras“ behandelt, wo $x^n x^m = x^{n+m}$ für alle natürlichen n, m eindeutig bestimmt ist. E. Trost.

Heerema, Nickolas: An algebra determined by a binary cubic form. Duke math. J. 21, 423—443 (1954).

Gegenstand der Untersuchung sind die linearen assoziativen Algebren A über einem Körper F , die durch zwei Größen R und S erzeugt werden, deren definierende Relationen durch die für alle x und y aus F gültige Identität $(Rx + Sy)^3 = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ gegeben sind. A hat für beliebige Werte von a, b, c, d keine endliche Basis über F , hingegen ist jedes eigentlich homomorphe Bild von A endlich-dimensional über F . A kann somit keine direkte Summe sein. Verf. gibt genauere Angaben über das Zentrum Z von A . Z enthält den Polynombereich $F[t]$. A besitzt eine Basis von 18 Elementen über $F[t]$ als Operatorenbereich. E. Trost.

Yoshii, Tensho: Note on generalized uniserial algebras. I. Osaka math. J. 6, 105—107 (1954).

Let A be an associative algebra with a unit element. Then A is called generalized uniserial if every left ideal as well as every right ideal generated by a primitive element has a unique composition series: A is uniserial if it is generalized uniserial and primary-decomposable. A is called absolutely generalized uniserial if A_L is generalized uniserial for any coefficient field extension L ; absolutely uniserial algebra is defined similarly. The structure of absolutely uniserial algebras was studied by G. Azumaya and T. Nakayama (this Zbl. 39, 263). The author proves the following theorem: An algebra A is absolutely generalized uniserial if and only if A is a direct sum of two subalgebras A_1 and A_2 such that A_1 is a generalized uniserial algebra with the separable residue class algebra over its radical and A_2 is an absolutely uniserial algebra. K. Morita.

Wolf, Paul: Die direkte Zerlegung verallgemeinerter galoisscher Algebren mit Einselement und die Multiplikation verallgemeinerter abelscher Algebren. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 19, 94—114 (1954).

Eigenschaften verallgemeinerter galoisscher Algebren und ihre Widerspiegelung an den vom Verf. eingeführten Normalfaktoren (dies. Zbl. 50, 33, 34) werden untersucht. — Die Zerlegung einer gal. Algebra K in einfache Bestandteile führt auf lauter zur Kernalgebra isomorphe Exemplare. Sind diese wieder galoissch, so heißt K kern-galoissch. Für kommutatives K ergibt sich die Gruppe \mathfrak{G}^* der Kernalgebra als die

kleinste Untergruppe der Galoisgruppe von K , bez. der die Klasse \mathfrak{C} der Normalfaktoren reduzibel ist, d. h. die kleinste Untergruppe, zu der ein Vertreter in \mathfrak{C} existiert, in dessen Darstellung durch die natürliche Basis nur Elemente aus \mathfrak{B}^* eingehen. Bei nicht-kommutativem K bleibt die Frage offen, ob \mathfrak{C} über \mathfrak{B}^* hinaus reduzierbar ist. Zum Schluß wird im Anschluß an eine Arbeit von Hasse (dies. Zbl. 39, 268) die Multiplikation abelscher Algebren zurückgeführt auf die gewöhnliche Multiplikation ihrer Klassen (als Elemente bzw. Elementmengen des mittels der Galoisgruppe gebildeten Doppelgruppenringes $G \times G$).

H. W. Knobloch.

Iwahori, Nagayosi: On some matrix operators. J. math. Soc. Japan 6, 76—105 (1954).

Es sei $\mathfrak{R}(K) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathfrak{S}(K, n)$ die Menge aller Matrizen über einem Körper K . In \mathfrak{R} seien direkte Summe $\dot{+}$, Kroneckerprodukt \otimes und Kroneckersumme \oplus eingeführt. Es sei L eine Liesche Algebra über K und \mathfrak{R}_0 die Menge ihrer Darstellungen $\varrho_1, \varrho_2, \dots$ in \mathfrak{R} . Harish-Chandra (dies. Zbl. 36, 157) hat Abbildungen ζ von \mathfrak{R}_0 in \mathfrak{R} mit den folgenden Eigenschaften untersucht: I: $d(\zeta(\varrho)) = d(\varrho)$, $d(\varrho) = \text{Grad von } \varrho$; II: $\zeta(T \varrho T^{-1}) = T \zeta(\varrho) T^{-1}$ für nicht-singuläre T ; III: $\zeta(\varrho_1 + \varrho_2) = \zeta(\varrho_1) + \zeta(\varrho_2)$; IV: $\zeta(\varrho_1 \oplus \varrho_2) = \zeta(\varrho_1) \oplus \zeta(\varrho_2)$; $\varrho, \varrho_1, \varrho_2$ aus \mathfrak{R}_0 . Eine solche Abbildung heißt eine Darstellung von \mathfrak{R}_0 in \mathfrak{R} . L bezeichne die Menge aller Darstellungen von \mathfrak{R}_0 . \tilde{L} ist selbst eine Liesche Algebra über K und ist zu L isomorph, wenn L halbeinfach und K algebraisch abgeschlossen sowie von der Charakteristik 0. In der vorliegenden Arbeit wird der allgemeinere Fall untersucht, daß L nicht mehr halbeinfach ist, und zwar mit der Beschränkung auf eindimensionale Liesche Algebren L über K ; die algebraische Abgeschlossenheit von K wird weiterhin vorausgesetzt. \tilde{L} ist dann eine unendlich dimensionale abelsche Liesche Algebra (Satz 1). In diesem Fall können \mathfrak{R} und \mathfrak{R}_0 durch eine geeignete Beziehung identifiziert werden. \tilde{L} kann dann als eine Menge von Operatoren von \mathfrak{R} auf sich aufgefaßt werden mit: I: $d(\zeta(A)) = d(A)$ für jedes A in \mathfrak{R} ; II: $\zeta(T A T^{-1}) = T \zeta(A) T^{-1}$ für jedes A in \mathfrak{R} und jedes nicht-singuläre T ; III: $\zeta(A \dot{+} B) = \zeta(A) \dot{+} \zeta(B)$; IV₁: $\zeta(A \oplus B) = \zeta(A) \oplus \zeta(B)$ für alle A, B aus \mathfrak{R} . Diese Operatoren heißen wegen IV₁ sum-sum-operators, (s-s-Op.). Satz 2 besagt, daß A genau dann Replik der Matrix B ist, wenn ein s-s-Operator ζ mit $A = \zeta(B)$ existiert. Die Forderung IV₁ kann durch Forderungen IV₂: $\zeta(A \oplus B) = \zeta(A) \otimes \zeta(B)$ oder IV₃: $\zeta(A \otimes B) = \zeta(A) \oplus \zeta(B)$ oder IV₄: $\zeta(A \otimes B) = \zeta(A) \otimes \zeta(B)$ ersetzt werden. Die so gekennzeichneten Operatoren heißen dann s-p-, p-s- bzw. p-p-Operatoren. In den Sätzen 3–8 werden einige Eigenschaften dieser Operatoren für algebraisch abgeschlossene Körper K der Charakteristik 0 und p aufgezählt. Satz 2 gestattet, den Begriff der Replik auch durch diese Eigenschaft zu definieren, sie mögen danach s-s-Replik genannt werden. Entsprechend können dann s-p-, p-s- und p-p-Replik eingeführt werden. — Ein Anhang streift kurz den Fall, daß K nicht algebraisch abgeschlossen ist.

F. Wever.

Hochschild, G.: Representations of restricted Lie algebras of characteristic p . Proc. Amer. math. Soc. 5, 603—605 (1954).

A representation $x \rightarrow U(x)$ of a restricted Lie algebra over a field F of characteristic p is said to be restricted, if $x^{[p]} \rightarrow (U(x))^p$. Let L be a restricted Lie algebra of finite dimension over F . Then the finite dimensional restricted representations are all completely reducible if and only if L is abelian and is spanned by the elements of the form $x^{[p]}$.

P. M. Cohn.

Curtis, Charles W.: A note on the representations of nilpotent Lie algebras. Proc. Amer. math. Soc. 5, 813—824 (1954).

Let L be a nilpotent Lie algebra of finite dimension over a field K of characteristic $p \neq 0$; L has a regular basis a_1, a_2, \dots, a_n , i. e. such that the space spanned by a_1, a_2, \dots, a_i is a subalgebra of L ($i = 1, 2, \dots, n$). If K is algebraically closed, then in any irreducible representation $x \rightarrow U(x)$ of L each x of L has a unique eigenvalue $\lambda(x)$, and there is a one-one correspondence between the irreducible representations U of L and ordered sets $(\lambda(a_1), \dots, \lambda(a_n))$ of n elements of K (which are the eigenvalues of the regular basis in the representation U) (cf. Zassenhaus, this Zbl. 23, 292). The author generalises this result to the case of an arbitrary field of characteristic p . Here the minimal polynomial of an element of L in an indecomposable (and hence also in an irreducible) representation is a power of an irreducible polynomial, and for every set of irreducible polynomials (f_1, \dots, f_n) there

is an irreducible representation $U(x)$ of L , unique to within equivalence, such that the minimal polynomial of $U(a_i)$ is a power of f_i . This property of U is shared by an infinite set of indecomposable representations, whose degrees are unbounded (for fixed polynomials f_i). — The author also proves that if L is a nilpotent algebra over any field, and U an indecomposable representation of L of finite degree, then any two irreducible constituents of U are equivalent.

P. M. Cohn.

Ninot, Joachim: Über den Hauptsatz der Galoisschen Theorie. (Kommutative Körper.) Arch. der Math. 6, 52—54 (1954).

Die angegebene Herleitung des Hauptsatzes der galoisschen Theorie für kommutative Körper bedeutet eine Vereinfachung des bisher „schwierigeren“ Teils des Beweises (Zuordnung: Untergruppe \rightarrow Zwischenkörper \rightarrow Untergruppe). Sei G eine Automorphismengruppe eines Körpers \mathfrak{K} und f der Fixkörper von G . Durch Anwendung von G auf ein festes Element aus \mathfrak{K} erhält man eine Abbildung von G in \mathfrak{K} . Der neue Gedanke des Verf. besteht dann in dem Nachweis, daß Elemente aus \mathfrak{K} , die über f linear unabhängig sind, derartige Abbildungen von G in \mathfrak{K} erzeugen, die über \mathfrak{K} (jetzt als Multiplikatorenbereich von sich selbst betrachtet) linear unabhängig sind. Daraus folgt $\text{Ord}(G) \geq (\mathfrak{K}:f)$; nach dem Hilfssatz von Dedekind hat man andererseits $\text{Ord}(G) \leq (\mathfrak{K}:f)$, also gilt $\text{Ord}(G) = (\mathfrak{K}:f)$. — Anmerkung des Ref.: Der Gedanke des Verf. kann bei entsprechender Fassung auch zum Beweis des Hauptsatzes der Galoisschen Theorie für Schiefkörper herangezogen werden, so daß man dann ohne den Satz von Jacobson-Bourbaki auskommt.

F. Kasch.

Carlitz, L.: Invariant theory of systems of equations in a finite field. J. Analyse math. 3, 382—413 (1954).

For a finite field $GF(q)$ consider the set T of all transformations $\Phi: \xi_i \rightarrow \Phi_i(\eta_1, \dots, \eta_r)$ ($i = 1, \dots, r$) possessing an inverse, where $\xi_i, \eta_j \in GF(q)$ and Φ_i is a polynomial with coefficients in $GF(q)$. Two polynomial sets, $[f] = [f_1, \dots, f_k]$ and $[g] = [g_1, \dots, g_k]$, with coefficients in $GF(q)$, are called equivalent ($[f] \sim [g]$) if $\Phi \in T$ for which $\Phi_i f_i = g_i$, for $i = 1, \dots, k$. In a recent paper [Invariantive theory of equations in a finite field, Trans. Amer. math. Soc. 75, 405—427 (1953)] the author has discussed the resulting class division in the case $k = 1$, the main results stemming from the theorem that the number, $N_f(x)$, of solutions ξ_1, \dots, ξ_r in $GF(q)$ of $f = x$ is an invariant of the class of f , and that $f \sim g$ if and only if $N_f(x) = N_g(x)$ for each x in $GF(q)$. In the present paper the general theorems for $k = 1$ are extended to theorems for arbitrary k , and a number of new examples are discussed to illustrate the general theory.

M. C. R. Butler.

Jaeger, Arno: Die Riccatische Differentialgleichung in Körpern der Charakteristik 2. Arch. der Math. 5, 423—428 (1954).

Kürzlich wurde bewiesen (dies. Zbl. 51, 29), daß bei Zugrundelegung der algebraischen Differentiationstheorie von F. K. Schmidt (dies. Zbl. 47, 36) die Riccatische Differentialgleichung $Dy = a y^2 + b y + c$ mit Koeffizienten aus einem Körper K der Charakteristik $p = 2$ stets in einer D -zulässigen quadratischen Erweiterung von K lösbar ist. Verf. zeigt, daß bei Charakteristik 2 die Existenz von Lösungen und der Lösungskörper davon abhängen, ob a, b und c Lösungen der Differentialgleichung $Dy + b y = 0$ sind. Die Fälle der Existenz bzw. Nichtexistenz von Lösungen werden im einzelnen angegeben: z. B. gibt es im Fall $D b + b^2 = D a + b a = 0$, $D c + b c \neq 0$ keine Lösung der Riccatischen Differentialgleichung.

F. Kasch.

Zahlkörper. Funktionenkörper:

Chowla, S. and W. E. Briggs: On discriminants of binary quadratic forms with a single class in each genus. Canadian J. Math. 6, 463—470 (1954).

Es sei $d < 0$ die Diskriminante eines imaginär-quadratischen Zahlkörpers, $h(d)$ seine Klassenzahl und $h_0(d)$ seine Klassenzahl im Hauptgeschlecht. In Verschärfung des Heilbronn'schen Satzes: ($h(d) \rightarrow \infty$ für $d \rightarrow \infty$) bewies Chowla in früheren Noten (dies. Zbl. 10, 152, 337): Es gibt nur endlich viele d mit $h_0(d) = 1$ ($h_0(d) \rightarrow \infty$ mit $d \rightarrow \infty$). Dieses Ergebnis wird nun ergänzt: Es gibt höchstens ein d mit $|d| > 10^{60}$ und $h_0(d) = 1$. Sei $L_d(s) = \sum \binom{d}{n} n^{-s}$ die zugehörige L -Funktion. Wenn $L_d\left(\frac{53}{54}\right) \geq 0$ für $|d| > 10^{14}$, so gibt es kein d mit $|d| > 10^{14}$ und $h_0(d) = 1$. Der zahlentheoretische Kern des analytischen Beweises ist eine einfache obere Abschätzung des Geschlechterfaktors durch die Diskriminante: $2' \leq d^{0.3}$ bzw. $\leq d^{0.2}$ für $|d| > 10^{14}$ bzw. 10^{60} . Druckfehlerberichtigung: Lemma 4 muß lauten: Wenn $L_d\left(\frac{53}{54}\right) \geq 0$ für $|d| > 10^{14}$, so $L_d(1) \geq \frac{1}{54} |d|^{-1/27}$.

H. W. Leopoldt.

Dénes, Peter: Über irreguläre Kreiskörper. Publ. math., Debrecen 3, 17–23 (1954).

p sei eine ungerade Primzahl und B_n die n -te Bernoullische Zahl. Verf. behauptet dann, daß jeder natürlichen Zahl i ($1 \leq i \leq q = (p-3)/2$) stets eine ganze rationale Zahl u_i eindeutig durch die folgenden Kongruenzen zugeordnet werden kann: $B_{ip^j} \equiv 0 \pmod{p^{2j-1}}$ ($j = 0, 1, \dots, u_i - 1$) und $B_{ip^{u_i}} \not\equiv 0 \pmod{p^{2u_i+1}}$. (Der Beweis der obigen Tatsache ist einer späteren Arbeit vorbehalten.) Das Maximum w der Zahlen u_i ($i = 1, 2, \dots, q$) heißt der Irregularitätsgrad von p . Bekanntlich ist $w = 0$ dann und nur dann, wenn p eine reguläre Primzahl ist. Verf. beweist folgenden Satz: Es sei E eine Einheit aus dem Kreiskörper K , welcher aus dem rationalen Zahlkörper durch Adjunktion einer primitiven p -ten Einheitswurzel entsteht. Ist dann $E \bmod p^{u-2}$ einer ganzen rationalen Zahl kongruent, so ist E die p^u -te Potenz einer Einheit aus K . Dies ist für eine reguläre Primzahl p eine Verallgemeinerung eines von Kummer bewiesenen Satzes.

M. Moriya.

Lenz, Hanfried: Zur Quadratsummandarstellung in relativquadratischen Zahlkörpern. S. Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1953, 283–288 (1954).

The author proves that if γ is a totally positive element of a quadratic extension K of an algebraic number field G , then there exists an element χ of the extension field K such that $\gamma - \chi^2$ is a totally positive element of the base field G .

P. T. Bateman.

Delone, B. N.: Über das Anwachsen der Diskriminanten von algebraischen Zahlkörpern gegebenen Grades. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 96, 233–236 (1954) [Russisch].

K_1, K_2, K_3, \dots seien die total-reellen Zahlkörper des Primzahlgrades n , geordnet nach wachsenden Beträgen ihrer Diskriminanten D_1, D_2, D_3, \dots . Es wird gezeigt, daß es keine Abschätzung der Gestalt $D_m < A m^{k(n-2)/n}$ geben kann, wobei A irgendeine Konstante und ε eine beliebige positive Zahl ist. Der Beweis beruht auf der gleichzeitigen Betrachtung aller der Gitter, die von den ganzen Zahlen eines jeden dieser Körper gebildet werden, und benützt eine frühere einfache Abschätzung der Anzahl aller Punkte all dieser Gitter, die in einer n -dimensionalen Kugel von gegebenem Radius liegen (Delone-Faddeev, Theorie der kubischen Irrationalitäten, Moskau 1940). Analoge Resultate gelten auch für Körper beliebigen Grades und beliebiger Signatur.

H. Reichardt.

Šafarevič, I. R.: Über die Konstruktion von Körpern mit vorgegebener Galois'scher Gruppe der Ordnung ν . Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 18, 261–296 (1954) [Russisch].

Der Fortschritt gegenüber den früheren Konstruktionen algebraischer Zahlkörper mit gegebener Galois'scher Gruppe \mathfrak{G} von Primzahlpotenzordnung ν^k , die von A. Scholz (dies. Zbl.

16, 6) und Ref. (dies. Zbl. 16, 151) durchgeführt wurden, besteht darin, daß der damals nicht erledigte Fall $l = 2$ jetzt bezwungen wird. Der Konstruktionsversuch von T. Tannaka (dies. Zbl. 17, 294) für alle Primzahlen l wurde, was Verf. nicht zur Kenntnis gekommen ist, bereits von A. Scholz und Ref. [Fortschritte d. Math. 63, 146 (1937)] durch Gegenbeispiele widerlegt. — Scholz und Ref. hatten gezeigt, daß ein „Scholzscher“ Körper k/R , der durch gewisse Zerfalls- und Kongruenzeigenschaften der Primteiler der Zahl l und der Relativdiskriminante von k/R charakterisiert wird, so in einen Körper K eingebettet werden kann, der normal über R mit der Galoisschen Gruppe \mathfrak{G} ist, daß die Gruppe \mathfrak{H} von K/k von der Ordnung l ist und im Zentrum von \mathfrak{G} liegt und \mathfrak{G} isomorph zur Galoisschen Gruppe von k/R wird, und zwar kann für $l \neq 2$ der Körper K stets wieder als Scholzcher Körper konstruiert werden. Verf. gibt nun ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür an, daß das Einbettungsproblem für einen Scholzsehen Körper bei beliebigem l durch einen Scholzsehen Körper gelöst werden kann, und gründet darauf die gesuchte Konstruktion, wozu er als wesentliches Hilfsmittel eine Theorie der Homomorphismen der Gruppen der Ordnung l^2 und ihrer Komposition entwickelt. H. Reichardt.

Safarevič, I. R.: Über einen Existenzsatz in der Theorie der algebraischen Zahl-
len. Izvestija Akad. Nauk SSR, Ser. mat. 18, 327—334 (1954) [Russisch].

Es wird folgender Existenzsatz bewiesen, der z. B. bei der Konstruktion von Körpern mit vorgegebener auflösbarer Galoisgruppe eine Rolle spielt: Der Normalkörper K/k habe die Galoisgruppe F und enthalte die l -ten Einheitswurzeln (l Primzahl, $\neq 2$). Für eine primitive l -te Einheitswurzel ζ sei $\zeta^u = \zeta^{q(u)}$ für $u \in F$. Gegeben seien die untereinander und zu l teilerfremden Divisoren q_1, \dots, q_r aus K , ferner r beliebige l -te Einheitswurzeln ξ_1, \dots, ξ_r und schließlich eine auf F definierte Funktion $\zeta(u)$, deren Werte l -te Einheitswurzeln sind, und die der Bedingung $\zeta(u^{-1}) = \zeta(u)^{q(u)}$ genügt. Dann existieren in K unendlich viele Zahlen α mit den Eigenschaften: $(\alpha/q_i) = \xi_i$ ($i = 1, \dots, r$), $(\alpha/p^u) = \zeta(u)$ für jeden Primdivisor $p|\alpha$ und alle $u \in F$, $u \neq 1$. Dabei ist natürlich $p^u \nmid \alpha$ für $u \neq 1$ vorauszusetzen. Im Falle $l = 2$ gilt eine entsprechende Aussage unter zusätzlichen Voraussetzungen.

R. Kochendörffer.

Weil, André: Remarques sur un mémoire d'Hermite. Arch. der Math. 5, 197—202 (1954).

[Vgl. Ch. Hermite, J. reine angew. Math. 52, 1—17 (1856) = Oeuvres t. I. 350—360]. Es sei $f(X, Y)$ eine biquadratische Form in zwei Variablen mit Koeffizienten aus einem Körper k . Es seien i, j und $g(X, Y), h(X, Y)$ die Invarianten bzw. Kovarianten von f im Sinne von Hermite; i, j und die Koeffizienten von g, h sind gewisse Polynome in den Koeffizienten von f , während g, h gewisse homogene Polynome in X, Y der Grade 4 bzw. 6 sind. Hermite bewies die Relation $4g^3 - i^2 f^2 g - j^2 f^3 = h^2$. Dieser Relation kann folgendermaßen eine Deutung gegeben werden (Voraussetzung: f besitzt lauter verschiedene Linearfaktoren, und $\text{Char}(k) \neq 2, 3$): Durch $K = k(x, z)$ mit $z^2 = f(x, 1)$ wird ein eindimensionaler algebraischer Funktionenkörper K vom Geschlecht 1 definiert. Setzt man $\tilde{K} = k(\xi, \zeta)$ mit $\zeta^2 = 4\xi^3 - i\xi - j$, so besagt die Hermitesche Relation, daß durch $\xi \rightarrow z^{-2}g(x, 1)$, $\zeta \rightarrow z^{-3}h(x, 1)$ ein Isomorphismus von \tilde{K} in K definiert wird, also eine Korrespondenz von \tilde{K} in K . In Ergänzung dazu zeigt Verf. hier: \tilde{K} ist seinem Typus nach der zu K gehörige Jacobische Funktionenkörper (= „Abelscher Funktionenkörper“ in der Terminologie von Hasse). Das bedeutet: Es gibt eine über k definierte birationale Korrespondenz zwischen der Mannigfaltigkeit der Punkte von \tilde{K} und der Mannigfaltigkeit der Divisorenklassen vom Grade 0 von K . Zur Konstruktion einer solchen Korrespondenz werden vom Verf. explizite Formeln angegeben, welche gedeutet werden können als ein Isomorphismus von \tilde{K} in den Körper der Koordinaten zweier unabhängiger allgemeiner Punkte von K (= „Doppelkörper“ in der Terminologie von Hasse). Der Nachweis, daß dieser Isomorphismus eine Korrespondenz der verlangten Art liefert, wird geführt durch Vergleich der Definitionsformeln mit dem Additionstheorem der elliptischen Funktionen; dabei ist ferner die Tatsache entscheidend, daß es in K einen Divisor vom Grade 2 gibt (nämlich den Nenner von x). — Es sei ∞ eine festgewählte Divisorenklasse von K

vom Grade 2, und es mögen zwei Divisorenklassen miteinander identifiziert werden, wenn sie sich nur um ein Vielfaches von ∞ unterscheiden. Die entstehende Gruppe kann als Mannigfaltigkeit gedeutet werden, welche aus 2 Komponenten besteht: die eine Komponente wird gebildet von den Punkten von K , und die andere von den Punkten von K . Aus den Resultaten des Verf. folgt, daß die Gruppenoperation rational über k ist. — Verf. deutet noch an, wie diese Resultate auf einen beliebigen elliptischen Funktionenkörper zu verallgemeinern sind. Er stellt als Aufgabe, zu untersuchen, welche ganzen Zahlen d als kleinster positiver Divisorgrad eines elliptischen Funktionenkörpers über dem rationalen Zahlkörper möglich sind.

P. Roquette.

Zahlentheorie:

● Gelfond, Alexander O.: **Ganzzahlige Lösungen von Gleichungen.** Aus dem Russischen übertragen von Rudolf Herschel. (Mathematische Einzelschriften. Band 2.) München: R. Oldenbourg 1954. 59 S. DM 7,80.

Vgl. die Besprechung des Originals in dies. Zbl. 48, 28.

Ginsburg, Jekuthiel: **Triplets of equiareal rational triangles.** Scripta math. 20, 219—220 (1954).

Iyer, R. Venkatachalam: **Multigrades with palindromic numbers as elements.** Scripta math. 20, 220—222 (1954).

Klamkin, Murray S.: **On rational points on a circle.** Scripta math. 20, 222—223 (1954).

Ankeny, N. C. and P. Erdős: **The insolubility of classes of Diophantine equations.** Amer. J. Math. 76, 488—496 (1954).

Let m be a natural number and a_1, a_2, \dots, a_n non-zero rational integers such that for every selection of $\epsilon_j = 0$ or ± 1 ($j = 1, 2, \dots, n$) except $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = \epsilon_n = 0$ we have $a_1 \epsilon_1 + \dots + a_n \epsilon_n \neq 0$. Let U be a large positive real number tending to infinity and $D(U)$ the number of $m \leq U$ for which the equation $a_1 X_1^m + a_2 X_2^m + \dots + a_n X_n^m = 0$ has rational integer solutions in the variables X_1, X_2, \dots, X_n where not all $X_j = 0$. The authors prove that $D(U) = o(U)$. They also prove a case which is excluded in the theorem above: The density of integers m , for which the equations $X_1^m + X_2^m + X_3^m = 0$ has a rational solution and for which $(X_1 X_2 X_3, m) = 1$, is zero. They also mention that the first result can be generalized from the rational number field to any algebraic number field F . The paper contains various misprints and defects. Lemma 4 is incorrect.

S. Selberg.

Rivier, William: **Sur les solutions entières et non négatives de l'équation $rx + sy = m$.** Bull. Sci. math., II. Sér. 78, 147—155 (1954).

Verf. gibt eine neue Darstellung von Ergebnissen, die er früher (dies. Zbl. 50, 266) über die Anzahl $\omega(m)$ der ganzzahligen, nicht-negativen Lösungen der Gleichung $rx + sy = m$, $r > 0$, $s > 0$, $(r, s) = 1$, gefunden hat. Ferner zeigt er: Sind m_1, m_2 ganze, nicht-negative Zahlen, die die Relation $m_1 + m_2 = krs - r - s$ befriedigen, so gilt $\omega(m_1) + \omega(m_2) = k$. Dabei ist k eine beliebige natürliche Zahl, nur > 2 , wenn $r = s = 1$ und > 1 , wenn r oder s (aber nicht beide) gleich 1 sind.

N. Hofreiter.

Bini, Umberto: **Sul numero delle soluzioni intere dell'equazione $x^3 + y^3 = K$.** Archimede 6, 187—195 (1954).

Buquet, A.: **Étude des solutions rationnelles de l'équation diophantienne $G(x) \equiv ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = z^2$.** Mathesis 63, 240—250 (1954).

Im Anschluß an frühere Untersuchungen der im Titel genannten Gleichung (1) (dies. Zbl. 41, 18; 45, 18) gibt Verf. eine elementare Methode an, rationale Punkte auf (1) zu berechnen, indem man die Kurve $z = px^2 + qx + r$ durch bekannte rationale Punkte auf (1) legt. Durch das Studium der Parabelschar $z = Q(x) + tP(x)$,

wo t ein Parameter und $P(x)$ und $Q(x)$ Polynome zweiten Grades in x sind, wird eine Methode gegeben, aus $2n+1$ gegebenen Punkten $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ mittels der symbolischen Formeln $R_3 = A_1 + A_2 + A_3$, $R_{2i+1} = R_{2i-1} + A_{2i} + A_{2i-1}$ die n resultierenden Punkte $R_3, R_5, \dots, R_{2n+1}$ zu bestimmen. Aus $A_i = A$ ist es möglich, die Punkte $A, 3A, 5A, \dots$ zu berechnen. Wenn die Reihe periodisch ist und n verschiedene Punkte enthält, ist A ein exzeptioneller Punkt. Für $n = 1, 2, \dots, 8$ gibt der Verf. die Form der Kurve (1) an, und mittels numerischer Beispiele zeigt er die Existenz von Kurven mit $n = 9, 10$ und 12 . *B. Stolt.*

Ljunggren, Wilhelm: Ein Satz über die diophantische Gleichung $Ax^2 - By^4 = C$ ($C = 1, 2, 4$). 12. Skand. Mat.-Kongr., Lund 1953, 188–194 (1954).

Verf. hat früher (dies. Zbl. 19, 50) gezeigt, daß die im Titel angegebene Gleichung höchstens 2 Lösungen in natürlichen Zahlen hat. Ist $C = 4$ und $B \equiv 3 \pmod{4}$ oder $C = 1$, so existiert höchstens eine Lösung. Dabei sind A und $B > 0$, A quadratfrei, AB keine Quadratzahl, ungerade, wenn C gerade; ferner $C = 2$ für $A = 1$. Verf. gibt in dieser Arbeit einen etwas einfacheren Beweis, der wie früher auch mit Hilfe von Grundeinheiten in Körpern vierten Grades geführt wird.

N. Hofreiter.

Domar, Yngve: On the Diophantine equation $|Ax^n - By^n| = 1$, $n \geq 5$. Math. Scandinav. 2, 29–32 (1954).

Hägmark (this Zbl. 48, 274) has shown that the diophantine equation $x^5 - My^5 = 1$, where M is an integer, has at most two integral solutions apart from the trivial solution $x = 1, y = 0$. In the proof use was made of the p -adic method due to Th. Skolem. The author proves the following stronger theorems: 1. The equation $|Ax^n - By^n| = 1$, where A and B are positive integers and $n \geq 5$, has at most two solutions in positive integers (x, y) . 2. The equation $x^n - My^n = 1$, where M is a positive integer and $n \geq 5$, has at most one solution in positive integers (x, y) except possibly for $M = 2$ and if $n = 5$ or 6 for $M = 2^n - 1$. These theorems are proved by making some modifications in the final phase of the proof of a theorem of C. L. Siegel (this Zbl. 15, 389).

W. Ljunggren.

Carlitz, L.: Congruences for the number of n -gons formed by n lines. Amer. math. Monthly 61, 407–411 (1954).

R. Robinson proved that the number g_n of polygons of n sides formed by a network of n lines satisfies the recurrence $g_{n+1} = ng_n + \frac{n}{2}(n-1)g_{n-2}$ ($g_1 = g_2 = 0$, $g_3 = 1$) (this Zbl. 43, 277). The author establishes the following congruences: For integral $m \geq 1$, $g_{n+m} \equiv g_m g_n \pmod{m_0}$ ($n \geq 1$) where $m_0 = m$ for m odd, $m_0 = m/2$ for m even. More generally, $Ag_n \equiv 0 \pmod{m_0^{(r+1)/2}}$ where $Ag_n = \sum_{s=0}^r (-1)^r \binom{r}{s} g_{n+(s)m} g_{(r-s)m}$. For any odd prime p , $g_p \equiv \frac{1}{2}(p-1) \pmod{p}$, whence $g_{n+p} \equiv -\frac{1}{2}g_n \pmod{p}$.

F. A. Behrend.

Carlitz, L. and R. F. Olson: Some theorems on Bernoulli and Euler numbers of higher order. Duke math. J. 21, 405–421 (1954).

Nach Nörlund (Vorlesungen über Differenzenrechnung, Berlin 1924, Kap. 6) definiert man verallgemeinerte Bernoullische bzw. Eulersche Zahlen (positiver oder negativer Ordnung) durch

$$\prod_{s=1}^k \left(e^{\omega_s x} - 1 \right)^\varepsilon = \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(\varepsilon k)} [\omega_1, \dots, \omega_k] \frac{x^m}{m!} \quad \text{bzw.} \\ \prod_{s=1}^k \left(e^{\omega_s x} + 1 \right)^\varepsilon = \sum_{m=0}^{\infty} E_m^{(\varepsilon k)} [\omega_1, \dots, \omega_k] \frac{x^m}{m!}, \quad \varepsilon = \pm 1. \quad \text{Verff. dehnen eine Reihe}$$

bekannter Formeln (vgl. L. Carlitz, dies. Zbl. 52, 38, 2. Referat) über die gewöhnlichen Bernoullischen bzw. Eulerschen Zahlen ($\omega_1 = \dots = \omega_k = 1$) auf die verallgemeinerten Zahlen aus. Beispiel: Sei p eine Primzahl $\neq 3$, $\omega_1, \dots, \omega_k$ seien rationale Zahlen, die mod p ganz sind. Ist dann $\sigma_s = \omega_1^s + \dots + \omega_k^s \equiv 0 \pmod{p}$,

$1 \leq s \leq p-1$, so gilt $B_{2r}^{(k)}[\omega_1, \dots, \omega_k] \equiv (1/2r) \sigma_{2r} B_{2r} \pmod{p^2}$ und $B_{2r-1}^{(k)}[\omega_1, \dots, \omega_k] \equiv [(2r-1)/4r] \sigma_1 \sigma_{2r} B_{2r} \pmod{p^3}$ für $1 \leq r \leq (p-3)/2$. Die Resultate ergeben sich als Spezialfälle noch allgemeinerer Kongruenzen, die über gewisse Mischformen von verallgemeinerten Zahlen positiver und negativer Ordnung gewonnen werden.

H.-E. Richert.

Carlitz, L.: Pairs of quadratic equations in a finite field. Amer. J. Math. **76**, 137—154 (1954).

Verf. gibt Ausdrücke für die Lösungsanzahl eines Systems von 2 quadratischen Formen $Q_1(\xi_1, \dots, \xi_s) = \alpha$, $Q_2(\xi_1, \dots, \xi_s) = \beta$ in einem Galoisfeld k von $q = p^m$ ($p \geq 3$) Elementen unter folgenden Voraussetzungen für Q_1 und Q_2 : $Q_1 = \sum_{\theta=1}^r Q^{(\theta)}$, $Q_2 = \sum_{\theta=1}^r \beta_\theta Q^{(\theta)}$, wobei $Q^{(\theta)} = Q^{(\theta)}(\xi_1^{(\theta)}, \dots, \xi_{s_\theta}^{(\theta)})$, $\sum_{\theta=1}^r s_\theta = s$, $(\xi) = (\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(r)})$.

Die Lösungsanzahl läßt sich durch quadratische Gaußsche Summen und Charaktersummen darstellen; Fallunterscheidungen nach der Anzahl der geraden und ungeraden s_θ , bzw. danach, ob α oder β oder beide gleich Null sind. Der Fall von 3 oder 4 ungeraden s_θ wird mit Hilfe Jacobsthal'scher Summen genauer diskutiert; Verallgemeinerung eines Satzes von Jacobsthal auf höhere Galoisfelder. — In den Spezialfällen, wo alle s_θ gerade (ungerade) sind, bestimmt Verf. aus der Lösungsanzahl von $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$ die Anzahl der „rationalen Punkte“ der durch dieses System definierten Kongruenzmannigfaltigkeit M und zeigt, daß die entsprechend dem Ansatz von A. Weil (dies. Zbl. **32**, 394) M zugeordnete Zetafunktion $Z_M(U)$ eine rationale Funktion von U ist. — Abschließend werden Lösungsformeln für den Fall $q = 2^m$ angegeben.

E. Lamprecht.

Weil, André: Footnote to a recent paper. Amer. J. Math. **76**, 347—350 (1954).

Verf. zeigt, wie sich die Bestimmung der Lösungsanzahl zweier quadratischer Formen $Q_1 = \alpha$, $Q_2 = \beta$ in einem Galoisfeld k von $q = p^m$ ($p \geq 3$) Elementen auf den Fall $\alpha = \beta = 0$ zurückführen läßt, und leitet für die Lösungsanzahl von $Q_1 = Q_2 = 0$ unter Benutzung von Methoden von Carlitz (vgl. vorstehendes Referat) eine prägnante Formel her (ohne einschränkende Voraussetzungen über Q_1 , Q_2 und ohne Fallunterscheidungen). Weiter bestimmt Verf. für den Fall, daß durch $Q_1 = Q_2 = 0$ eine nichtsinguläre projektive Mannigfaltigkeit über k erklärt wird, deren Zetafunktion $Z(U)$; Hinweis, daß bei singulären und affinen Mannigfaltigkeiten (für die Verf. diesbezügliche Vermutungen auch nicht aussprach) entsprechende „Zetafunktionen“ keiner Funktionalgleichung zu genügen brauchen [vgl. auch Ref., Math. Z. im Druck, voraussichtlich Bd. **63**]. — Alle Ergebnisse enthalten als Spezialfälle die entsprechenden von Carlitz (vorstehendes Referat).

E. Lamprecht.

Clair, Harry S.: Euclid's algorithm and its applications. Math. Mag. **28**, 71—82 (1954).

Nicol, C. A.: A note concerning the quotient $(r^{p-1} - 1)/p$. Amer. math. Monthly **61**, 562—563 (1954).

This note contains two theorems concerning the Fermat Quotient, and a theorem concerning a sum of powers of primitive roots modulo an odd prime. As an example we mention the following theorem: If p and r are primes and r is a primitive root modulo p , then $(r^{p-1} - 1)/p = (r-1)[e(r) + (p-1)/2]$, where $e(r)$ denotes the exponent of the highest power of r which divides $((r^{p-1} - 1)/p)!$.

W. Ljunggren.

Duparc, H. J. A.: Periodicity properties of recurring sequences. II. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **57**, 473—485 (1954).

For definitions see the review of part I of this paper (this Zbl. **55**, 262). In part II sequences are considered whose elements are in an ff -set R and which satisfy

a homogeneous linear recurrence relation (α) of order N with coefficients in R . A characteristic polynomial $f(x)$ is associated with (α) . If $m \in R$, if U is a U -set with respect to $f(x)$ and m , a positive integer d is called a period mod m with respect to U of a sequence $\{w_n\}$ satisfying (α) , if there exists an element u of a residue class belonging to U , such that $w_{n+d} \equiv u w_n \pmod{m}$ for sufficiently large n . [Reviewer's remark: From the subsequent proofs of the author's paper it is clear that he has meant to restrict U such that every residue class of U contains a constant. By u the author means a constant.] These periods are multiples of a primitive period. The author proves that this primitive period is equal to $c_r(f, m; U)$ except if m has prime factors belonging to an explicitly determined finite set. This set of exceptional primes depends on (α) and on the first N elements of the sequence. So the results of part I can be applied to periods of sequences. In particular the author studies the case that R is the set of the rational integers and U is E or V . Divisibility properties of the corresponding periods are derived. The case $N = 2$ is studied in great detail. Finally some remarks are made on the cases $N = 3$ and $N = 4$. *W. Peremans.*

Duparc, H. J. A.: From recurring fraction to recurring computing circuit. Math. Centrum, Amsterdam, Rapport ZW 1954—010, 8 S.

Let E be the operator defined by $E u_r = u_{r-1}$ and $U(x)$, $V(x)$, $X(x)$ and $Y(x)$ be polynomials with integer coefficients where $X(x)U(x) - Y(x)V(x) = M$, an integer. The author considers integer solutions of $U(E)u_n = V(E)v_n$ when $0 \leq u_r \leq m-1$, the leading coefficients of $U(x)$ and $V(x)$ are ± 1 and m respectively, and the zeros of $V(x)$ lie inside $|x| \leq 1$. These solutions are periodic. It is shown that if C_t and $C_{u,r}$ denote the primitive periods of the sequences t_0, t_1, \dots and $(u_0, v_0), (u_1, v_1), \dots$ respectively then $C_r, C_u = C_{u,r}$. If $a_n = X(E)v_n + Y(E)u_n$ then $U(E)a_n = Mv_n$, $V(E)a_n = Mu_n$ and $C_a = C_u$. The author's thesis (Divisibility properties of recurring sequences, Gravenhage 1953) is quoted for results connecting C_b, C_v and C_z where $b_r \equiv a_r \pmod{M}$, $y_r \equiv x^r \pmod{M, U(x)}$ and $z_r \equiv x^r \pmod{M, V(x)}$. The cases $V(x) = m$, $m x - q$, $m x^t - 1$ are considered and a special case of the first, namely $p u_n - u_{n+1} = m v_n$, gives the representation of u_0/m in the scale of p . Representations are given of cyclic computing circuits when $U(x)$ and $V(x)$ have simple forms. *F. W. Ponting.*

Brown, Alan L.: Multiperfect numbers. Scripta math. 20, 103—106 (1954).

Verf. veröffentlicht eine Liste von 110 neuen vielfach vollkommenen Zahlen, d. h. natürlichen Zahlen n , die $\sigma(n) = m \cdot n$ mit natürlichem m , der Vielfachheit von n , genügen. Die Zahlen zerfallen in mehrere Klassen, entsprechend $m = 5, 6, 7, 8$. Poulet hat 31 dieser Zahlen entdeckt, aber nicht veröffentlicht. 25 dieser Zahlen wurden unabhängig vom Verf. von Franqui und Garcia gefunden. *H. J. Kanold.*

Franqui, Benito and Mariano Garcia: 57 new multiply perfect numbers. Scripta math. 20, 169—171 (1954).

Uhler, H. S.: Full values of the first seventeen perfect numbers. Scripta math. 20, 240 (1954).

Steuerwald, Rudolf: Ein Satz über natürliche Zahlen N mit $\sigma(N) = 3N$. Arch. der Math. 5, 449—451 (1954).

Es sei $\sigma(n)$ die Summe aller positiven Teiler einer natürlichen Zahl n . Der folgende Satz wird bewiesen: Aus $n \equiv 0 \pmod{6}$ und $\sigma(n) = 3n$ ergibt sich, daß n von den Primzahlen 2 und 3 eine genau in der ersten, die andere in einer höheren Potenz enthält. Der Beweis benutzt einen Satz von L. E. Dickson [Amer. math. Monthly 12, 86—89 (1905)]. Mit Hilfe des obigen Satzes kann man zeigen, was ohne Beweis angegeben wird, daß die bekannten vielfachvollkommenen Zahlen $n_1 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$; $n_2 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7$; $n_3 = 2^9 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 31$ die einzigen Zahlen n mit $\sigma(n) = 3n$ sind, welche weniger als fünf verschiedene Primteiler enthalten. *H. J. Kanold.*

Kanold, Hans-Joachim: Über die Dichten der Mengen der vollkommenen und der befreundeten Zahlen. Math. Z. 61, 180—185 (1954).

Verf. beweist — im wesentlichen auf elementarem Wege — u. a. die folgenden Sätze. (1) \mathfrak{A} sei eine Menge natürlicher Zahlen. Unter $Q^2(a)$ verstehe man den größten quadratischen Teiler eines $a \in \mathfrak{A}$. Gilt nun $Q^2(a) \leq g(a)$ für alle $a \in \mathfrak{A}$, wobei $g(x)$ eine monotone, zugleich mit x gegen ∞ strebende Funktion ist, so besitzt \mathfrak{A} eine verschwindende natürliche Dichte. — (2) Es sei \mathfrak{M} die Menge, die aus allen befreundeten Zahlenpaaren besteht. Dann ist die obere asymptotische Dichte von \mathfrak{M} kleiner als 0,204 (hierbei wird eine bekannte numerische Abschätzung für die Dichte aller abundanten Zahlen mit herangezogen). — Schließlich wird noch auf verhältnismäßig einfache Weise gezeigt, daß die natürliche Dichte aller vollkommenen Zahlen verschwindet (was jedoch nur ein Spezialfall des bekannten allgemeineren Satzes ist, daß bereits die natürliche Dichte aller κ -vollkommenen Zahlen — d. h. $\sigma(n) = \kappa n$ — für jedes κ verschwindet). H. Ostmann.

Hornfeck, Bernhard: Ein Satz über die Primzahlmenge. Math. Z. 60, 271—273 (1954).

Eine Menge \mathfrak{M} nichtnegativer ganzer Zahlen heißt irreduzibel, wenn sie nicht (Schnirelman-)Summe $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ mit mindestens zweielementigen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ ist. \mathfrak{M} heißt totalirreduzibel, wenn auch jede zu \mathfrak{M} asymptotisch gleiche Menge $\mathfrak{M}', \mathfrak{M} \sim \mathfrak{M}'$, d. h. \mathfrak{M} und \mathfrak{M}' sind von einer Stelle an identisch, irreduzibel ist. In Hinblick auf die Vermutung, daß die Menge \mathfrak{P} aller Primzahlen totalirreduzibel ist, beweist Verf.: (1) Ist $\mathfrak{P}' \sim \mathfrak{P}$, so besitzt \mathfrak{P}' keinen Summanden mit endlich vielen Elementen. (2) Einen Summanden mit unendlich vielen Elementen besitzt \mathfrak{P}' dann nicht, wenn die folgende Primzahlhypothese richtig ist: Es seien $b_0 = 0 < b_1 < b_2 < \dots < b_k$ ganze Zahlen. Für die Anzahl K derjenigen Zahlen $p \leq x$, für die alle $p + b_\kappa$ ($\kappa = 0, 1, \dots, k$) Primzahlen sind, gelte in der — bereits gesicherten (Knödel, dies. Zbl. 42, 42) — Formel $K = c(k) \cdot \prod_{s=1}^{\infty} (1 - p_s^{-1})^{v_s - k} x \log^{-k} x$ (v_s = Anzahl der mod p_s inkongruenten Lösungen von $\prod_{\kappa=1}^k (z + b_\kappa) = 0 \pmod{p_s}$), daß aus $b_k < \text{const}^k$ noch $c(k) = O(1)$ folgt. — Verf. hielt, wie er in einer Berichtigung mitteilt, diese Hypothese irrtümlicherweise bereits für gesichert. H. Ostmann.

Lorentz, G. G.: On a problem of additive number theory. Proc. Amer. math. Soc. 5, 838—841 (1954).

Verf. beantwortet eine von P. Erdős aufgeworfene Frage, indem er folgenden Satz beweist: Zu jeder unendlichen Menge \mathfrak{A} nichtnegativer ganzer Zahlen gibt es Mengen \mathfrak{B} nichtnegativer ganzer Zahlen, so daß die natürliche Dichte $\delta_*(\mathfrak{B}) = 0$ ist und die (Schnirelmann-)Summe $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ von einer Stelle an alle natürlichen Zahlen enthält. Genauer gilt $B(n) = O\left(\sum_{k=1}^n \frac{\log A(k)}{A(k)}\right)$. Dem — elementar geführten — Beweis entnimmt Verf. noch folgenden Satz: Sind a_1, a_2, \dots, a_l paarweise inkongruente Reste mod n , so gibt es Reste b_1, b_2, \dots, b_k derart, daß jeder Rest mod n kongruent $a_i + b_j$ für gewisse i, j ist und daß $k = O(n l^{-1} \log l)$ gleichmäßig für alle n, l gilt. H. Ostmann.

Zulauf, Achim: Über die Darstellung natürlicher Zahlen als Summen von Primzahlen aus gegebenen Restklassen und Quadraten mit gegebenen Koeffizienten. II. Die singuläre Reihe. III. Resultate für „fast alle“ Zahlen. J. reine angew. Math. 193, 39—53, 54—64 (1954).

Verf. führt die in Teil I seiner Arbeit (s. dies. Zbl. 55, 39) begonnenen Untersuchungen hinsichtlich der Darstellbarkeit natürlicher Zahlen n in der Form $(1) n = \sum_{\sigma=1}^s p_\sigma + \sum_{\tau=1}^t b_\tau g_\tau^2$ (p_σ ungerade Primzahlen $= a_\sigma(K_\sigma)$, g_τ lediglich ganze Zahlen; $a_\sigma, K_\sigma, b_\tau$ gegebene natürliche Zahlen mit $(a_\sigma, K_\sigma) = 1$; $s \geq 1, t \geq 0$) fort, indem er über die singuläre Reihe $\mathfrak{Z}(n)$ in seiner Formel für die Kompositions-

anzahl von (1) unter der Voraussetzung $s + t/2 \geq 2$ nachweist, daß sie für alle „zulässigen“ n gleichmäßig positiv ist: $|\mathfrak{L}(n)| \geq C > 0$, so daß alle hinreichend großen zulässigen n in der Gestalt (1) darstellbar sind. „Zulässig“ heißen dabei alle n , die gewisse, zum Teil unmittelbar einsichtige Nebenbedingungen erfüllen

(z. B. $n \equiv \sum_{\sigma=1}^s a_{\sigma}(G)$, $G = (K_1, \dots, K_s, b_1, \dots, b_t)$; für nicht zulässige n ist die Kompositionsanzahl Null oder das Problem reduziert sich auf den Fall $s = 1$). — In III wird der Fall $s + t/2 = 2$ behandelt (also $s = 2, t = 0$ bzw. $s = 1, t = 2$). Die jetzt in der Formel für die Kompositionsanzahl auftretende singuläre Reihe ist für alle zulässigen n zumindest noch positiv, und die Formel selbst gilt für fast alle natürlichen n (d. h. mit Ausnahme einer Menge der natürlichen Dichte Null). H. Ostmann.

Nicol, C. A. and H. S. Vandiver: A von Sterneck arithmetical function and restricted partitions with respect to a modulus. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **40**, 825–835 (1954).

Verf. leiten in einer Reihe von Sätzen Eigenschaften der [von v. Sterneck, S.-B. Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl., Abt. II, **111**, 1567–1601 (1902), eingeführten] Funktion $\Phi(k, n) = [q(n) q(n(n, k))] \mu(n(n, k))$ ($(n, k) = g. g. T.$) ab. Es sei folgendes mit der additiven Zahlentheorie zusammenhängende Ergebnis hervorgehoben: Es ist $\frac{1}{n} \sum_{d|n} \Phi^m(d, n) \Phi\left(s, \frac{n}{d}\right) = P_n(m, s)$, worin $P_n(m, s)$ die Anzahl aller Kompositionen (d. h. Zerfällungen unter Beachtung der Reihenfolge der Summanden) der Restklasse $s \bmod n$ in genau m teilerfremde Restklassen $x_i \bmod n$ bedeutet ($n > 1, m > 0$). H. Ostmann.

Alder, Henry L.: Generalizations of the Rogers-Ramanujan identities. *Pacific J. Math.* **4**, 161–168 (1954).

The author proves

$$\prod_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1 - x^{(2k+1)\nu+k})(1 - x^{(2k+1)\nu+k+1})}{(1 - x^{(2k+1)\nu+1})(1 - x^{(2k+1)\nu+2}) \dots (1 - x^{(2k+1)\nu+2k})} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{G_{k,\mu}(x)}{(1-x)(1-x^2) \dots (1-x^{\mu})}$$

and

$$\prod_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(1 - x^{(2k+1)\nu+2}) \dots (1 - x^{(2k+1)\nu+2k-1})} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{G_{k,\mu}(x) \cdot x^{\mu}}{(1-x) \dots (1-x^{\mu})},$$

where $G_{k,\mu}(x)$ are polynomials in x . For $k = 2$ $G_{k,\mu}(x)$ reduce to x^{μ^2} and the formulas above to the Rogers-Ramanujan identities. S. Selberg.

Sandham, H. F.: Some infinite series. *Proc. Amer. math. Soc.* **5**, 430–436 (1954).

Verf. verallgemeinert eine Reihe von Identitäten unendlicher Reihen, die von Ramanujan angegeben wurden. Spezialfälle hiervon wurden früher von Watson [*J. London math. Soc.* **3**, 216–225 (1928)], Hardy [*J. London math. Soc.* **3**, 238–240 (1928)] und Verf. (dies. Zbl. **38**, 212) bewiesen. Beispiel: Für $m \geq 0$ gilt $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^{4m+1}}{e^{\pi(2n+1)} + 1} = \frac{1}{2} \frac{B_{4m+2}}{(4m+2)!} (2^{4m+1} - 1)$ (B Bernoullische Zahl). Die Methode beruht auf der Transformation gewisser Partialbruchentwicklungen. H.-E. Richert.

Ward, Morgan: Cyclotomy and the converse of Fermat's theorem. *Amer. math. Monthly* **61**, 564 (1954).

The following theorem was stated without proof by A. Hurwitz (Mathematische Werke, vol. 2, p. 747): Let $Q_n(x)$ denote the cyclotomic polynomial of order n and degree $\varphi(n)$. Then n is a prime number if there exists an integer a such that $Q_{n-1}(a) \equiv 0 \pmod{n}$. The author shows that this theorem is a simple consequence of the converse of Fermat's theorem. W. Ljunggren.

Vandiver, H. S.: New types of trinomial congruence criteria applying to Fermat's last theorem. Proc. nat. Acad. Sci. USA **40**, 248—252 (1954).

Let l be an odd prime, p a prime of the form $1 + cl$ and g a primitive root of p . Let further S_m denote the set $0, 1, 2, \dots, m-1$. In a previous paper (Pearson and Vandiver, this Zbl. **52**, 278) the author considered the congruence $(1 + g^{i+cl} x + g^{j+cl} y) \pmod{p}$ for a fixed i and j , belonging to S_c and S_l respectively. Let the number of distinct sets of solutions x_1 in S_c and x_2 in S_l of (1) be denoted by (i, j) . Suppose that the prime ideal \mathfrak{p} in $K(\exp 2\pi i/l)$, dividing the ideal (p) , belongs to an exponent — in a sense defined — which is prime to l . The main theorem of this paper is as follows. If $(2) x^l + y^l + z^l = 0$ is satisfied in non-zero integers x, y, z one of which is divisible by l , and if $xyz \not\equiv 0 \pmod{p}$, then there are integers i and j such that $(i, j) = l$. Since $\sum_{j=0}^{l-1} (i, j) < l$, the criterion $(i, j) = l$ seems to be a very strong one. However, simple examples show that it is not strong enough to cover all cases. In a later paper the author will give a companion theorem to the proposition given here, but which refers to the first case of Fermat's last theorem.

W. Ljunggren.

Vandiver, H. S.: The relation of some data obtained from rapid computing machines to the theory of cyclotomic fields. Proc. nat. Acad. Sci. USA **40**, 474—480 (1954).

In einer früheren Arbeit hatten D. H. Lehmer, E. Lehmer und der Verf. (dies. Zbl. **55**, 40) unter Verwendung von Rechenautomaten (SWAC) den sogenannten zweiten Fall bez. des Fermatproblems weiterbehandelt. Verf. führt jetzt aus, daß eine Analyse der Tabellen zu neuen Gesichtspunkten Anlaß gab. Bei den bislang untersuchten Primzahlen $p < 2003$ erweisen sich mehr Primzahlen als regulär (184), weniger als irregulär (118); die bisher vermutete Endlichkeit aller regulären Primzahlen wird also zumindest nicht weiter suggeriert. Ferner gibt es unter den irregulären Primzahlen $p < 2003$ keine, so daß der zweite Klassenzahlfaktor durch p teilbar ist, wodurch es Verf. gerechtfertigt scheint, diese Körper näher zu untersuchen, was überdies, wie Verf. an einigen Relationen dartut, Vereinfachungen in der Beweisführung gegenüber dem allgemeinen Fall mit sich bringt.

H. Ostmann.

Vandiver, H. S.: Examination of methods of attack on the second case of Fermat's last theorem. Proc. nat. Acad. Sci. USA **40**, 732—735 (1954).

In einer früheren Arbeit hatten D. H. Lehmer, E. Lehmer und der Verf. (dies. Zbl. **55**, 40) unter Einsatz eines Rechenautomaten (SWAC) die Fermatsche Vermutung im zweiten Fall für alle Exponenten $p < 2003$ nachgewiesen. Unter erneuter Heranziehung dieses Automaten ist, wie Verf. mitteilt, obiges Resultat auf $p < 2521$ verbessert worden. Folgende numerische Daten ergaben sich zugleich mit: Zu den bisher bekannten regulären Primzahlen sind 39 neue, zu den irregulären 26 neue hinzugekommen; insgesamt sind damit 223 Primzahlen $p < 2521$ regulär, 144 irregulär (d. s. etwa 40%). Für keine Primzahl $p < 2521$ ist der Irregularitätsgrad [d. h. die Anzahl der Zähler der ersten $(p-3)/2$ Bernoullischen Zahlen, die durch p teilbar sind] größer als 3. Ferner ist für keine der Primzahlen $p < 2521$ der zweite Klassenzahlfaktor durch p teilbar, d. h. alle diese Primzahlen sind „eigentlich irregulär“.

H. Ostmann.

Alder, H. L.: Note concerning a method for finding primes. Amer. math. Monthly **61**, 698 (1954).

Grant, Harold S.: The prime number theorem. Scripta math. **20**, 235—236 (1954).

Ward, Morgan: The maximal prime divisors of linear recurrences. Canadian J. Math. **6**, 455—462 (1954).

A prime p is called of order s for a sequence (w) satisfying $f(E)w_n = 0$ [here

$f(E)$ is a polynomial of degree r in the shiftoperator E] if there exist s but not $s + 1$ consecutive elements of (w) which are divisible by p . A prime is called maximal for (w) if $s = r - 1$. The rank c of a prime p for a polynomial $f(E)$ is the smallest positive integer c for which an integer C exists such that $E^c = C \pmod{f(E), p}$. The author proves the following extension of a theorem of Marshall Hall (this Zbl. 16, 154) on maximality of primes: Let $f(E)$ have r distinct roots $\alpha_1, \dots, \alpha_r$. Put

$$w(z) = \frac{f(z) - f(E)}{z - E} w_0; \quad g(z) = \prod_{e=1}^r (z - w(\alpha_e)); \quad w_n = \sum_{e=1}^r \beta_e \alpha_e^n.$$

Let p be a prime not dividing $\prod_{e=1}^r \alpha_e \beta_e \prod_{\substack{\sigma, \tau=1 \\ \sigma \neq \tau}}^r (\alpha_\sigma - \alpha_\tau)^2$. Then if p is a maximal

divisor of the sequence (w) , its rank for $g(E)$ divides its rank for $f(E)$. This condition is also sufficient for maximality of p if moreover one has $2 \nmid r$; $(p-1, r) = 1$; $f(z)$ is irreducible mod p . Remark: For convenience here the notation used in the paper has been somewhat shortened by introducing the shiftoperator E .

H. J. A. Duparc.

Prachar, K.: Über ein Resultat von A. Walfisz. Monatsh. Math. 58, 114--116 (1954).

Let $f(x)$ be a ultimately monotonic increasing function, and $f(x) \rightarrow \infty$, $\log x/f(x) \rightarrow \infty$ as $x \rightarrow \infty$. Let $s(x)$ be the number of primes $p \leq x$ such that every number q satisfying $|q - p| \leq \log p$ $f(p)$ is not a prime. Then $s(x) \sim x \log x$. The proof of the author is a refinement of that of Walfisz (this Zbl. 50, 272), who proved the previous result with $f(x) = (\log \log \log x)^2$.

L. K. Hua.

Iseki, Kanesiroo: On the divisor-problem generated by $\zeta^a(s)$. Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. 4, 175 (1954).

Es wird das verallgemeinerte Dirichletsche Teilerproblem $D_\alpha(x) = \sum_{n \leq x} d_\alpha(n)$ ($x > 0$)

für $\alpha > 0$ untersucht $\left[\zeta^\alpha(s) = \sum_{n=1}^{\infty} d_\alpha(n) n^{-s}, \zeta(s) \text{ Riemannsche Zetafunktion} \right]$ und bewiesen, daß folgende asymptotische Beziehung besteht:

$$D_\alpha(x) \sim (1/\Gamma(\alpha)) x (\log x)^{\alpha-1} \quad \text{für } x \rightarrow \infty.$$

H. Unger.

Cohn, Harvey: A periodic algorithm for cubic forms. II. Amer. J. Math. 76, 904--914 (1954).

The author continues the discussion of the algorithm introduced earlier (this Zbl. 47, 48).

J. W. S. Cassels.

Davenport, H. and G. L. Watson: The minimal points of a positive definite quadratic form. Mathematika, London 1, 14--17 (1954).

Es seien $q(x) = q(x_1, \dots, x_n)$ eine positiv definite quadratische Form in n Variablen und S_1, \dots, S_n ihre sukzessiven Minima. Es gibt immer n linear unabhängige Gittervektoren ξ_1, \dots, ξ_n , so daß $S_j = q(\xi_j)$ ($j = 1, \dots, n$), welche aber nicht eindeutig bestimmt sind. Das gleiche gilt dann für die natürliche Zahl $N = |\text{Det}(\xi_1, \dots, \xi_n)|$. Es sei nun $N(q) = \text{Min } N$, $N'(q) = \text{Max } N$. Aus den Untersuchungen von Minkowski folgt implizit (die Verff. führen den Beweis dafür aus), daß $N'(q) \leq \gamma_n^{n/2}$ (γ_n Hermitesche Konstante). Die Verff. schätzen nun $N(q)$ nach unten ab, indem sie zeigen: Es gibt für jedes n stets eine Form q in n Variablen mit $N(q) \geq \pi^{-n/2} \Gamma(1 + n/2)$. Damit ist gezeigt, daß die obere Abschätzung nicht allzuviel verbessert werden kann.

E. Hlawka.

Chalk, J. H. H.: On the primitive lattice points in the region $(x + cy)^2 \leq 1$. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 5, 203--211 (1954).

It was remarked in the review, the proofs of an earlier paper (J. H. H. Chalk, this Zbl. 46, 44) were incomplete. It turns out that, in fact, one of the results was false. Instead the author proves: let $L_1 = \alpha x + \beta y$, $L_2 = \gamma x + \delta y$ be two

forms with $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Then for any constant C there is a coprime pair of integers (x, y) such that $|(L_1 + c)L_2| \leq (1 + 2^{-1/2})|c|$. The sign of equality is required only for forms equivalent to $L_1 + c = y + (1 + 2^{-1/2})$, $L_2 = x + (2^{1/2} - 1)y$. For any $\delta \neq 0$ there are infinitely many pairs of forms such that $|(L_1 + c)L_2| \geq (1 + 2^{-1/2} - \delta)|c|$ for all coprime integers (x, y) ; and indeed with irrational α, β .

J. W. S. Cassels.

Müller, Claus: Eine Erweiterung der Hardyschen Identität. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **19**, 66—76 (1954).

Verf. zeigt mit Hilfe potentialtheoretischer Methoden folgende Verallgemeinerung der Hardyschen Identität:

$$e^{2\pi i a \eta} \sum_{\substack{\mathfrak{h} + \mathfrak{a} \leq R}} e^{2\pi i \mathfrak{h} \eta} = \lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{gR} \sum_{\substack{\mathfrak{h} + \mathfrak{a} \leq R}} e^{2\pi i a \eta} \frac{L_{\eta}(2\pi R|\eta - \mathfrak{g}|)}{|\eta - \mathfrak{g}|}$$

(a, η feste reelle Vektoren in der Ebene, $R > 0$; \mathfrak{g} durchläuft die Vektoren eines zweidimensionalen Gitters, \mathfrak{h} ebenso die Vektoren des zugehörigen reziproken Gitters \mathfrak{H} ; $g^{-1/2}$ ist der Flächeninhalt eines Fundamentalbereiches von \mathfrak{H} ;

$$|\mathfrak{h} + \mathfrak{a}| \leq R \text{ bedeutet } = \left| \mathfrak{h} + \mathfrak{a} \right| \leq R - \frac{1}{2} \left| \mathfrak{h} + \mathfrak{a} \right| = R).$$

Die Hauptschwierigkeit liegt natürlich in dem Nachweis, daß der Limes rechts existiert.

E. Hlawka.

Wolff, Karl H.: Über kritische Gitter im vierdimensionalen Raum (R_4). Monats. Math. **58**, 38—56 (1954).

In her thesis E. Brunngraber (Wien, 1944) has shown that, if Λ is a critical lattice of a convex symmetrical body K in 4-dimensional space, then it is possible to choose a coordinate system, so that the points $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ form a basis of Λ , while the first three of these points, together with at least one of the points $p_1 = (0, 0, 0, 1)$, $p_2 = (0, 1, 1, 2)$, $p_3 = (1, 1, 1, 2)$, $p_4 = (1, 1, 1, 3)$, $p_5 = (1, 1, 2, 4)$, $p_6 = (1, 2, 2, 5)$, lie on the boundary of K . The author gives another proof of this result. He is then able to list, in each of the cases $k = 1, 2, \dots, 6$, a finite number of points with integral coordinates, having the property, that, if none of these points lie in a convex symmetrical body with e_1, e_2, e_3, p_k on its boundary, then no point with integral coordinates, other than the origin, lies in the body. This extends to 4-dimensions classical results of Minkowski [Nachr. Ges. Wiss. Göttingen **1904**, 311—355 (1904)] proved in explicit form only in 2 and 3 dimensions. The method is applied, in a refined form, to the example when K is a sphere; and the critical lattices are completely determined in this case.

C. A. Rogers.

Davenport, H.: Simultaneous Diophantine approximation. Mathematika, London **1**, 51—72 (1954).

Verf. zeigt folgenden wichtigen Satz: Es gibt eine Konstante c und zu ihr eine Menge von Paaren irrationaler Zahlen (θ, q) von der Mächtigkeit des Kontinuums, mit der Eigenschaft, daß für alle Paare rationaler Zahlen (p, r, q, r) entweder $|\theta - p/r| > c/r^{3/2}$ oder $|q - q/r| > c/r^{3/2}$ gilt. Die Existenz von Zahlenpaaren (θ, q) folgt bereits aus den klassischen Untersuchungen von O. Perron. Das Hauptgewicht liegt in der Aussage über die Mächtigkeit (im Falle einer Irrationalzahl ist diese Aussage längst bekannt und kann mit Hilfe der Theorie der Kettenbrüche sofort eingesehen werden). Aus ihr folgt natürlich, daß es auch Paare (θ, q) gibt, wo beide Zahlen transzendent sind. Nach dem Übertragungssatz genügt es, den behaupteten Satz für das polare Problem zu zeigen, also die Existenz eines c_2 und einer Menge von Paaren (θ, q) von gleicher Mächtigkeit zu zeigen, für die für alle ganzen Zahlen p, q, r ($p^2 + q^2 > 0$) $(p^2 + q^2)|\theta p + \varphi q + r| > c_2$. Der Beweis zeigt, daß man $c_2 = 1/200$ nehmen kann. Da jetzt die Theorie der Kettenbrüche nicht zur Verfügung steht, ist der Beweis viel schwieriger zu führen.

E. Hlawka.

Bambah, R. P.: Four squares and a k -th power. *Quart. J. Math., Oxford II. Ser.* 5, 191—202 (1954).

A proof of the following theorem: „Let $\lambda_1, \dots, \lambda_4, \mu$ be real numbers $\neq 0$ not all of the same sign, and such that at least one ratio λ_r/λ_s is irrational, and let k be a positive integer. Then a constant $\gamma = \gamma(\lambda_1, \dots, \lambda_4, \mu) > 0$ exists, as follows: There are arbitrarily large P for which the inequalities $1 \leq x_1, \dots, x_4 \leq P^k$, $1 \leq x_5 \leq P^2$, $\left| \sum_{r=1}^4 \lambda_r x_r^2 + \mu x_5^k \right| < 1$ have more than γP^{2k+2} integral solutions“.

For this result, compare S. Chowla, this Zbl. 10, 8; H. Davenport and H. Heilbronn, *J. London math. Soc.* 21, 185—193 (1946); and G. L. Watson, this Zbl. 50, 47. K. Mahler.

Hanson, H. A.: Some relations between various types of normality of numbers. *Canadian J. Math.* 6, 477—485 (1954).

In the first part the author discusses the various definitions of „normality“ of a real number expressed in some „decimal“ scale and gives some easy consequences. The deepest is that if a_n is an increasing sequence of positive integers almost all being (k, ε) -normal for any given k, ε (in the sense of Besicovitch, this Zbl. 9, 200)

then the sequence $a_1 a_2 \dots a_n \dots$ is normal provided that $v_n = O\left(n^{-1} \sum_{i=1}^n v_i\right)$ where v_n is the number of digits in a_n . In the second part the author defines a „decimal“ to be quasi-normal if for every arithmetic progression the digits whose indices are in the progression have equal asymptotic density. Normality clearly implies quasi-normality; but an ingenious example shows that quasi-normality need not imply normality. J. W. S. Cassels.

Analysis.

● **Quinet, J.:** Cours élémentaire de mathématiques supérieures. I: Compléments d'algèbre. Les dérivées et leurs applications. (Bibl. de l'enseignement technique.) Nouveau Tirage. Paris: Dunod 1952. 164 p., 64 fig.

● **Quinet, J.:** Cours élémentaire de mathématiques supérieures. II: Développements en série. Calcul des imaginaires. Calcul différentiel et applications. (Bibl. de l'enseignement technique.) Nouveau Tirage. Paris: Dunod 1952. 222 p., 40 fig.

● **Quinet, J.:** Cours élémentaire de mathématiques supérieures. IV: Suite de calcul intégral et applications. (Bibl. de l'enseignement technique.) Paris: Dunod 1952. 150 p., 98 fig.

● **Quinet, J.:** Cours élémentaire de mathématiques supérieures. V: Les équations différentielles et leurs applications. (Bibl. de l'enseignement technique.) Paris: Dunod 1952. 198 p., 58 fig.

● **Quinet, J.:** Cours élémentaire de mathématiques supérieures. VI: Géométrie analytique plane et applications diverses. (Bibl. de l'enseignement technique.) Paris: Dunod 1954. 271 p.

(Für Band III, Calcul intégral et premières applications, vgl. dies. Zbl. 46, 281). Das sechs Bände umfassende Werk ist aus Vorlesungen über Höhere Mathematik hervorgegangen, die Verf. an der École centrale de télégraphie sans fil zu Paris gehalten hat. Nachstehend kurze Inhaltsangaben der einzelnen Bände: I. Ergänzungen zur Algebra, Determinanten, Exponential- und Logarithmusfunktion, Berechnung und Verwendung der Ableitungen, Kurvendiskussion, Anwendungen auf Optik, Elektrodynamik u. a.; II. Reihenentwicklungen, Formeln von Taylor und Maclaurin, Elemente der Reihenlehre, Rechnen mit komplexen Zahlen, das Differential und seine Anwendungen, Funktionen von mehreren Veränderlichen mit Anwendungen, Krümmung von Kurven; IV. Trägheitsmomente, Fouriersche Reihen mit Beispielen, verschiedene Anwendungen der Integralrechnung, Linienintegrale, Integration totaler Differentiale, mehrfache Integrale mit Anwendungen. V. Gewöhnliche Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung mit zahlreichen Beispielen aus den Anwendungen, Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen, partielle Differentialgleichungen mit Anwendungen, Theorie des Potentials und der Felder. VI. Ebene analytische Geometrie, Geradengleichung, Kegelschnitte mit Beispielen und

Anwendungen, Parameterdarstellung von Kurven, implizite Funktionen. — Die Darstellung wendet sich in erster Linie an Ingenieurstudenten und vermittelt in leicht faßlicher und klarer Weise den Formelschatz der Infinitesimalrechnung. Zahlreiche bis ins einzelne durchgerechnete Beispiele, von denen ein großer Teil der Mechanik und Elektrodynamik entnommen ist, sollen zeigen, wie wertvoll das „Werkzeug“ Mathematik für den Ingenieur ist, daß der Mathematikunterricht an den Hochschulen nicht nur dazu dient, den Geist auszustaffieren und Prüfungen zu bestehen, sondern daß die Mathematik eine der Grundlagen der Ingenieurwissenschaften ist. In der Absicht, ein Lehrbuch zu schreiben, welches die bekannten Schwierigkeiten des Unterichts in der Höheren Mathematik umgehen will, hat Verf. sich wohl etwas weit von der Auffassung des Mathematikers entfernt. Trotzdem wird das Werk in Ingenieurkreisen einen großen Leserkreis ansprechen und eine freundliche Beurteilung finden. Sicherlich wird aber auch mancher junge Leser, der bei der Lektüre dieses Buches erstmals Bekanntschaft mit der Infinitesimalrechnung macht, ein gewisses Gefühl des Unbehagens nicht los werden. Er wird, sei es um sein mathematisches Gewissen zu beruhigen oder seinen Kenntnisdrang zu befriedigen, nach einem der klassischen Lehrbücher der Analysis greifen.

W. Quade.

● Godeaux, Lucien: *Analyse mathématique. Vol. I: Calcul différentiel, calcul intégral, séries.* 2^e éd. Liège: Sciences et Lettres 1954. 373 p. 44 fig. 400 frs.

● Maxwell, E. A.: *An analytic calculus. Vol. I.* London: Cambridge University Press. 1954. IX, 165 p. \$ 2,75.

● Maxwell, E. A.: *An analytic calculus. Vol. II.* London: Cambridge University Press 1954. VI, 272 p. \$ 3,50.

● Begle, Edward G.: *Introductory calculus with analytic geometry.* New York: Henry Holt 1954. X, 304 p. \$ 4,50.

● Korowkin, P. P.: *Ungleichungen.* (Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik. IV.) Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1954. 56 S.

Der Stoff betrifft elementare Ungleichungen der algebraischen Analysis, insbesondere zwischen einfachen Mittelwerten, ferner solche Ungleichungen, welche mit der Bestimmung von Extrem- und Grenzwerten zusammenhängen, und ist angeordnet in 4 Sätzen und 61 Aufgaben mit Beweisen und Lösungen. Die Sammlung ist sehr gut geeignet, dem Anfänger die für jeden weiteren Fortschritt in der Analysis unentbehrliche Vertrautheit mit dem scharfen Instrument der Ungleichungen zu vermitteln.

G. Aumann.

Mengenlehre:

Ellis, David: *On infinite series of sets.* Proc. Glasgow math. Assoc. 2, 89—92 (1954).

Let AB and $A \cdot B$ denote respectively the intersection and the symmetric difference of sets A, B . We write $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ if $A = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n)$, where „lim“ is taken in the sense of the General Theory of Sets. The author proves the following almost obvious theorems: The series $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ converges if and only

if $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0$. In order that the series $\sum_{n=1}^{\infty} X_n \cdot A_n$ (where $\{A_n\}$ is a fixed sequence of subsets of a space S) converge for every sequence $\{X_n\}$ of sets, and that every set $S_0 \subset S$ be the sum of this series for a suitable sequence $\{X_n\}$, it is necessary and sufficient that, for every $x \in S$, the set $\{n: x \in A_n\}$ be non-empty and finite.

The series $\sum_{n=1}^{\infty} ((A_n \cdot B_n) \cdot X \cdot B)$ converges for each set X if and only if $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$.

R. Sikorski.

Schmidt, Jürgen: *Abgeschlossenheits- und Homomorphiebegriffe in der Ordnungstheorie.* Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin 3 (1953—54), 223—225 (1954).

Einige einfache Bemerkungen über ordnungstreue Abbildungen einer (teilweise) geordneten Menge in eine andere (Vortrag, gehalten auf der Tagung der Deutsch. Math.-Verein. im September 1953).

G. Nöbeling.

Botts, Truman: On lattice embeddings for partially ordered sets. Canadian J. Math. 6, 525—528 (1954).

Proof of this embedding theorem: any ordered set $(S; \leq)$ is isomorphically embeddable into the set $(K; \supseteq)$ consisting of all the terminal portions of S ; this embedding preserves all suprema that exist in $(S; \leq)$ but does not preserve, in general case, the infima that exist in $(S; \leq)$. As $(K; \supseteq)$ is a complete distributive lattice, the author proves so this corollary of MacNeille (this Zbl. 17, 339): $(S; \leq)$ is embeddable in a complete distributive lattice preserving suprema. The above theorem is applied to the lattice $L_A(M)$ of all the additive topologies on a given set M i.e. of all the closure structures C on M such that: $C(0) = 0$, $C(X \cup Y) = CX \cup CY$, $X \subseteq CX$. G. Kurepa.

Benado, Mihail: Les ensembles partiellement ordonnés et le théorème de raffinement de Schreier. I. Czechosl. math. J. 4(79), 105—128 und russische Zusammenfassung. 128—129 (1954).

L'article se rattache aux recherches de Schreier [Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 6, 300—302 (1930)], Kuroschi [ce Zbl. 10, 343], Uzkov [ce Zbl. 20, 206] etc. et fait suite à quelques considérations antérieures de l'A. [ce Zbl. 37, 157; 45, 159]. Le but principal c'est de trouver une condition suffisante — condition H ci-après — permettant d'énoncer le th. de Schreier dans un ensemble ordonné $P = (P, \geq)$ et non seulement dans un treillis. Voici d'abord quelques définitions. Si $a, b \in P$ et $a \geq b$, le segment $[a, b]$ est noté aussi $a \cdot b$ et appelé le quotient $a \cdot b$. Le quadrilatère (de Dedekind) dans P est chaque couple de chaînes de ≤ 3 éléments, les deux chaînes $\Omega \geq a \geq \omega$, $\Omega \geq b \geq \omega$ ayant les extrémités communes: il est désigné par $(\Omega, \omega; a, b)$; il est dit „à côtés opposés semblables“, si l'une des 4 conditions que voici est vérifiée: 1. $\Omega > a, b > \omega$; $\Omega > b, a > \omega$; 2. $\Omega > a, b > \omega$; $\Omega = b, a = \omega$; 3. $\Omega = a, b = \omega$; $\Omega > b, a > \omega$; 4. $\Omega = a, b = \omega$; $\Omega = b, a = \omega$. Si $M \leq \Omega, d \geq \omega$, le quadrilatère $(M, d; a, b)$ est dit un sousquadrilatère de $(\Omega, \omega; a, b)$. Deux ensembles ordonnés P, P' (distincts ou non) sont dit „reliés par une connexion monotone“ s'il existe: un procédé χ faisant correspondre à tout $p \in P$ un ensemble non vide $\chi(p) \subseteq P'$ et un procédé q tel que $0 = q(p') \subseteq P (p' \in P')$ et que les conditions A et B soient satisfaites: A. pour chaque $(p_1 \geq p_2) \in P$ et chaque $q'_2 \in \chi(p_2)$ il y a un $q'_1 \in \chi(p_1)$ tel que $q'_1 \geq q'_2$, et pour chaque paire $(p'_1 \geq p'_2) \in P'$ et chaque $q_1 \in \varphi(p'_1)$, il y a $q_2 \in \varphi(p'_2)$, $q_1 \geq q_2$. B. Si $p \in P$, $q' \in \chi(p)$, il y a un $p \in \varphi(q')$ tel que $p \leq p$. Si $p' \in P'$, $q \in \varphi(p')$, il y a un $p' \in \chi(q)$ tel que $p' \geq p'$. Dans ces conditions l'A. écrit (1) $P \rightleftharpoons P' \bmod \chi, q$. Si de plus pour chaque $p \in P$ et chaque $q' \in \chi(p)$ on ait $p \in q(q')$, l'A. écrit (2) $P \rightleftharpoons P' \bmod \chi, q$; pareillement, l'A. définit (3) $P \rightleftharpoons P' \bmod \chi, q$. La connexion monotone (1) est parfaite, $P \rightleftharpoons P' \bmod \chi, q$ si (2) et (3). P est un espace \perp , $P \in \perp$ si à chaque quadrilatère à côtés opposés semblables $(\Omega, \omega; a, b)$ on fait correspondre aux quotients $\Omega/a, b/\omega$ de celui-ci un ensemble Γ (resp. Γ_0) de couples d'opérations (univoques) (χ, q) et aux quotients $\Omega/b, a/\omega$ un ensemble $\tilde{\Gamma}$ (resp. $\tilde{\Gamma}_0$) de couples d'opérations (univoques) $(\tilde{\chi}, \tilde{q})$ de manière que $\Omega/a \rightleftharpoons b/\omega \bmod \chi, q$, $\Omega/b \rightleftharpoons a/\omega \bmod \tilde{\chi}, \tilde{q}$ et que de plus: A*. Si $(\chi, q) \in \Gamma$, alors il existe $p'_a \in \chi(a)$, $p_b \in \varphi(b)$ vérifiant $p'_a = \omega$, $p_b = \Omega$. B*. Si $(\tilde{\chi}, \tilde{q}) \in \tilde{\Gamma}$, il y a $q'_b \in \tilde{\chi}(b)$, $q_a \in \tilde{q}(a)$ vérifiant $q'_b = \omega$, $q_a = \Omega$. C*. Les systèmes $\Gamma, \tilde{\Gamma}$ sont maximaux relativement à A*, B*. Enfin, $P \in H$ c'est-à-dire P vérifie H si $P \in \perp$ et s'il existe un $\omega_0 \in P$ tel que dans chaque quadrilatère $(\Omega, \omega_0; a, b)$ il y ait un sous-quadrilatère $(M, d; a, b)$ à côtés opposés semblables de manière que les systèmes $X = \Gamma_0(M/a, b/d)$, $Y = \tilde{\Gamma}_0(M/b, a/d)$ jouissent de la propriété H que voici: Il existe $(\chi, \varphi) \in X$, $(\tilde{\chi}, \tilde{\varphi}) \in Y$ tels que $M/a \rightleftharpoons b/d \bmod \chi, \varphi$, $M/b \rightleftharpoons a/d \bmod \tilde{\chi}, \tilde{\varphi}$. Si pour chaque $\omega_0 \in P$ on a la propriété H, P est dit un espace \perp modulaire. Voici le th. principal (Th. 3. 1): Si $P \in \perp$ et $P \in H$, alors deux chaînes finies quelconques dans P aux

Zahl $\nu < \Omega$ begrenzt ist, bildet die Menge D der Endpunkte aller Intervalle $s(\Sigma_{\nu+1})$ zusammen mit der obengenannten Menge U eine abzählbare Teilmenge $D \cup U$ von E ; jeder Punkt von $L = E - D$ ist beiderseitiger Limes von $D \cup U$ in E , woraus folgt, daß L und daher auch E linear ist. Mittels der genannten Hypothese ist somit das Suslinsche Problem bejahend gelöst. — Läßt man diese Hypothese beiseite und läßt man einer nicht linearen Menge E die Eigenschaft (S) zukommen, so enthält E nach Abspaltung einer linearen Teilmenge eine stetige Teilmenge C , von der kein echtes Stück linear ist. Wendet man auf ein solches C das vorhin beschriebene Zerlegungsverfahren an, so erhält man eine Reihe von „notwendigen“ Eigenschaften von C , die indessen auch solchen Mengen zukommen können, welche nicht die Suslinsche Eigenschaft aufweisen; Verf. gibt ein Beispiel für eine derartige Menge. Sind alle Mengen mit den „notwendigen“ Eigenschaften vom selben Typus? Wenn ja, so sind die Mengen mit der Eigenschaft (S) linear. Ein naheliegender Versuch, die gestellte Frage zu beantworten, scheitert an einem allgemeinen Satz über die Ordnungszahlen $< \Omega$ (er findet sich auch in der Note des Verf., dies. Zbl. 51, 290). — Im vierten Unterabschnitt wird u. a. der Satz von Sierpinski bewiesen, daß jede unendliche geordnete Menge in eine gestufte Menge derselben Mächtigkeit eingeteilt werden kann. Hervorzuheben sind ferner die Untersuchungen über „Universalmengen“ η der Mächtigkeit \aleph_α , welche die Verallgemeinerung der Mengen η_0 vom Typ der Menge der rationalen Zahlen darstellen. Eine Menge η ist charakterisiert durch die Eigenschaft, daß je zwei Teilmengen e, e' von η mit $x \leq x'$ für $x \in e, x' \in e'$, die beide eine Mächtigkeit $< \aleph_\alpha$ besitzen, eine Zerlegung $\eta = C + e + M + e' + D$ (im ordinalen Sinne) bewirken, wo C, M und D von der Mächtigkeit \aleph_α sind. Es wird gezeigt, daß für festes α alle diese Mengen η denselben Typus aufweisen und daß zu jeder geordneten Menge η' der Mächtigkeit \aleph_α eine ähnliche Teilmenge H von η existiert. Die vom Verf. angegebene Abbildung $\eta' \leftrightarrow H \subset \eta$ wird genauer untersucht. Die kleinste η umfassende stetige Menge $V(\eta)$ hat die Mächtigkeit 2^{\aleph_α} und umfaßt eine perfekte nirgendsdichte Menge derselben Mächtigkeit. (Verf. beachtet merkwürdigerweise nicht die Unterscheidung von regulären und singulären Anfangszahlen und übersieht infolgedessen, daß man von einer Menge η nur reden kann, wenn die zu ihrer Mächtigkeit \aleph_α gehörige Anfangszahl ω_α regulär ist. Ref.)

Unter der Voraussetzung $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ zeigt Verf. im fünften Unterabschnitt, daß man eine Menge η gewinnt, indem man je zwei konsekutive Elemente der Menge $\tilde{\eta}$ identifiziert, unter $\tilde{\eta}$ die Menge der Folgen $(a_\nu)_{\nu < \omega_\alpha}$ verstanden, wobei $a_\nu \in \{0, 1\}$ gilt und es ein $\mu < \omega_\alpha$ gibt, so daß $a_\mu = 0, a_{\mu'} = 1$ für $\mu' > \mu$ oder $a_\mu = 1, a_{\mu'} = 0$ für $\mu' > \mu$ wird. — Der sechste Unterabschnitt bringt einige Ergänzungen und Berichtigungen zu den Bänden I und II des Werkes. W. Neumer.

• Denjoy, Arnaud: L'énumération transfinie. IV: Notes sur les sujets controversés. Paris: Gauthier-Villars 1954. p. 773—970. fr. 3200.

(Vgl. das vorhergehende Referat von Band III). In diesem Schlußband entwickelt Verf. in zwei Noten seinen Standpunkt zur mathematischen Grundlagendiskussion. Die erste Note beschäftigt sich mit dem Fragenkreis des Zermelosen Wohlordnungssatzes für eine beliebige Menge E , dessen Widerspruchsfreiheit Verf. akzeptiert, dessen Beweise er jedoch mit Mängeln behaftet findet, weil i. a. einerseits kein Gesetz denkbar ist, welches die Auswahl eines Elements aus jeder Teilmenge von E ermöglicht, und andererseits die Gesamtheit der zu benützenden Ordnungszahlen von unbestimmtem, möglicherweise paradoxalem Umfang ist. Ist jedoch eine „zulässige“ und „vollständige“ Gesamtheit (O) von aufeinanderfolgenden Ordnungszahlen gegeben, so ist es als möglich zu akzeptieren, aus E durch sukzessive Wahlakte eine mit (O) ähnliche wohlgeordnete Teilmenge $\{a_\nu\}$ zu ziehen, wodurch u. U. E wohlgeordnet wird. Die umfassendste, wirklich existierende Gesamtheit (O) ist die Menge der Zahlen der ersten und zweiten Zahlenklasse, während die Zahl Ω als Wohlordnungstyp un erreichbar bleibt. Zahlen und Zahlenklassen oberhalb Ω können nur „symbolisch“ definiert und dabei in gewissen Umfang für Untersuchungen innerhalb der zweiten Zahlenklasse verwendet werden. — Die einzelnen Zahlen einer beliebigen Zahlenklasse $Z(\omega_\alpha)$ lassen sich (ebenso wie die aus $Z(\Omega)$) definieren, ohne daß man ihren Rang innerhalb $Z(\omega_\alpha)$ kennt, wenn man die Menge $\Sigma = [1, \omega_\alpha)$ in eine irgendwie geordnete Menge Π permutiert. Ordnet man z. B. jedem $\beta \in \Sigma$ ein $h(\beta) \in [0, \beta)$ zu, so bestimmt die Folge der $h(\beta)$ eine Permutation Π von spezieller Art bei folgender Festsetzung: Sei $h(\beta)$ die Menge $[1, \beta]$ ($\beta \in \Sigma$), geordnet als Teilmenge von Π , und sei $b(\beta)$ der Nachfolger von β in $h(\beta)$ oder β das letzte Element von $h(\beta)$, je nachdem $b(\beta) \neq 0$ oder $= 0$ ist. Π ist genau dann wohlgeordnet, wenn jede Folge β_1, β_2, \dots mit der Eigenschaft $b(\beta_2) = \beta_1, b(\beta_3) = \beta_2, \dots$ nach endlich vielen Schritten abbricht. — Es folgen ergänzende Untersuchungen über die in Band I und II entwickelte arithmetische und geometrische Darstellung von Permutationen Π der Menge $(N) = \{1, 2, 3, \dots\}$. — Ferner wird gezeigt, daß man in der speziellen Universalmenge η (siehe Schluß des vorstehend. Referats) auch ohne die Hypothese $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ zu jeder Zahl $\tau \in Z(\omega_\alpha)$ eine wohlgeordnete Teilmenge vom Typus τ finden kann. — Die zweite Note besteht, abgesehen von der Untersu-

chung verschiedener ordinaler Definitionen der Menge (N) und der daraus abzuleitenden Eigenschaften der natürlichen Zahlen, im wesentlichen aus „Grundlagen“-Erörterungen. Die sich zunächst darbietenden mathematischen Objekte sind „denkbar“, beginnend mit „handgreiflichen“ Figuren und „kleinen“ natürlichen Zahlen, von denen man durch gewisse „vollziehbare“ Operationen zu immer komplizierteren Gebilden aufsteigt (z. B. „großen“ Zahlen wie $10^{10^{10}}$ usw.). Auf Grund gewisser allgemein faßbarer Eigenschaften der denkbaren natürlichen Zahlen wird auch die Menge (N) als ganzes („global“) denkbar, ebenso die Menge der rationalen Zahlen, ferner gewisse Arten von reellen Zahlen. Die reellen Zahlen sind „global“ denkbar auf Grund des anschaulichen Linearcontinuums. Da man in letzterem wohlgeordnete Punktfolgen von jedem denkbaren Typus $\alpha < \Omega$ angeben kann, wird auch die zweite Zahlenklasse $Z(\Omega)$ global denkbar. Ferner lassen sich allgemeinere Gebilde als denkbar gewinnen (gewisse Arten von Punktfolgen und Klassen von solchen wie gewisse Borelsche Mengen, euklidische Räume, topologische Räume, gewisse Arten von Funktionen u. dgl.). Es gibt nur „endlich“ viele denkbare mathematische Objekte; sie alle sind auf „einfache“ anschauliche Daten zurückführbar.

Umfassender als die Kategorie der denkbaren ist die Kategorie der „definierbaren“ mathematischen Objekte (obzwar offenbar immer noch „endlichen“ Umfangs). Seinen Begriff der exakten Definition erläutert Verf. u. a. an Hand einer eingehenden Analyse der Richardschen Antinomie. Unendlich ist dagegen der Bereich der schlechthin „existierenden“ mathematischen Objekte (von denen also „fast alle“ weder denk- noch definierbar sind). Zu ihnen gehören u. a. sämtliche reellen Zahlen und sämtliche Zahlen $\leq \Omega$. Ω selbst gilt nicht als existierend. Allgemein stehen außerhalb dieses Bereichs die rein axiomatisch charakterisierten, „fiktiven“ Gebilde, die nur „verbale“ Existenz besitzen, jedoch ihre Widerspruchsfreiheit vorausgesetzt, Instrumente mathematischer Untersuchungen sein können (wie gewisse Zahlen $\geq \Omega$). W. Neumer.

Neumer, Walter: Zur Konstruktion von Ordnungszahlen. I—III. Math. Z. 58, 391—413 (1953); 59, 434—454 (1954); 60, 1—16 (1954).

„Die vorliegende Abhandlung ist aus dem Versuch entstanden, ein Bezeichnungssystem zu finden, welches auch für beliebige, d. h. nicht abzählbare Ordnungszahlen die Entwicklung eines „Algorithmus“ gestattet, der von einer gegebenen Normalfunktion aus möglichst weit in die Stufenfolge der zugehörigen höheren Normalfunktionen und ihrer kritischen Zahlen hineinführt und dabei jedes Stadium durch eine bestimmte Zeichenfigur wiedergibt, die unter Umständen noch Variable für Normalfunktionen oder Ordnungszahlen enthält.“ (From the author's summary: I contains a constructive (in the Church-Kleene sense) system of notation for the ordinals belonging to a certain section of the second number class. The author asserts that the „algorithm“ described can be carried beyond this section and that it is difficult to set a bound for the process. Roughly speaking the basis of the construction is as follows: If W is any ordinal operation $x \rightarrow x W$ defined for x in a certain range and satisfying $x W > x$ then W is called an operator of the first order in this range. An operator of the second order J , is an operation $W \rightarrow W J$ which sends each operator W of the first order into another first order operator $W J$ such that $x W < x W J$. Similarly operators of the third, fourth, ... orders are defined. Exponentiation is defined by $(x I^{\beta})^{\gamma} = (x I^{\beta})^{\gamma}$, $x I^{\beta} = \lim_{\beta \rightarrow \gamma} x I^{\beta}$ for first order operators and analogously

for higher order operators. The ordinals dealt with in I are those obtainable from 1 by the operations of addition and certain special operators V, I, P, \dots of the first, second, third, ... orders respectively, and the operators obtainable from these by exponentiation. The special operators are defined thus: $x V$ is $x \omega$; I sends the first order operator W into $W I$ defined by $x W I = \lim \{ x W, x W^W, \dots \}$, P is defined similarly by $x W P = \lim \{ x W U, x W I^W U, \dots \}$ and similarly for P', \dots . In II the author deals with ordinals in the „naive“ sense and describes a corresponding „free“ (i. e. non-constructive) algorithm which still has as its aim the representation of ordinals but which allows non-effectively definable ordinals to be replaced by „variables“. In fact if any formula J (not containing the sign „ \rightarrow “) is taken which represents some ordinal of the class dealt with in I and if I is replaced by θ and V is taken to be some arbitrary first order operator then we obtain some ordinal $J(\theta)$. In general not all ordinals $< \theta V I P I' P' \dots$ can be represented by formulae $J(\theta)$ but the author proves that every ordinal of this section can be represented by similar formulae containing „variables“ x_1, \dots, x_n standing for ordinals between 1 and θV and „variables“ V_1, \dots, V_m , where $x V_i$ stands for an ordinal between x and $x V$. III contains certain rules for calculation with the free algorithm. Two constructive algorithms with basic operators V ($x V = x + 1$), W ($x W = x \cdot 2$) are considered and it is shown that each of these defines the same section of the second number class as the algorithm of I. Finally certain methods of introducing new operators are considered. In IV algorithm of I. Finally certain methods of introducing new operators are considered. In IV the author will compare the algorithm of I with that given by Ackermann and will show that the ordinals represented in Ackermann's systems are those less than the ordinal represented in I by $1 V I P I' V$. The paper is to contain five parts. J. C. Shepherdson.

Dushnik, Ben: Upper and lower bounds of order types. Michigan math. J. 2, 27—31 (1954).

Seien α und β zwei Ordnungstypen. Es gelte $\alpha \leq \beta$, wenn es eine Menge B vom Typus β gibt, die eine Teilmenge A vom Typus α enthält, und es gelte $\alpha < \beta$, wenn $\alpha \leq \beta$ ist, aber nicht $\beta \leq \alpha$. Gilt weder $\alpha \leq \beta$ noch $\beta \leq \alpha$, so heißen α und β unvergleichbar. Ist $\gamma \geq \alpha$, $\gamma \geq \beta$, so heißt γ eine obere Schranke von α und β ; γ heißt eine obere Grenze von α und β , wenn es eine obere Schranke ist und wenn aus $\delta \geq \alpha$, $\delta \geq \beta$ stets entweder $\gamma \leq \delta$ oder die Unvergleichbarkeit von γ und δ folgt. — Das Thema der Note ist der Beweis des Satzes: Sind $\alpha = \omega r + m$ und $\beta = \omega s + n$ unendliche Ordnungszahlen $< \omega^2$, so gibt es nur endlich viele obere Grenzen von α und β^* ; dies sind alle möglichen Typen der Form (1) $n + \omega^* b_1 + \omega a_1 + \dots + \omega^* b_t + \omega a_t + m$ mit $\sum_{i=1}^t a_i = r$, $\sum_{i=1}^t b_i = s$, unter t und den a_i, b_i natürliche Zahlen verstanden, welche ≥ 1 sind mit Ausnahme von b_1 und a_t , die auch Null sein dürfen. Verschiedenen Systemen $b_1, a_1, \dots, b_t, a_t$ der genannten Art entsprechen unvergleichbare Typen (1).
W. Neumer.

Specker, E.: Verallgemeinerte Kontinuumshypothese und Auswahlaxiom. Arch. der Math. **5**, 332—337 (1954).

Sei m eine Kardinalzahl. Nach einer Definition von Lindenbaum und Tarski erfüllt sie die Kontinuumshypothese $H(m)$, wenn aus $m \leq \kappa \leq 2^m$ stets entweder $\kappa = m$ oder $\kappa = 2^m$ folgt. — Verf. beweist ohne Auswahlaxiom: Für $m \geq 5$ ist nicht $m^2 \geq 2^m$. — Daraus folgt u. a. wegen $m \leq m^2$, $m \leq 2^m$ der Satz $m < 2^m$ von Cantor. Ferner folgt aus dem genannten Satz: Gelten $H(m)$ und $H(2^m)$, so ist 2^m ein Alef, und zwar gleich der Hartogsschen Funktion $\aleph(m)$. Dieses Ergebnis stellt eine gemeinsame Verschärfung zweier Sätze von Lindenbaum und Tarski dar.
W. Neumer.

Sierpiński, W.: Sur une proposition équivalente à l'existence d'un ensemble de nombres réels de puissance \aleph_1 . Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III **2**, 53—54 (1954).

Wenn man eine Funktion f kennt, welche jeder abzählbaren Menge D von reellen Zahlen eine reelle Zahl $f(D) \notin D$ zuordnet — man denke an das Cantor-Königsche Diagonalverfahren —, so läßt sich ohne Auswahlaxiom eine Menge von reellen Zahlen der Mächtigkeit \aleph_1 definieren: hiervon gilt auch die Umkehrung.

W. Neumer.

Bagemihl, F. and H. D. Sprinkle: On a proposition of Sierpiński's which is equivalent to the continuum hypothesis. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 726—728 (1954).

The authors give a strengthening and a correction of a Sierpiński's theorem and its proof respectively [cf. Hypothèse du continu (this Zbl. **9**, 302), in particular p. 12, P_3]. Combined with a result of Braun-Sierpiński (this Zbl. **5**, 195) the authors establish this theorem: Let M be a set of power 2^{\aleph_α} (α any ordinal); then $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ holds if and only if there exists in M a ω_α -sequence of single-valued functions f_τ such that for each $X \leq M$ satisfying $|X| > \aleph_\alpha$ and for every $\tau < \omega_\alpha$ except perhaps for less than \aleph_α of them one has $f_\tau(X) = M$ and that $|f_\tau^{-1}(a)| \leq \aleph_\alpha$ for each $a \in X$ [strengthening consists just in the terminal addition concerning inverse functions: the correction, for $\alpha = 0$, avoids e. g. that (cf. the book quoted above, p. 13) $\aleph_{2k}^{2k} = 2k$ for $\alpha = \omega_1$, $k < \omega_0$ and consequently $|f_{2k} M| = 1$, as should be allowable in Sierpiński's wording].
G. Kurepa.

Bagemihl, F. and P. Erdős: Intersections of prescribed power, type, or measure. Fundamenta Math. **41**, 57—67 (1954).

Das von E. Bagemihl bewiesene allgemeine Durchschnittstheorem (dies. Zbl. **46**, 280) wird nochmals verallgemeinert (Satz 1). Aus diesem Satz ergibt sich als Spezialfall u. a. ein von Sierpiński bewiesener Satz (dies. Zbl. **52**, 48), welcher

gleichzeitig von den Verff. gefunden worden war. — Die folgenden Sätze nehmen eine Orientierung jeder Geraden s der Ebene an. Satz 2. Jeder Geraden s werde ein endlicher oder abzählbarer Ordnungstypus $\tau_s \neq 0, 1$ zugeordnet. Dann gibt es eine Punktmenge P der Ebene, welche mit jeder Geraden s einen Durchschnitt vom Typus τ_s bildet. — Satz 3. Wie Satz 2, jedoch darf $\tau_s \neq 0, 1$ der Typus einer beliebigen, der Größe nach geordneten Menge reeller Zahlen sein; überdies hat $P \cap s$ stets das Maß 0. Zum Beweis wird die Hypothese $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ benutzt. — Satz 4. Jeder Geraden s werde eine reelle Zahl m_s mit $0 \leq m_s \leq \infty$ zugeordnet. Dann gibt es eine Punktmenge P derart, daß $P \cap s$ stets das Maß m_s hat. — Satz 5. Wie Satz 3, jedoch ohne Maßbedingung. Der Beweis wird ohne Kontinuumhypothese geführt unter Verwendung einer Bemerkung von K. Gödel. W. Neumer.

Erdős, Paul: Some remarks on set theory. III. Michigan math. J. 2, 51—57 (1954).

[Teil I. Ann. of Math., II. Ser. 44, 643—646 (1943); Teil II s. dies. Zbl. 39, 49.] 1. Jedem $x \in Z$ (Z die Zahlengerade) sei eine Menge $S(x) \subseteq Z$ zugeordnet mit $x \notin S(x)$. x und y heißen unabhängig, wenn $x \notin S(y)$ und $y \notin S(x)$ ist; eine Menge $E \subseteq Z$ heißt unabhängig, wenn je zwei Zahlen aus E unabhängig sind. Es sind Bedingungen für die $S(x)$ bekannt, aus denen die Existenz unabhängiger Mengen folgt (vgl. G. Grünwald, dies. Zbl. 17, 7; D. Lazar, Compositio math. 3, 304 (1946); G. Fodor, dies. Zbl. 41, 22, 42, 53). Verf. untersucht weitere Voraussetzungen über die $S(x)$ daraufhin, ob aus ihnen die Existenz unabhängiger Mengen folgt. — 2. Es existieren zwei Mengen $A_i \subseteq Z$ ($i = 1, 2$) mit $A_1 \cup A_2 = Z$ derart, daß für jedes i gilt: für jedes reelle z hat die Gleichung $x - y = z$ (x, y in A_i) weniger als c Lösungen (c die Mächtigkeit des Kontinuums). Ist 1. $A_1 \cup A_2 = Z$, 2. die Mächtigkeit von A_1 und A_2 gleich c , 3. m eine Mächtigkeit $< c$ und hat 5. für jedes reelle z die Gleichung $x + y = z$ weniger als m Lösungen x und y in A_2 , so hat für gewisse z diese Gleichung c Lösungen x und y in A_1 . G. Nöbeling.

Mardešić, Sibe: Sur les sous-espaces linéaires, singuliers par rapport à un ensemble compact. Soc. Sci. natur., Croatica, Period. math.-phys. astron., II. Ser. 9, 35—38 und serbo-kroatische Zusammenfassg. 39 (1954).

En résolvant indépendamment de S. Straszewicz (ce Zbl. 50, 56) un problème de Sierpiński (ce Zbl. 44, 46) et en généralisant le même problème, l'A. démontre le théorème que voici: L'ensemble des sous-espaces V^m de V^n singuliers par rapport à E compact $\subseteq V^n$ est au plus dénombrable. Pour $n = 2$ on a le th. de Sierpiński (l. c.). Notations: V^n étant l'espace vectoriel euclidien à n dimensions, soit E un ensemble non vide compact extrait de V^n ; si $0 \leq m \leq n$, le sous-espace V^m est dit singulier par rapport à E relativement à V^n si pour chaque variété linéaire $L = c + V^m$ ($c \in V^n$), la relation $L \cap E \neq \emptyset$ entraîne que le nombre maximum de vecteurs de $L \cap E$ linéairement indépendants soit égal à m . G. Kurepa.

Volkman, Bodo: Zwei Bemerkungen über pseudorationale Mengen. J. reine angew. Math. 193, 126—128 (1954).

Eine unendliche Menge \mathfrak{R} von natürlichen Zahlen wird rational genannt, wenn ihr Dualwert $\sum_{i=1}^{\infty} e_i 2^{-i}$, e_i charakteristische Funktion von \mathfrak{R} , rational ist. Gibt es zu einer Menge \mathfrak{L} bei jedem $\varepsilon > 0$ zwei rationale Mengen \mathfrak{R}_ε und $\mathfrak{R}'_\varepsilon$ mit $\mathfrak{R}_\varepsilon \subseteq \mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{R}'_\varepsilon$, so daß die natürliche Dichte $D^*(\mathfrak{R}'_\varepsilon - \mathfrak{R}_\varepsilon) < \varepsilon$ ausfällt, so heißt sowohl die Menge \mathfrak{L} als auch ihr Dualwert pseudorational (B. Volkman, dies. Zbl. 48, 34). Verf. beweist in Ergänzung früherer Untersuchungen u. a.: 1. Die Menge der pseudorationalen Zahlen hat die Hausdorffsche Dimension Null. 2. Die Summenmenge zweier pseudorationaler Mengen ist nicht notwendig pseudorational. H.-E. Richert.

Differentiation und Integration reeller Funktionen. Maßtheorie:

● **Natanson, I. P.:** Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen. (Mathematische Lehrbücher und Monographien. I. Abt. Band VI.) Berlin: Akademie-Verlag 1954. XI. 478 S., 9 Abb. im Text, DM 26,—.

Über Inhalt und Art des Buches in der russischen Originalausgabe wurde bereits ausführlich (dies. Zbl. 39, 282) berichtet. Die nun erschienene Übersetzung ins Deutsche ist bestens gelungen und stellt ein für Studierende vorzüglich geeignetes Lehrbuch dar, welches in die bereits klassisch gewordenen Grundbegriffe, wichtigsten Theoreme und Anwendungen der Theorie einführt. Ein ausführliches Verzeichnis der internationalen Literatur nimmt Rücksicht auf einen weiten Leserkreis.
G. Aumann.

● **Aumann, Georg:** Reelle Funktionen. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Band 68.) Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1954. VIII, 416 S. DM 56,—; Ganzleinen DM 59,60.

Um einen Gesamtüberblick über das ganze Buch zu vermitteln, werden im Folgenden zuerst die Abschnittstitel angeführt und in jedem einzelnen Abschnitt Merkmale in der Auswahl und Darstellung des Stoffes sowie in den Bezeichnungen verzeichnet. § 1. Mengen. Als einleitende Grundoperationen treten die Vereinigung $A \cup B$, der Unterschied (Diskrepanz) $A \setminus B$ und der Durchschnitt $A \cap B$ auf. Die Hausdorffschen Bezeichnungen „Ring“ und „Körper“ für Mengensysteme werden übernommen. § 2. Ordnungen. Teilweise geordnete Mengen und das MacNeillesche Vervollständigungsverfahren. Zornsches Lemma. Allgemeine Konvergenztheorie unter Zugrundelegung der Begriffe Raster, gerastertes System, gerichtete Menge und gerichtetes System („Moore-Smithsche Folge“). Cauchysches Kriterium für gerichtete Systeme. § 3. Verbände. Grundoperationen: Verbindung \cup und Schnitt \cap . Somenring oder Boolescher Verband. Einbettung eines Somenringes in einen Somenring mit Einsoma. Darstellung eines Somenringes als Mengenkörper mit dem Beispiel des Systems der Elementarfiguren in der Ebene. Loomisscher Darstellungssatz für σ -Somenringe mit dem eleganten und durchsichtigen Beweis des Verf. (lies. Zbl. 40, 155). § 4. Räume. Metrische Räume. Quasimetrische Räume [in welchen aus dem Verschwinden des Abstandes $r(x, y)$ nicht notwendig $x = y$ folgt]. Ein topologischer („Fréchetischer“) Raum $[T; \mathfrak{G}]$ wird durch das System \mathfrak{G} aller offenen Mengen erklärt. Die Darstellung folgt Hausdorffs „Mengenlehre“. Verf. sagt „gehäuft“ für „insichdicht“, „Überhäufungspunkt“ für „Kondensationspunkt“. Ist \mathfrak{A} ein System von Teilmengen des topologischen Raumes $[T; \mathfrak{G}]$, dann heißt eine Teilmenge B von T „ \mathfrak{A} -offen“, wenn $B \cap A$ für jedes A aus \mathfrak{A} offen ist als Teilmenge des Teilraums A von T . Die so erklärte Topologie wird die „bezüglich \mathfrak{A} abgeschwächte Topologie von T “ genannt. Das Carathéodorysche System der minimal begrenzten offenen Mengen eines topologischen Raumes liefert ein aufschlußreiches Beispiel eines vollständigen, distributiven und komplementären Verbandes. In einem topologischen Raum $[T; \mathfrak{G}]$ heißt ein Mengenraster (punktweise) konvergent, wenn er mindestens so fein ist, wie ein Umgebungsraster eines Punktes x . Einem Konvergenzraum liegt der Begriff des (punktweise) konvergenten Mengenrasters zugrunde. Die topologischen Räume werden unter den Konvergenzräumen charakterisiert. § 5. Reelle Punktfunktionen. Stetige Abbildungen $f|A$ der Teilmenge A des topologischen Raumes E in den vollständigen metrischen Raum E' und ihre maximale natürliche stetige Erweiterung $f|A$. Nicht konstante stetige Funktionen und das Metrisationsproblem. Untere bzw. obere volle Limesfunktion f_* bzw. f^* von f . Halbstetige Funktionen. Minimal unstetige Funktionen f (d. h. $f^* = f_*$); ihre punktierte Unstetigkeit und Kennzeichnungen. Hausdorffsche Theorie der Baireschen Funktionen. Kurzer, auf S. Bernstein und E. Landau zurückgehender Beweis des Weierstraßschen Approximationssatzes und Stonesche Verallgemeinerung desselben Satzes. Iterationsprozesse und Auflösung von Gleichungen $f(z) = z$. Differentiation in metrisch linearen Räumen. n -dim. Analogon des klassischen Zwischensatzes und Brouwerscher Fixpunktsatz. § 6. Funktionen in Produkträumen. Faktorielle (abgeschwächte) Topologie. Charakterisierung der Menge der Unstetigkeitspunkte einer faktoriell-stetigen Funktion im Falle des euklidischen Zahlenraumes E^n . Faktoriell-stetige Erweiterungen und Vertauschungssatz. § 7. Reelle Funktionen einer reellen Variablen. Lebesguesche Nullmengen. Kriterien für die Monotonie einer Funktion auf Grund des Verhaltens der Derivierten. Eindeutigkeitssatz der Differentialrechnung. Funktionen beschränkter Variation und der Lebesguesche Differentiationssatz. $g|J = [a; b]$ heißt eine Stammfunktion der endlichen Funktion $f|J$, wenn $g|J$ eigentlich stetig ist und g bis auf abzählbar viele Ausnahmen eigentlich differenzierbar ist mit $g' = f$. „Regelfunktionen“ heißen diejenigen Funktionen $f|J$, deren einsichtige Limiten überall vorhanden und endlich sind; sie werden als gleichmäßige Limiten von Elementartreppenfunktionen (kurz „ T -Funktionen“) gekennzeichnet. Zu jeder Regelfunktion auf J gibt es eine Stammfunktion. Kurze und prägnante Theorie des Perronschen

Integrals. Das Umkehrproblem der Differentialrechnung wird dann als Problem der maximalen stetigen Erweiterung eines Integrals behandelt. Man geht von dem Integral $F[\mathfrak{I}]$ der T -Funktionen aus und quasimetrisiert das System \mathfrak{G} der reellen Funktionen f/J im Bezug auf eine im E^1 erklärte, endliche, nicht fallende Funktion p . Bei passender Wahl der Metrik von \mathfrak{G} liefert das Erweiterungsverfahren das elementare Stieltjes-Integral, das Riemann-Stieltjes-Integral und das Lebesgue-Stieltjes-Integral, im Zeichen $\int f dp$. Zusammenhänge zwischen Differentiation und Lebesgue-Integration. Konvergenzsätze. Absolut stetige Funktionen. Zerlegungssatz. Überblick der durch die verschiedenen Integrationsprozesse bedingten Funktionenbereiche mit einleuchtendem Schema. § 8. Maßtheorie. Additive und σ -additive Somenfunktionen. Intervallfunktionen im E^2 . Verfahren zur Konstruktion von Somenfunktionen mit Additivitätseigenschaften aus einer Ausgangsfunktion Q . Methode der Additiven Zerleger (nach Carathéodory). Differenzdarstellung der additiven Funktionen. Totalisation, d. h. verallgemeinerte Burkill-Integration nach Cotlar-Frenkel (dies. Zbl. 32, 196), einer mehrdeutigen Funktion Q/\mathfrak{N} und klassische Spezialfälle, insbesondere uneigentliche Integrale, Bogenlänge und eindim. Stieltjes-Integrale. Rieszscher Darstellungssatz für ein stetiges, lineares Funktional auf dem System der stetigen Funktionen f/J . Partielle Integration und Konvergenzsätze für eindim. Stieltjes-Integrale. Konstruktion von Maßfunktionen. Vervollständigung eines Inhaltes bzw. eines Maßes. Reduzierte Maße (nach F. Wecken). Erweiterung eines Inhaltes zu einem Maß und, als Anwendung, das Lebesguesche Maß im E^2 . R. Schmidts hübscher Beweis für die Bewegungsinvarianz des Lebesgueschen Maßes. § 9. Positive lineare Funktionale. Stetige Erweiterung nach M. H. Stones (dies. Zbl. 31, 14, 34, 29–31) erstem Verfahren (Norm N) eines Elementarintegrals $E\mathfrak{G}$ (wovon $F[\mathfrak{I}]$ im § 7 einen Spezialfall darstellt) zu einem „vollständigen“ Integral (N -Integral). Es handelt sich zuerst um eine Lebesguesche Integraltheorie ohne Maßtheorie. Dann werden die Beziehungen zur Maßtheorie dargelegt. Zu einem N -Integral gehörige Funktionenräume \mathfrak{N}^{∞} (Funktionen f mit $N(f^2) \leq +\infty$) und \mathfrak{N}^p (N -integrierbare Funktionen aus \mathfrak{N}^{∞}) mit besonderer Berücksichtigung von L^2 . Vergleich von Elementarintegralen: Satz von Radon-Nikodym und Zerlegungssatz von Lebesgue in funktionaler Auffassung. Iterierte Integrale und Satz von Fubini-Stone. Es folgen nun einzelne Bemerkungen lokalen Charakters. In 2. 10. 1. haben wir einen sanften Übergang vom klassischen Limesbegriff zum abstrakten. Der Vergleich zwischen gerasterten und gerichteten Mengen in 2. 10. 4. leuchtet ein. J. Schmidts Beweis in 2. 10. 4. 2. läßt sich vereinfachen, indem man als Indizes $j = (U, x)$ mit $U \in \mathfrak{R}$, $x \in U$ heranzieht. Wenn $j' = (U', x')$, dann $(j = j') : ((U' = U) \& (x' = x))$, $(j \succ j') : (U' \supset U)$. Wir betrachten die Abbildung $j \rightarrow x_j : x$, dann ist $\{x_j : j - j' \succ j'\} = U'$. Auf die Falschheit von Satz 3. 6. 2. wird S. VIII hingewiesen. Folgendes Gegenbeispiel mag zur Erläuterung dienen: \mathfrak{A} ist der Somenring der einer Gitterfolge (klassischem Netz) entsprechenden Aggregate, z. B. der dyadischen Aggregate im E^2 , \mathfrak{B} ist der Lebesguesche σ -Somenring, d. h. der Definitionsbereich \mathfrak{A} des reduzierten Lebesgueschen Maßes (8. 11. 10). \mathfrak{B} ist ein \mathfrak{A} umfassender σ -Somenring. Durch Anwendung von 2. 6. 7. und 8. 9. 3. kann man zeigen, daß \mathfrak{B} keinen dem Borelschen Somenring (Hausdorffschen σ -Körper) \mathfrak{B}^0 isomorphen Teil enthält. Ein Bourbaki-geschulter Mathematiker würde die bezüglich \mathfrak{A} abgeschwächte Topologie, abg. $T_{\mathfrak{A}}$, folgendermaßen erklären: $T_{\mathfrak{A}}$ ist die größte Fréchet'sche Topologie, die mindestens ebenso fein wie die ursprüngliche \mathfrak{G} -Topologie ist, und in bezug auf welche die \mathfrak{A} -Mengen offen sind. $\mathfrak{G} \cup \mathfrak{A}$ ist also ein $T_{\mathfrak{A}}$ -erzeugendes System, woraus sich eine Basis (im Sinne von 4. 6. 1) von $T_{\mathfrak{A}}$ durch endliche Durchschnittsbildung ergibt. Wesentlich dabei ist die Erhaltung der Fréchet'schen Trennungseigenschaft bei Verfeinerung einer Bourbaki-Topologie. Dasselbe gilt für die Hausdorff'sche Trennungseigenschaft und die Separabilität. Auf der letzteren Erhaltungseigenschaft beruht das einfache und durchsichtige Beispiel in 4. 6. 7. für einen separablen Raum, der einen nicht separablen Teilraum zuläßt. Bei Verfeinerung kann die Metrisierbarkeit verloren gehen. Wie von Ref. vermutet und von Verf. brieflich bestätigt, liefert die faktorielle Topologie in 6. 1. 4. ein Beispiel dafür. 4. 6. 8. gibt keine Kennzeichnung der abgeschlossenen Mengen, eher eine Klassifikation. Im Satz 4. 7. 5. kann man „im kleinen kompakt“ in „im kleinen vollständig“ abschwächen, was dem Geist der ursprünglichen Theorie von Baire besser entspricht. 5. 7. 2. gewährt eine klare Einsicht in die Relativierung des Supremumbegriffs. Und doch tauchen bei der (nicht explizit angegebenen) Definition eines Teilverbandes (vgl. 5. 7. 5.) keine Schwierigkeiten auf, weil bei der Verbandsdefinition die Verbindungs- und Schnittoperationen primär sind (nicht die t -Ordnungsrelation). In 5. 9. 4. folgt $f(p_i) = i$ aus der an f gestellten Bedingung. In dem langen 8. Abschnitt wechselt abstrakte Maßtheorie mit Anwendungen auf E^k , meistens auf E^1 , ab, was bisweilen den Eindruck der Heterogenität hervorruft. Die Carathéodory'sche Theorie wird in den nicht anschließenden Teilabschnitten 8. 3. und 8. 6. behandelt. Den Grund für das Verbot in 8. 1. 5., das die Reihe $(-\infty) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots$ von den (stummbarbaren) Reihen ausschließt, sieht der Ref. nicht ein. In 8. 1. 11. 2. bezeichnet $\Sigma \{1/m(A_i) = +\infty\}$ die Anzahl der Indizes i , für welche $m(A_i)$ unendlich ist. Obgleich der Begriff der Auflösbarkeit eines Maßes logisch einwandfrei erklärt ist, bleibt die tiefe Bedeutung dem Ref. verborgen. Seite 330, Zeile 12, ist Zitat „8. 3. 4.“ durch „8. 1. 11.“ zu ersetzen. Ref. vermißt nach 8. 6. 3. 1. den Anschluß an den klassischen Fall einer Maßfunktion in einem metrischen Raum. In 8. 9. 4. 1. beim

Vergleich eines reduzierten Maßes $m|_{\mathfrak{B}}$ und einer endlichen s -additiven Somenfunktion $f|_{\mathfrak{B}}$, wenn \mathfrak{B} eine Einheit E besitzt, tritt der üblicherweise durch eine Spektralskala erklärte Radon-Nikodymsche Integrand in der Gestalt einer Caratheodoryschen Ortsfunktion (γ^i, γ^o) auf. Die Zurückgewinnung von f aus diesem Paar von Somenfunktionen geschieht durch „Totalisation“, wenn f „ableitungsstetig bezüglich $m|_{\mathfrak{B}}$ “ ist. Wie aus einer brieflichen Mitteilung des Verf. an Ref. hervorgeht, bedeutet diese Annahme die Existenz einer (endlichen) Konstante K derart, daß $|f(A)| \leq K m(A)$ für alle $A \in \mathfrak{B}$ gilt. Nach brieflicher Mitteilung des Verf. an Ref. heißt „wesentlich(er)“ in 8. 10. 1., Zeile 5, daß die fragliche Forderung nicht unmittelbar herbeigeführt werden kann, aber die σ -Überdeckungseigenschaft von \mathfrak{A} leistet alles. Im Literaturverzeichnis ist „de la Vallée Poussin“ zweimal falsch geschrieben. „Totalbeschränkt“ fehlt im Verzeichnis, S. 413. Zum Schluß wird allgemein kommentiert. Die Lektüre des Buches hat dem Ref. große Freude gemacht. Von früher Bekanntes tritt im neuen Licht auf, z. B. im § 8 die Caratheodorysche Theorie durch die Auseinandersetzung der Methode der additiven Zerleger und die Ausführungen über die Konstruktion einer Maßfunktion von einer „groben Gewichtsfunktion“ aus, die Theorie der Stammfunktionen durch den Limesatz 7. 3. 1. 2. und die Regelfunktionen, die Additivität des Unter- und Obertotals durch den Begriff der ausgezeichneten g -Zerlegungsordnung. Die Sprache ist oft konkret: Stachel, Türmchenfunktionen, Deckmaßfunktionen, Überhäufungspunkt, Unter- und Oberfüllwert. Ein Primideal in Gestalt einer Harpune zu sehen, ist sicher ein erfreuliches und seltenes Erlebnis. Abb. 13 bringt dem Leser das Wesentliche bei einer reellen halbstetigen Funktion anschaulich bei. Durch die Darstellung des Umkehrproblems der Differentialrechnung als ein Problem der Erweiterung des Integralbegriffs wird der Leser in die Funktionalanalysis eingeführt, doch im allgemeinen bleibt er an der Schwelle, da z. B. weder vom dualen Raum noch von schwacher Konvergenz die Rede ist (vgl. z. B. die Konvergenzsätze in 8. 5. 12. 9.). Das Buch erscheint in der traditionell schönen und sorgfältigen Ausstattung der gelben Springer-Sammlung. Die lange Rezension entstand aus dem Interesse des Ref. für das schöne Werk.

Chr. Pauc.

Bauer, Heinz: *Caractérisation topologique de la partie complètement additive et de la partie purement additive d'une fonction additive d'ensemble.* C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 1771—1773 (1954).

Es sei \mathfrak{B} eine Boolesche Mengenalgebra von Teilmengen einer Grundmenge $E \in \mathfrak{B}$: E sei durch \mathfrak{B} separiert. Ferner sei $f|_{\mathfrak{B}}$ eine reelle, endliche, nicht negative, auf \mathfrak{B} additive Funktion. Nach K. Yosida und E. Hewitt (dies. Zbl. **46**, 54) existiert für f genau eine Zerlegung $f = f_c + f_p$ in nicht negative, additive Funktionen $f_c|_{\mathfrak{B}}$ und $f_p|_{\mathfrak{B}}$ derart, daß f_c σ -additiv und f_p rein-endlich-additiv ist. Verf. gibt folgende Interpretation der Zerlegungsteile f_c und f_p an: Es wird E als vollständig regulärer Hausdorff-Raum mit der offenen (und zugleich abgeschlossenen) Basis \mathfrak{B} betrachtet. S sei ein T_1 -Raum, der E als dichten Unterraum enthält, in welchem je zwei fremde Mengen aus \mathfrak{B} fremde Hüllen in S besitzen und in welchem jedem aus Mengen von \mathfrak{B} bestehenden Raster ein Punkt von S adhären ist. [Unter den Räumen S ist die Stonesche Kompaktifizierung von E (M. H. Stone, dies. Zbl. **17**, 135) durch besondere Eigenschaften ausgezeichnet.] Das System \mathfrak{B} der in S gebildeten Hüllen A von Mengen $A \in \mathfrak{B}$ ist eine Boolesche Mengenalgebra und die Abbildung $A \rightarrow A$ von \mathfrak{B} auf \mathfrak{B} eine Boolesche Isomorphie. Die durch $f(A) = f_c(A)$, $A \in \mathfrak{B}$, definierte Funktion $f|_{\mathfrak{B}}$ ist nicht negativ und σ -additiv. Das von f auf dem System aller Teilmengen von S induzierte äußere bzw. innere Maß heiße f_e bzw. f_i . Es gilt $f_c(A) = f_e(A)$ und $f_p(A) = f_i(A - A)$ für jedes $A \in \mathfrak{B}$. Somit ist f auf \mathfrak{B} genau dann σ -additiv, wenn das innere Maß $f_i(S - E)$ der „idealen“ Punkte von S gleich Null ist. Dagegen ist f genau dann rein-endlich-additiv, wenn das äußere Maß $f_e(E)$ der „eigentlichen“ Punkte von S gleich Null ist.

G. Nöbeling.

Nef, Walter: *Zerlegungsäquivalenz von Mengen und invarianter Inhalt.* Math. Ann. **128**, 204—227 (1954).

Die Methoden einer vorigen Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **55**, 285) werden auf eine Verallgemeinerung der Tarskischen algebraisierten Maßtheorie angewendet. Als wesentliches Hilfsmittel dazu wird die Fortsetzungstheorie monotoner Linearformen auf teilgeordneten Halbgruppen entwickelt.

A. Császár.

Bruijn, N. G. de and A. C. Zaanen: *Non σ -finite measures and product measures.* Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **57**, 456—466 (1954).

Das Produktmaß zweier nicht notwendig σ -endlicher Maße wird direkt konstruiert und untersucht und die Unentbehrlichkeit von σ -Endlichkeitsvoraussetzungen zu einzelnen Sätzen durch Beispiele belegt. Das Integral einer meßbaren reellen Funktion über eine meßbare Menge, deren Maß nicht σ -endlich zu sein braucht, wird mit Hilfe des Maßes von Ordinatenmengen erklärt und die Ableitung der üb-

lichen Sätze skizziert. Man erhält die bekannte Erweiterung eines positiven linearen Funktional I über einem Vektorverband L reeller Funktionen, indem man das im Halbring (die Definition dieses Begriffes weicht hier etwas von der üblichen ab) aller Differenzen von Ordinatenmengen F und G von Funktionen f und g durch $\mu(F - G) = I(f - g)$ definierte Maß μ auf einen σ -Ring fortsetzt. *K. Krickeberg.*

Urbanik, K.: Quelques théorèmes sur les mesures. Fundamenta Math. **41**, 150—162 (1954).

In einer Menge E liege ein Mengen- σ -Boole-Verband \mathfrak{B} vor (der E und die leere Menge enthält). Auf \mathfrak{B} seien n Maße μ_1, \dots, μ_n definiert. Es seien die folgenden Bedingungen erfüllt: 1. die Familie der Nullmengen ist dieselbe für alle Maße μ_1, \dots, μ_n ; 2. für jedes i gilt: ist $\mu_i(X) > 0$, so existiert ein $Y \subseteq X$ mit $\mu_i(X) > \mu_i(Y) > 0$; 3. μ_1, \dots, μ_n sind nicht proportional. Dann gilt: I. Es existiert eine Zerlegung $E = E_1 \cup \dots \cup E_n$ von E (in paarweise fremde Mengen E_i aus \mathfrak{B}) mit $\mu_i(E_i) > \mu_i(E)$ *n* für jedes $i = 1, \dots, n$ [die Zerlegung kann sogar perfekt gewählt werden, d. h. so, daß $\mu_1(E_1) = \dots = \mu_n(E_n)$ ist und für jede Zerlegung $E = X_1 \cup \dots \cup X_n$ mit $\mu_1(X_1) = \dots = \mu_n(X_n)$ gilt $\mu_i(E_i) \geq \mu_i(X_i)$ für jedes i]. II. Es gibt entweder genau eine oder genau 2^{\aleph_0} perfekte Zerlegungen von E (hierbei braucht 3. nicht vorausgesetzt zu werden). *G. Nöbeling.*

Kosteljanec, P. O. und Ju. G. Rešetnjak: Bestimmung einer vollständig additiven Funktion durch ihre Werte auf Halbräumen. Uspechi mat. Nauk **9**, Nr. 3 (61), 135—140 (1954) [Russisch].

Die Arbeit enthält einen Beweis des Satzes, daß ein endliches, auf dem Körper aller Borelschen Untermengen des n -dimensionalen Euklidischen Raumes erklärtes Maß durch seine Werte auf allen Halbräumen völlig bestimmt wird. *R. Sikorski.*

Chačaturov, A. A.: Bestimmung des Wertes eines Maßes für ein Gebiet des n -dimensionalen Euklidischen Raumes durch seine Werte für alle Halbräume. Uspechi mat. Nauk **9**, Nr. 3 (61), 205—212 (1954) [Russisch].

Die Arbeit enthält einen Beweis des Satzes, daß ein endliches, auf dem Körper aller Borelschen Untermengen des n -dimensionalen Euklidischen Raumes R_n erklärtes Maß durch seine Werte auf allen Halbräumen völlig bestimmt wird. Der Verf. gibt auch die Lösung eines Problems von Gelfand und Petrovski über die Darstellung einer Funktion in R_{2k+1} durch Funktionen, die auf allen zu einer Richtung orthogonalen Hyperebenen konstant sind, und beweist zwei Integralformeln, die eine duale Beziehung zwischen Punktfunktionen in R_{2k+1} und Funktionen aller Hyperebenen aussprechen. *R. Sikorski.*

Marstrand, J. M.: Some fundamental geometrical properties of plane sets of fractional dimensions. Proc. London math. Soc., III. Ser. **4**, 257—302 (1954).

Bezeichnung: Es sei $0 < q$, ferner E eine ebene Menge und $A_q^s(E) = \inf \left(\sum_{U \in \mathcal{E}(q)} (dU)^s : E(q) \in \mathcal{U}(E, q) \right)$, wobei $\mathcal{U}(E, q)$ das System der Überdeckungen $E(q)$ von E mit abzählbar vielen konvexen (ebenen) Mengen U mit Durchmesser $dU < q$ ist. Dann ist $A^s E = \lim_{q \rightarrow 0} A_q^s(E)$ das s -dimensionale äußere (Hausdorffsche) Maß von E ; das durch diese Maßfunktion A^s induzierte Carathéodorysche Maß heißt das s -dimensionale (Hausdorffsche) Maß A^s . Eine A^s -meßbare Menge mit endlichem, positivem Maß heiße s -Menge. „Fast alle“ (bezüglich s) bedeutet: „Bis auf ein N mit $A^s(N) = 0$ “. Die (Hausdorffsche) Dimension $\dim(E)$ von E ist die (einzige) Zahl t derart, daß $A^s E = 0$ bzw. $= +\infty$ für $t < s$ bzw. $s < t$. Sätze: (I) Jede s -Menge M mit $s > 1$ bzw. ≤ 1 projiziert sich in fast allen Richtungen in eine (lineare) Menge positiven Lebesgueschen Maßes bzw. der Dimension s . — (II) Für jede s -Menge M mit $s > 1$ und den Durchschnitt D von M mit fast jeder Geraden durch fast jeden Punkt von M gilt $\dim(D) = s - 1$ sowie $A^{s-1}(D) < +\infty$.

— (III) Zu jedem s mit $1 < s < 2$ existieren s -Mengen E derart, daß für jeden Punkt $p \in E$ und den Durchschnitt D fast aller Geraden durch p gilt: $A^{s-1}(D) = 0$.
 — (IV) Es heiße a Kondensationspunkt von E , wenn für fast alle Richtungen Q der Durchschnitt von E mit der Halbgeraden der Richtung Q und dem Anfangspunkt a den Punkt a als Häufungspunkt besitzt. Fast alle Punkte einer s -Menge mit $s > 1$ sind Kondensationspunkte. — Wegen weiterer Sätze, insbesondere betr. die sogen. „obere bzw. untere angular-density“ von s -Mengen sei auf die Arbeit selbst verwiesen.

Otto Haupt.

Porcelli, Pasquale: Concerning integrals. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 395—400 (1954).

H. L. Smith [Trans. Amer. math. Soc. **27**, 491—515 (1925)] et R. E. Lane [Proc. Amer. math. Soc. **5**, 59—66 (1954)], ont donné une définition de $\int_a^b f dg$ qui généralise celle de l'intégrale de Stieltjes (voir ce Zbl. **55**, 52) mais conduit en général à un résultat différent de l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes. L'A. se propose de prolonger cette intégrale. Après avoir démontré trois théorèmes A, B et C, il dit que la fonction f est g -sommable sur (a, b) s'il existe une suite f_m de fonctions en escalier, uniformément bornées, telles que $f_m(x) \rightarrow f(x)$ pour tout x à l'exception d'un ensemble dont la g -mesure est nulle, cette convergence vérifiant les conditions suivantes: $f_m(x-) \rightarrow f(x-)$ si $g(x) > g(x-)$, $f_m(x+) \rightarrow f(x+)$ si $g(x+) > g(x)$ (g est supposée non décroissante). — L'A. déclare alors que, d'après son théorème C, $\int_a^b f_m dg$ a une limite. Le rapporteur ne comprend pas pourquoi. R. de Possel.

Germa, R. H.: Une remarque sur la théorie des fonctions intégrables. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **23**, 6—12 (1954).

Es sind zwei Funktionen $f(x)$ und $q(x)$ in einem Intervall (a, b) gegeben. Die erste Funktion ist beschränkt, die zweite ist stetig und wachsend, und man hat für sie das obere und untere Stieltjes-Integral I_q, I'_q durch eine ähnliche Methode wie die von Darboux definiert. Der Verf. beweist, daß

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \prod_i \{1 \pm M_i [q(x_i) - q(x_{i-1})]\} = e^{I_q}, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_i \{1 \pm m_i [q(x_i) - q(x_{i-1})]\} = e^{I'_q},$$

wobei er sich auf Beschränkungen stützt, die er aus $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} [\log(1+x) - x] = -\frac{1}{2}$ ableitet. Man betrachtet insbesondere die Fälle, in denen $f(x)$ stetig oder $q(x)$ stetig und von beschränkter Variation ist, und auch den Grenzübergang unter dem Integralzeichen und die Integration gleichmäßig konvergenter Reihen. J. Maier.

Agnew, Ralph Palmer: Frullani integrals and variants of the Egoroff theorem on essentially uniform convergence. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. **6**, 12—16 (1954).

Es sei E eine Teilmenge der reellen Zahlen, $x \in E$, und das Maß $|E| > 0$; $f(A, x)$ (A reell) sei eine Funktion, für die $\lim_{A \rightarrow \infty} f(A, x) = f(x)$ endlich bleibt und

$$\overline{\lim}_{n \leq A \leq n+1} |f(A, x) - f(x)| = f_n(x) \text{ über } E \text{ meßbar ist. Zu } \varepsilon, \theta > 0 \text{ gibt es dann stets ein } E_1 \subset E, \text{ derart daß } |E_1| > |E| - \theta \text{ und daß ein } A(\varepsilon) < A \text{ existiert, so daß für } x \in E_1 \text{ } |f(A, x) - f(x)| < \varepsilon \text{ gilt. — Vergleich mit Ergebnissen von A. Ostrowski (dies. Zbl. } \mathbf{34}, \mathbf{322), G. Stampacchia (dies. Zbl. } \mathbf{36}, \mathbf{315) \text{ u. a. W. Maier.}}$$

Butzer, P. L. and W. Kozakiewicz: On the Riemann derivatives for integrable functions. Canadian J. Math. **6**, 572—581 (1954).

f et g étant sommables sur (a, b) , soient $\Delta_{2h}^s f(x)$ la différence s^e symétrique de f , $\tau(x, h)$ le quotient $(2h)^{-s} \Delta_{2h}^s f(x)$, $J^s g$ une s^e primitive de g . — Les AA. démontrent le théorème suivant: pour que f soit presque partout égale à $J^s g$, à un polynôme

de degré $s - 1$ près, il faut et suffit qu'il existe une suite $h_n \rightarrow 0$ telle que $\tau(x, h_n)$ converge en moyenne vers $g(x)$ dans tout intervalle $[\alpha, \beta]$ de (a, b) , c'est-à-dire que les deux conditions suivantes soient vérifiées: $\int_{\alpha}^{\beta} \tau_n dx \leq M$, $\int_{\alpha}^{\beta} \tau_n dx \rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} g dx$.

— Pour que la conclusion subsiste, il suffirait, conjecturent les AA., que f soit continue, que $f^{(s-2)}$ existe, et que $\tau(x, h)$ ait une limite $g(x)$ (nommée s^e dérivée de Riemann) sommable sur (a, b) . — Ce résultat a été démontré pour $s = 2$ (de la Vallée-Poussin, 1946), pour $s = 3, 4$ (Verblunski, 1931; Saks 1932). Les AA. rappellent que la cas $n = 2$ permet de démontrer que, si une série trigonométrique converge sauf sur une ensemble dénombrable, vers une fonction finie et sommable g , elle est la série de Fourier de g . — Comme corollaires du théorème ci-dessus, les AA. obtiennent divers résultats dont plusieurs avaient été publiés par A. Marchaud [J. Math. pur. appl., IX. Sér. 6, 337—425 (1927)] Th. Anghelutz (ce Zbl. 23, 20), W. T. Reid (Duke math. J. 12, 685—694 (1945)]. Il y aurait probablement intérêt à reprendre l'étude ci-dessus sous l'angle des distributions de L. Schwartz.

R. de Possel.

Mirguet, J.: Remarques sur les équivalences géométriques de la dérivabilité second des orthosurfaces. Acad. Roy. Belgique. Bull. Cl. Sci., V. Ser. 40, 608—612 (1954).

Nach einem Satz von G. Bouligand ist z. B. die Differenzierbarkeit (im Sinne von Stolz) einer Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ in einem Punkt gleichwertig mit der folgenden geometrischen Eigenschaft der f entsprechenden Fläche: Das Kontingent im betr. Punkt ist eben. Allgemein fordert ein Programm von G. Bouligand die Aufstellung von geometrischen Bedingungen, die äquivalent sind z. B. zur n -maligen Differenzierbarkeit. Dementsprechend gibt Verf. in Fortsetzung früherer Arbeiten Definitionen bzw. geometrisch formulierte Bedingungen für zweimalige Differenzierbarkeit bei Orthokurven in der Ebene und bei Orthoflächen im 3-dimensionalen Raum. Wegen der Einzelheiten ist auf die Note selbst zu verweisen. Otto Haupt.

Kudrjavec, L. D.: Über differenzierbare Abbildungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 95, 921—923 (1954) [Russisch].

Kudrjavec, L. D.: Differenzierbare Abbildungen n -dimensionaler Gebiete und harmonische Abbildungen ebener Gebiete. Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 2, 207—209 (1954) [Russisch].

Der Verf. formuliert einige Sätze (ohne Beweise) über differenzierbare Abbildungen f einer offenen Untermenge G des n -dimensionalen Euklidischen Raumes E^n in E^n , insbesondere gewisse Verallgemeinerungen der bekannten Sätze von Rouché und Hurwitz aus der Theorie analytischer Funktionen, das Maximum- und Minimumprinzip, das Prinzip der Invarianz von Gebieten, gewisse Sätze über Funktionaldeterminanten der Abbildungen f usw. R. Sikorski.

Császár, Ákos: Sur la structure des ensembles de niveau des fonctions réelles à deux variables. Acta Sci. math. 15, 183—202 (1954).

In der (x, y) -Ebene bezeichne $S(P_0, r, a, b)$ den offenen Kreissektor mit der Spitze P_0 , dem positiven Radius r und den begrenzenden Halbstrahlen mit den Winkeln a und b gegen die x -Achse. Ferner sei \mathfrak{R} ein Mengensystem, welches mit jedem N auch jede Teilmenge von N und mit jeder abzählbaren Mengenfolge auch deren Vereinigung enthält. Für eine reelle Funktion $F(P)$ wird $[F(\dot{P}) : F(P_0)] = U(P_0)$, $[F(\dot{P}) < F(P_0)] = V(P_0)$ und $[F(P) = F(P_0)] = W(P_0)$ gesetzt und definiert: (1) $F \in C_{ab}(N; P_0)$, wenn $U(P_0) \cap S(P_0, r, a, b) \in \mathfrak{R}$ für passende r ; (2) $F \in C_{ab}^*(\mathfrak{R}; P_0)$, wenn $V(P_0) \cap S(P_0, r, a, b) \in \mathfrak{R}$ für passende r , aber nicht $F \in C_{ab}(\mathfrak{R}; P_0)$; (3) $F \in O_{ab}(\mathfrak{R}; P_0)$, wenn für jedes r weder $V(P_0) \cap S(P_0, r, a, b)$ noch $W(P_0) \cap S(P_0, r, a, b)$ in \mathfrak{R} liegen. Bezeichnet weiter $D(E, P_0, a, b)$ bzw.

$\bar{D}(E, P_0, a, b)$ die relative obere bzw. untere äußere Dichte von E in $S(P_0, \infty, a, b)$ (z. B. $\bar{D} = \lim_{r \rightarrow 0} |E \cap S(P_0, r, a, b)| / |S(P_0, r, a, b)|$ für $r \rightarrow 0$), so wird definiert: (4) $F \in \Gamma_{ab}(P_0)$, wenn $\bar{D}(U(P_0), P_0, a, b) = 0$, (5) $F \in \Gamma_{ab}^*(P_0)$, wenn $\bar{D}(V(P_0), P_0, a, b) = 0$, aber nicht $F \in \Gamma_{ab}(P_0)$; (6) $F \in \Omega_{ab}(P_0)$, wenn $\bar{D}(V(P_0), P_0, a, b) = 0$ und $\bar{D}(W(P_0), P_0, a, b) > 0$. Die Mengen der Punkte P_0 , für welche F der einen oder anderen der oben erklärten Mengen angehört, werden näher untersucht und darüber Sätze bewiesen, die dem bekannten Satz über die linear zugänglichen Punkte einer ebenen Punktmenge analog sind. Beispiele: Die Punkte P_0 mit $F \in \Gamma_{ab}(P_0) \cap \Gamma_{a+\pi, b+\pi}(P_0)$ für passende (von P_0 abhängige) a, b bilden eine Nullmenge. Für die Menge der Punkte P_0 mit $F \in \Gamma_{ab}^*(P_0)$ für jeweils passende a, b bilden die Werte $F(P_0)$ eine abzählbare Menge, usw. G. Aumann.

Gonçalves, Vicente J.: Sur la variation totale des fonctions discontinues. Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A **3**, 137—142 (1954).

È noto (immediata conseguenza del lemma di Darboux generalizzato) che per ogni funzione $f(x)$ continua in (a, b) , le somme r tendono uniformemente alla variazione totale (finita o infinita) di $f(x)$ in (a, b) , quando tende a zero il massimo intervallino della suddivisione di (a, b) in parti. Lebesgue (Leçons sur l'intégration, 2. éd., Paris 1928) aveva osservato che questo risultato non sussiste per le funzioni discontinue. L'A. dimostra che tutte e sole le funzioni per cui il fatto continua a valere sono quelle per cui in ogni punto α esistono i limiti $f(\alpha - 0)$ e $f(\alpha + 0)$, finiti, se $a < \alpha < b$ (o uno solo di questi, a seconda il caso, se $\alpha = a$ oppure se $\alpha = b$) ed è $f(\alpha)$ compreso fra essi. Questo risultato fu però stabilito moltissimi anni fa incidentalmente da L. Tonelli [Ann. Mat. pura appl., III. Ser. **25**, 294—295 (1916)].

L. Giuliano.

Green, J. W.: Recent applications of convex functions. Amer. math. Monthly **61**, 449—454 (1954).

Dies ist eine zusammenfassende Arbeit der Resultate in Theorie und Anwendung der konvexen Funktionen, die seit 1946, d. h. seit dem Erscheinen des ähnlichen längeren Artikels von E. F. Beckenbach [Bull. Amer. math. Soc. **54**, 439—460 (1946)] erreicht wurden. Die Kapiteltitel sind: 1. Einleitung, 2. Konvexe Funktionen und Verallgemeinerungen, 3. Geometrie, 4. Funktionentheorie, 5. Programmieren.

J. Aczél.

Allgemeine Reihenlehre:

Petersen, G. M.: Methods of summation. Pacific J. Math. **4**, 73—77 (1954).

The $\sum_0^\infty u_n$ is summable (B^h) when $\sum_0^n u_\nu \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{\nu}{n+h} \right) \rightarrow s$ as $n \rightarrow \infty$. It is known that the method (B^h) is at least as strong as the Cesàro method $(C, 1)$, and that it is equivalent to $(C, 1)$ when $h = 0$ and when $h = \frac{1}{2}$. It is stronger than $(C, 1)$ when $0 < h < \frac{1}{2}$ [compare W. Rogosinski, Math. Ann. **95**, 110—134 (1925); J. Karamata, this Zbl. **34**, 35; R. P. Agnew, this Zbl. **48**, 41]. It is now shown that (B^h) is stronger than $(C, 1)$ when $h < 0$. The limiting methods $\sigma_n = [1 - 1/(n+k)] s_n + s_{n+1}/(n+k)$ are also discussed. W. W. Rogosinski.

Avakumović, Vojislav G.: A note on a question set by P. Erdős and L. K. Hua. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. **6**, 47—56 (1954).

Let $a_\nu \geq 0$ and $s_n = \sum_{\nu \leq n} a_\nu$. Suppose that $\sum_{\nu=1}^n a_\nu s_{n-\nu} = n^2/2 + O(n)$. Problem: to find the least upper bound of the number ϑ such that $s_n = n + O(n^\vartheta)$. It was proved by Erdős that $\vartheta \leq \frac{1}{2}$. The author proves that $\vartheta \leq \frac{1}{3} - 1$. The method is based on his Tauberian theorem (this Zbl. **23**, 221). L. K. Hua.

● Perron, Oskar: *Die Lehre von den Kettenbrüchen. Band I.* 3. erweiterte und verbesserte Aufl. Stuttgart: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft m. b. H. 1954. VI, 168 S.

The first edition of this book appeared in 1913, the second with a few changes in 1929 (Leipzig). This is volume I of the third edition, and has been considerably improved and brought up to date. It deals entirely with the elementary arithmetic portion, and it is still the only book ever published on this phase of continued fraction theory. Although the five chapters and most of the individual paragraphs have the same or almost the same titles as did those in the preceding editions, and the format is still along classical lines, many proofs have been simplified and a number of items which were formerly omitted and since have become important have been included in the appropriate places, as well as a number of new results. As before, the author has placed greatest value on ease of comprehension. He has carefully avoided complicated notation and has adhered to the classical presentation. Thus the reader is not unnecessarily weighed down with unimportant details and digressions and thereby does not lose sight of the main line of thought and the important ideas.

The book consists of the following topics: Chapter I, definitions and general formulas: (1) notation, historical remark; (2) the transformation into an ordinary fraction; (3) the Euler-Minding formulas; (4) continuants; (5) the fundamental formulas, matrices; (6) extensions of the fundamental formulas; (7) irreducibility; (8) numerical continued fractions, convergence. Chapter II, regular continued fractions: (9) finite regular continued fractions; (10) the diophantine linear equation; (11) inverse continued fractions, symmetric continued fractions; (12) infinite regular continued fractions; (13) the approximation theorem, criterion for a fraction to be an approximant; (14) approximation by rational fractions; (15) the theorem of best approximation; (16) in between approximants; (17) equivalent numbers; (18) two number-theoretic applications. Chapter III, regular periodic continued fractions: (19) pure- and mixed-periodic continued fractions; (20) the Lagrange theorem on periodicity; (21) two additional proofs of the Lagrange theorem; (22) reduced numbers and pure periodicity; (23) inverse periods; (24) square roots of rational numbers; (25) square roots of whole numbers, necessary conditions; (26) sufficient conditions, tables; (27) the Pell equation; (28) number-theoretic applications; (29) culminating and almost-culminating periods; (30) the continued fraction expansion for $(\sqrt{1 + 4G + 1})/2$. Chapter IV, Hurwitz continued fractions, transcendental numbers: (31) preparatory theorems; (32) definition of Hurwitz continued fractions; (33) the Hurwitz theorem; (34) the regular continued fractions for the numbers e and e^2 and their m -th roots; (35) Liouville numbers; (36) quasi-periodic continued fractions. Chapter V, semi-regular continued fractions: (37) the convergence theorem of Tietze; (38) definition of semi-regular continued fractions; (39) longest and shortest expansions; (40) transformation of semi-regular continued fractions into regular; (41) the approximation theorem; (42) periodicity; (43) continued fraction expansions according to nearest and more distant integers as well as reduced-regular continued fractions; (44) singular continued fractions; (45) diagonal continued fractions; (46) continued fractions in the field of complex numbers. The following improvements and additions are noted: In Chapter I, § 2, the fundamental recurrence formulas are obtained from the point of view that a continued fraction is generated by a sequence of linear transformations. In § 5, since matrix calculus is now widely used, the author has introduced a small part of matrix theory applied to the recurrence relations of continued fractions, which he uses later in the book. In Chapter II, § 14, the theorem of Hurwitz on the approximation of irrational numbers by rational is shown by the shorter and farther-reaching proof of Fujiwara. In § 18, a new application consisting of two theorems, proved by means of continued fractions, in the theory of modular functions has been added. In Chapter III, § 20, a simple algorithm is inserted for the expansion of an irrational number into a periodic continued fraction. In § 21 has been added a proof of the Lagrange theorem on periodicity due to Ballieu. The author has included it for its especial simplicity and for the fact that one does not at any time use the convergence of the continued fraction. Furthermore, the discussion on the continued fraction expansion for $(\sqrt{1 + 4G + 1})/2$ due to H. Schmidt and its connection as the solution of certain diophantine equations, § 30, is new. In Chapter IV, § 31, the theory of Hurwitz continued fractions is expressed on a completely new basis in terms of matrices, according to Châtelet. Also added is § 39 in Chapter V on longest and shortest semi-regular continued fraction expansions for a rational number, and a part of the related § 43 has been inserted. In § 40 and § 41, the theory of semi-regular continued fractions has been greatly altered on the basis of the work of Blumer. Finally, § 46 is a new section on continued fractions with elements in the field of complex numbers. There is a bibliography consisting of 116 references, only those which are cited in the book. In the text, much material is presented without references. This, however, the author specifically states is not necessarily his own.

As one reads this volume, one feels as though one were listening to the author speaking in person, perhaps auditing one of his lectures. It is written in that same clear, logical, simple language which is very easy to comprehend and for which Professor Perron is so well known. As was the case with the preceding editions, the book is exceedingly well coordinated, each step and each theorem a logical consequence of the preceding. This volume covers very well the theory of arithmetic continued fractions. It is with great anticipation that one looks forward to the publication of the second volume on the analytic function-theoretic portion of continued fraction theory. Volume I certainly is in every respect one of the classics of present-day mathematics.

E. Frank.

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

• Bernštejn, S. N.: *Gesammelte Werke. Bd. II: Konstruktive Funktionentheorie (1931—1953)*. Moskau: Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR 1954. 627 S. R. 34,60 [Russisch].

(Band I, dies. Zbl. 47. 73.) Dieser zweite Band enthält 62 Arbeiten des Verf., alle in russischer Sprache, darunter auch mehrere, die ursprünglich in solchen Zeitschriften erschienen sind, die im Auslande praktisch nicht erreichbar sind. Die Reihe der Arbeiten beginnt mit der Doklady-Note von 1931 (dies. Zbl. 3. 343), in der ein Beispiel für eine stetige Funktion gegeben ist, deren trigonometrische Interpolationsfolge divergiert. Es folgen weitere Arbeiten über Interpolation, Quadraturformeln, beste Approximation, Funktionen endlichen Grades, usw. Die Mehrzahl der seit 1951 erschienenen Arbeiten des Verf. auf dem Gebiete der „konstruktiven Funktionentheorie“ beschäftigt sich mit dem Problem der „Gewichtsfunktionen“. So wird eine Funktion $\Phi(x)$ ($-\infty < x < \infty$) genannt, falls jede stetige Funktion $f(x)$ mit der Eigenschaft $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f(x) \Phi(x)] = 0$ sich im Sinne der Entfernung

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |f(x) - P(x)| |\Phi(x)|$$

beliebig gut durch ein Polynom $P(x)$ approximieren läßt. Am Ende des Bandes, auf 35 Seiten, befinden sich Kommentare aus der Feder des Verf., die die einzelnen Arbeiten in einigen Punkten ergänzen und auch die neueste Entwicklung des betrachteten Problems schildern.

B. Sz. Nagy.

Gorn, S.: *Maximal convergence intervals and a Gibbs type phenomenon for Newton's approximation procedure*. Ann. of Math., II. Ser. 59, 463—476 (1954).

Sei Tx stetig im abgeschlossenen Intervall $[X_1, X_2]$, (stark monoton) abnehmend von X_1 bis \bar{x}_0 , zunehmend von \bar{x}_0 bis x_0 und abnehmend von x_0 bis X_2 , ferner $T X_1 > X_2$, $T X_2 < X_1$; x_0 sei die einzige Wurzel von $Tx = x$, und $T^2 x = x$ habe höchstens endlich viele Lösungen. Dann enthält $[X_1, X_2]$ ein „maximales Konvergenzintervall“ $[Z_1, Z_2]$ mit folgenden Eigenschaften: 1. $TZ_1 = Z_2$, $TZ_2 = Z_1$, 2. \bar{x}_0 und x_0 liegen in $[Z_1, Z_2]$, 3. Die Funktionenfolge $T^n x$ konvergiert gleichmäßig gegen $y = x_0$ in jedem abgeschlossenen Teilintervall von (Z_1, Z_2) , 4. Im Falle $\bar{x}_0 < x_0$ (also auch $T\bar{x}_0 < x_0$), nähert sich die Kurvenfolge $T^{2m-1}x$ bzw. $T^{2m}x$ dem Streckenzug $x = Z_1, y \geq T\bar{x}_0; y = x_0, Z_1 \leq x \leq Z_2; x = Z_2, y \leq x_0$ bzw. $x = Z_1, y \leq x_0; y = x_0, Z_1 \leq x \leq Z_2; x = Z_2, y \geq T\bar{x}_0$, während sich im Grenzfall $\bar{x}_0 = x_0$ kein solches Gibbssches Phänomen einstellt, 5. Es lassen sich Teilintervalle angeben derart, daß $T^m x$ genau von $m = n$ ab monoton konvergiert, wobei sich die Zahl der für eine vorgegebene Genauigkeit erforderlichen „monotonen Iterationsschritte“ angeben läßt. — Die Voraussetzungen sind mit $Tx = x - f(x)/f'(x)$ erfüllt, falls $f(x)$ zweimal differenzierbar ist und eine Wurzel x_0 sowie genau einen Wendepunkt \bar{x}_0 in (X_1, X_2) besitzt, falls ferner $f'(x) \neq 0$, $T X_1 > X_2$, $T X_2 < X_1$ und $T^2 x = x$ höchstens endlich oft lösbar. Der Fall $\bar{x}_0 > x_0$ läßt sich durch eine einfache Transformation auf $\bar{x}_0 < x_0$ zurückführen.

J. Weissinger.

Voronovskaja, E. V.: Die Polynome kleinster Abweichung im Lichte der Funktionalanalysis. Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 4(62), 254–255 (1954) [Russisch].

Mergeljan, S. N.: Über gewogene Approximationen durch Polynome. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 97, 597–600 (1954) [Russisch].

Soit donnée $h(x)$ non négative et bornée pour $-\infty < x < +\infty$; on munit la classe C_h des fonctions continues $f(x)$ vérifiant $h(x)f(x) \rightarrow 0$ pour $x \rightarrow \pm\infty$ de la norme $\|f\| = \sup_{-\infty < x < +\infty} h(x)|f(x)|$. \mathcal{M}_h étant l'ensemble des polynômes de norme ≤ 1 , on pose pour z complexe $M_h(z) = \sup_{P \in \mathcal{M}_h} |P(z)|$. L'A. donne en particulier, en esquissant les démonstrations, les résultats suivants: ou bien $M_h(z) = +\infty$ pour tout z non réel, ou bien $M_h(z) < +\infty$ partout; dans le premier cas et dans ce cas seulement, le système des polynômes est dense dans C_h .
G. Bourion.

Abramov, L. M.: Über das asymptotische Verhalten der Lebesgueschen Funktionen gewisser Summationsmethoden für Čebyševsche Reihen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 98, 173–176 (1954) [Russisch].

Eine stetige Funktion $f(x)$ sei in $[-1, +1]$ in eine Reihe nach Tschebyscheffschen Polynomen entwickelt; die n -te Teilsumme dieser Entwicklung sei $s_n(f; x)$ und $\sigma_{n,p}(f; x) = \frac{1}{p+1} \sum_{r=0}^n s_r(f; x)$. Es wird das asymptotische Verhalten der Lebesgueschen Funktionen $L_{n,p}(x) = \sup_{|f| \leq 1} \sigma_{n,p}(x)$ angegeben.
G. Freud.

Rogosinsky, W. W.: Linear extremum problems for real polynomials and trigonometrical polynomials. — (Corrigenda.) Arch. der Math. 6, 87 (1954).

In der entsprechenden Arbeit (dies. Zbl. 55, 62) wurden die Untersuchungen nur für den Fall der gewöhnlichen Polynome explizit ausgeführt. Für die trigonometrischen Polynome wurden die analogen Ergebnisse zusammengestellt. Dabei bemerkte Verf., daß dem Satz IIb kein trigonometrisches Analogon zur Seite gestellt werden kann. Verf. berichtigt diese Bemerkung dahingehend, daß ein solches Analogon doch existiert, und gibt die Formulierung des entsprechenden Satzes zusammen mit einer Beweisanleitung an. Gleichzeitig werden einige andere Ergänzungen vorgenommen.
H.-J. Kowalsky.

Heywood, P.: On the integrability of functions defined by trigonometric series. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 5, 71–76 (1954).

As duals of some theorems of the reviewer (this Zbl. 39, 295) on Fourier series and integrals of monotonic functions, R. P. Boas (this Zbl. 46, 296) and G. Sunouchi [J. of Math. 1, 99–103 (1953)] have proved the following theorems on trigonometric series $f(x) = \frac{1}{2} \lambda_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cos nx$, $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sin nx$ with coefficients λ_n tending monotonically to 0: (i) For $0 < \gamma < 1$, $x \in f(x) \in L(0, \pi)$ if and only if $\sum n^{\gamma-1} \lambda_n$ converges. (ii) For $0 < \gamma < 1$, $x \in g(x) \in L(0, \pi)$ if and only if $\sum n^{\gamma-1} \lambda_n$ converges. — In the present paper it is proved that (i) is valid also for $1 < \gamma < 2$, and that (ii) is valid also for $1 < \gamma < 3$ if one replaces the condition of the monotonicity of λ_n by the condition that λ_n is ultimately non-negative and that the series $\frac{1}{2} \lambda_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ converges to the sum 0. Using some results of P. Hartman and A. Wintner (this Zbl. 50, 72) it is also shown that these theorems break down for $\gamma > 2$ and for $\gamma > 3$, respectively.
B. Sz. Nagy.

Mohanty, R. and M. Nanda: Note on the first Cesaro mean of the derived Fourier series. Proc. Amer. math. Soc. 5, 565–570 (1954).

Ist $f(x) \in L(-\pi, +\pi)$ und periodisch mit 2π , so gilt für die ersten arithmetischen Mittel $t_n(x)$ der abgeleiteten Fourierreihe von f die Beziehung $t_n(x) = o(\log n)$ an jeder Stelle x , zu der es eine Konstante c gibt mit $\int_0^t |g(u) - c| du = o(t)$ ($t \rightarrow 0$).

$g(t) = [f(x+t) - f(x-t)]/2 \sin(t/2)$. Gilt für ein x die Beziehung $g(t) \rightarrow c$ ($t \rightarrow 0$), so ist für dieses x die Reihe $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{r B_r(x)}{\log(r+1)}$ ($C, 1$) summierbar [$n B_n(x) = n(b_n \cos nx - a_n \sin nx)$ ist das n -te Glied der abgeleiteten Fourierreihe von f].

A. Peyerimhoff.

Siddiqi, Jamil A.: On a theorem of Fejér. Math. Z. 61, 79–81 (1954).

Let $A = \{\lambda_{n,k}\}$, $n, k = 0, 1, 2, \dots$, $\lambda_{n,k} = 0$ for $k > n$ and $\lambda_{n,0} = 1$ be a triangular matrix. Let $\Delta \lambda_{n,k} = \lambda_{n,k} - \lambda_{n,k-1}$. A sequence (s_n) is said to be summable (A) if $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \Delta \lambda_{n,k} S_k$ exists. The conditions for the regularity of the method

are (i) $\lambda_{n,k} \rightarrow 1$ as $n \rightarrow \infty$ for every fixed k and (ii) $\sum_{k=0}^n |\Delta \lambda_{n,k}| \leq M$, independently of n . Let $f(x)$ be of bounded variation in $(-\pi, \pi)$ and of period 2π . Let $\sum (b_n \cos nx - a_n \sin nx) = \sum c_n(x)$ be the conjugate Fourier series of $f(x)$. The author proves that the sequence $n c_n(x)$ is summable (A) provided the additional condition (iii) $\sum_{k=0}^n |\Delta^2 \lambda_{n,k}| \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$, is satisfied. The (A) -limit is

$\pi^{-1} [f(x+0) - f(x-0)]$. This generalises a theorem of Fejér that, under the same hypothesis, $n c_n(x)$ is summable (C, r) for $r > 0$. The above general result includes the harmonic and Cesaro's means as special cases. (Note: In the proof, $\int_0^\pi |d\psi_n(t)|$ should be interpreted as $\int_{+0}^\pi |d\psi_n(t)|$).

V. Ganapathy Iyer.

Lejbenzon, Z. L.: Über den Ring der Funktionen mit absolut konvergenter Fourierreihe. Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 3, 157–162 (1954) [Russisch].

Let W be the ring of the functions $f(t)$, $-\infty < t < \infty$, where $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i n t}$ is absolutely convergent. The real function $g(t)$ is called admissible if $f(t) \in W$ implies $f(g(t)) \in W$. The author proves the following theorem: if the derivative $g'(t)$ of the admissible function $g(t)$ is absolutely continuous, then $g(t) = n t + a$, where n is an integer and $a = \text{const}$.

J. Gorski.

Tomič, M.: Sur les zéros de séries trigonométriques à coefficients monotones. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. 6, 79–90 (1954).

The author has studied the distribution of zeros of the following trigonometric series: $H_n(\theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n+\nu+1} \cos(n+\nu+1)\theta$, $G_n(\theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n+\nu+1} \sin(n+\nu+1)\theta$, $Q_n(\theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n+\nu+1} \cos(n+2\nu+1)\theta$, (1) $P_n(\theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n+\nu+1} \sin(n+2\nu+1)\theta$, under the assumption that the sequence of coefficients $\{c_{n+\nu+1}\}$ is multiply monotonic, i.e.

$$\Delta^v c_k = c_k - \binom{v}{1} c_{k+1} + \binom{v}{2} c_{k+2} - \dots + (-1)^v \binom{v}{v} c_{k+v} \geq 0$$

and $c_k \rightarrow 0$ as $k \rightarrow \infty$. Two of the four theorems proved by the author are: Theorem 1: If the sequence $\{c_{n+\nu+1}\}$ is only triply monotonic and tends to zero as $\nu \rightarrow \infty$, then $Q_n(\theta)$ possesses at least one zero in every interval

$$(2) \quad k\pi/n \leq \theta_k \leq (k + \frac{1}{2})\pi/(n+1), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n' = [n/2].$$

The other zeros are situated in the intervals symmetrical to (2) with respect to $\pi/2$. Theorem 2: If $\{c_{n+\nu+1}\} \rightarrow 0$ as also $\Delta^2 \{c_{n+\nu+1}\} \rightarrow 0$, then the series (1) has got precisely n zeros in the interval $(0, \pi)$. — Theorem 1 generalizes a result of G. Szegő (cf. Orthogonal polynomials § 6.9) in that the sequence $\{c_{n+\nu+1}\}$ is supposed to be only triply monotonic instead of completely monotonic and the bounds for the zeros given in (2) are more precise.

U. N. Singh.

Hyltén-Cavallius, Carl: A positive trigonometrical kernel. 12. Skand. Mat.-Kongr., Lund 1953, 90—94 (1954).

L'A. dimostra che per $0 < x < \pi$, $-\pi < t < \pi$ e $|t| \neq x$, $t \neq 0$, si ha

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu x \sin (\nu-1/2)t}{\nu \cdot 2 \sin (t/2)} > 0$$

e ne deduce una limitazione di Fejér e alcune limitazioni di Turàn (questo Zbl. 48, 304). L'A. osserva anche che per $0 < x < \pi$, $0 < t < \pi$ e $t \neq x$ si ha

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu x \cos (t/2) - \cos (\nu+1/2)t}{\nu \cdot 2 \sin (t/2)} > 0.$$

G. Sansone.

Spezielle Funktionen:

Marx, Imanuel: On the structure of recurrence relations. Michigan math. J. 2, 45—50 (1954).

Es werden einige einfache notwendige Bedingungen für die Koeffizientenfunktionen gewisser Rekursionsformeln betrachtet, die zwischen Lösungen gewisser Typen gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu verschiedenen Parameterwerten als bestehend angenommen werden. Verf. weist insbesondere auf eine im Druck befindliche Arbeit über „Rekursionsformeln“ für Sphäroidfunktionen hin, die er mit Hilfe einer von Whittaker für die Mathieschen Funktionen verwandten Methode erhalten habe. Ref. hält es für irreführend, wenn Whittaker und Verf. bei den für die Mathieschen Funktionen angegebenen Formeln von Rekursionsformeln sprechen. Denn die in diesen „Rekursionsformeln“ auftretenden Koeffizientenfunktionen sind (im Gegensatz zum Falle der hypergeometrischen Funktionen) nicht als einfachere Funktionen gegeben, sondern nur durch eben die verknüpften Funktionen ausgedrückt. Etwas Derartiges ist aber einerseits praktisch unbrauchbar und andererseits in gewissem Sinne trivial. (Man vergleiche hierzu, dem Verf. anscheinend unbekannt: J. Meixner, dies. Zbl. 43, 75, J. Meixner-F. W. Schäffe, Mathiesche Funktionen und Sphäroidfunktionen, Berlin 1954, insbesondere S. 208 209.) Es besteht Grund zu der Annahme, daß dies ganz allgemein für die Mathieschen und Sphäroidfunktionen nicht anders sein kann, also keine einfachen Rekursionsformeln existieren, die in Analogie zu denen von hypergeometrischen Funktionen gesetzt werden könnten. F. W. Schäffe.

● **Goudet, Georges:** Les fonctions de Bessel et leur applications en Physique. (Collection d'Ouvrages de Mathématiques à l'Usage des Physiciens.) 2^{ème} éd. revue et corrigée. Paris: Masson et Cie. 1954 90 p. 26 Abb. 8 tables. 600 fr.

Nach einem einleitenden historischen Kapitel I folgt im Kap. II die Integration der Besselschen Differentialgleichung mit Hilfe des Reihenansatzes. Kap. III bringt dann eine Reihe der wichtigsten Eigenschaften der Zylinderfunktionen. Da die Reihendarstellungen im Vordergrund stehen, sind die Herleitungen z. T. unnötig mühsam bzw. fehlen ganz, wie etwa bei den asymptotischen Entwicklungen. Das Büchlein schließt mit einigen Anwendungen: elektromagnetische Hohlraum-schwingungen, Skineffekt, Wärmeleitung im Zylinder, Beugung. F. Penzlin.

Muller, G. M.: On the indefinite integrals of functions satisfying homogeneous linear differential equations. Proc. Amer. math. Soc. 5, 716—719 (1954).

Lommel hat bekanntlich eine Formel aufgestellt, die das unbestimmte Integral über die mit z^ν multiplizierte Zylinderfunktion $Z_\nu(z)$ durch die nach ihm benannte Lommelsche Funktion $S_{\mu,\nu}(z)$ ausdrückt. Diese Funktion ist eine Partikularlösung der inhomogenen Besselschen Differentialgleichung. In der vorliegenden Arbeit wird die Frage erhoben und unter gewissen Voraussetzungen auch beantwortet, welche Formel an die Stelle der Lommelschen Beziehung für das unbestimmte Integral treten muß, wenn es sich in wesentlicher Verallgemeinerung um das Integral

$\int u(z) f(z) dz$ handelt, worin $u(z)$ die Lösung einer willkürlichen, linearen Differentialgleichung und $f(z)$ eine willkürliche Funktion ist. Die Lösung der Aufgabe gelingt durch die Einführung des n -dimensionalen, integrierenden Vektors mit den Komponenten $h_i(z)$, $i = 1, \dots, n$, und es wird angegeben, wie diese Hilfsfunktionen $h_i(z)$ berechnet werden können, damit das Integral aufgelöst werden kann. Zum Schluß werden die erhaltenen Resultate auf die Differentialgleichung von Zahn $u''' - 2z^{-1}u'' + 2z^{-1}u = 0$ angewendet. *H. Buchholz.*

Delsarte, Jean: Sur certains systèmes d'équations aux dérivées partielles à une seule fonction inconnue, et sur une généralisation de la théorie des fonctions de Bessel et des fonctions hypergéométriques. Centre Belge Rech. math., Colloque équations aux dérivées partielles, Louvain 17–19 déc. 1953, 35–62 (1954).

Im § 1 wird gezeigt, daß die Lösungen von n algebraisch unabhängigen linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen mit n komplexen Veränderlichen x_1, \dots, x_n für eine Funktion einen endlichdimensionalen Vektorraum bilden.

§ 2. Es sei C^n der n -dimensionale komplexe Vektorraum: $x = (x_1, \dots, x_n) \in C^n$. \tilde{C}^n sei der duale Raum von C^n : $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \tilde{C}^n$. $\langle x, \xi \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \xi_i$. G sei

eine kompakte Gruppe von linearen Abbildungen von C^n : $A \in G$, $A \in C^n \rightarrow C^n$; G^* sei die Gruppe der adjungierten Abbildungen: $A^* \in G^*$, $A^* x, \xi = \langle x, A^* \xi \rangle$.

Mit Hilfe des Hilbertschen Basissatzes [Existenz von p (in bezug auf G) invarianten Formen $u_1(x), \dots, u_p(x)$, die eine Basis für Polynome in x bilden; entsprechende Formen $v_1(\xi), \dots, v_p(\xi)$ für G^*] werden ein algebraisches partielles Differentialgleichungssystem und die Basis für Differentialinvarianten der Gruppe G konstruiert. Es werden folgendermaßen allgemeine Besselfunktionen in bezug auf G definiert (sie alle sind Lösungen gewisser Gleichungssysteme obiger Art):

$$J_{\text{def}} \int_{A \in G} \exp \langle A x, \xi \rangle dA = \iint_{G \times G} \exp \langle A x, B^* \xi \rangle dA dB^* = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} q_k(u, v) = J(u, v);$$

$[q_i(u, v)$ ($i = 1, 2, \dots$) Polynome von $u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_p$. Integrationen in bezug auf das Haarsche Maß]. § 3. Es wird ein Spezialfall von G eingehender untersucht: G sei die Gruppe der diagonalen Substitutionen: $x' = A x$; $x'_i = a_i x_i$ ($i = 1, \dots, n$),

wobei $|a_i| = 1$, $\prod_{k=1}^n a_k^{m_{jk}} = 1$, $M = (m_{jk})$ eine $p \times m$ -Matrix des Ranges p und m_{jk} ganz sein soll. Es werden allgemeine Besselfunktionen höherer Ordnung $q = (q_1, \dots, q_n)$ (q_i ganz) definiert:

$$J_a \text{ def } \prod_{i=1}^n \xi_i^{q_i} x_i^{q_i} \int_{A \in G} \exp \langle A(x), \xi \rangle \cdot \prod_{k=1}^n a_k^{q_k} dA.$$

wobei
$$\exp \langle x, \xi \rangle = \sum_k \left(\prod_{i=1}^n (\xi_i x_i)^{k_i} \frac{1}{k_i!} \right)$$

und die Summation über alle positiven Gitterpunkte des n -dimensionalen (reellen) Raumes $[k = (k_1, \dots, k_n)]$ erstreckt sei. Es folgt die Definition für beliebige $q \in C^m$. Die J_q sind Hauptcharaktere einer abelschen Hypergruppe. Die klassischen Zylinderfunktionen bekommt man als Spezialfall $p = 1$, $n = 2$; $M(1, 1)$. Zum Schluß wird auf eine sehr weitgehende Verallgemeinerung verschiedener hypergeometrischer Funktionen hingewiesen; der Verf. verspricht, auf dieses letzte Thema zurückzukommen.

K. Maurin.

MacRobert, T. M.: Integrals involving a modified Bessel function of the second kind and an E -function. Proc. Glasgow math. Assoc. 2, 93–96 (1954).

Auswertung der beiden Integrale $\int_0^\infty t^{k-1} K_n(t) E(p; \alpha_r; q; q_s; zt) dt$ und $\int_0^\infty e^{-\lambda} \lambda^{k-1} K_n(\lambda) E(p; \alpha_r; q; q_s; z\lambda) d\lambda$ für $p \geq q + 1$, $\Re(k \pm n + \alpha_r) > 0$, $r = 1, 2, \dots, p$, $|\arg z| < \pi$ durch E -Funktionen.

O. Volk.

Ragab, F. M.: An integral involving a product of two modified Bessel functions of the second kind. Proc. Glasgow math. Assoc. 2, 85–88 (1954).

Darstellung des Integrals $\int_0^{\infty} e^{-\lambda} \lambda^{k-1} K_m(\lambda) K_n\left(\frac{z}{\lambda}\right) d\lambda$, $\Re(z) = 0$, durch hypergeometrische Funktionen. O. Volk.

● Sonin, N. Ja.: Untersuchungen über Zylinderfunktionen und spezielle Polynome. Redaktion und Kommentare von N. I. Achiezer. (Bibliothek der Russischen Wissenschaft. Mathematik, Mechanik, Physik, Astronomie.) Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1954. 244 S. R. 6. – [Russisch].

Das Buch enthält ausgewählte Arbeiten von N. Ja. Sonin über die im Titel genannten Funktionen, und zwar im einzelnen: Recherches sur les fonctions cylindriques et le développement des fonctions continues en séries, Math. Ann. 16, 1–80 (1880). Sur les fonctions cylindriques I und II, Math. Ann. 30, 582–583 (1887), 59, 529–552 (1904); Verallgemeinerung einer Abelschen Formel; Über das Verhalten eines mehrfachen Integrals; Sur les termes complémentaires de la formule sommatoire d'Euler et de celle de Stirling, Ann. sci. Écol. norm. sup., III. Sér. 6, 257–262 (1889)

und eine Arbeit darüber, wie weit die Funktion $\int_0^x f(x) dx$, ($a < r < b$), durch

Vorgabe der Konstanten $\int_a^b f(x) x^n dx$, $0 \leq n \leq 2m-1$, bestimmt ist (die nicht genauer zitierten Arbeiten befinden sich in unzugänglichen russischen bzw. polnischen Zeitschriften). Es findet sich ferner ein Lebenslauf (mit Bild von Sonin und Verzeichnis seiner Schriften und sehr illustrative Kommentare von N. I. Achiezer, auch über die restlichen Arbeiten von Sonin. Es ist sehr erfreulich, daß nun diese schönen Arbeiten, von denen einige klassisch geworden sind, in Buchform zur Verfügung stehen. K. Prachar.

Brusencov, N. P.: Über die Wellenfunktionen des elliptischen Zylinders. Vestnik Moskovsk. Univ. 9, Nr. 9 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 6), 23–31 (1954) [Russisch].

Verf. schlägt ein vom üblichen etwas abweichendes Grundsystem von Mathieuschen Funktionen vor, z. B. die „Mathieu-Besselsche Funktion“

$$\text{Jc}_n(\sigma, \varrho) = \frac{i^n}{2\pi \text{ce}_n(\sigma, 0)} \int_0^{2\pi} e^{i\sqrt{\varrho^2 + \sigma^2} \cos \varphi} \text{ce}_n(\sigma, \varphi) d\varphi.$$

Verf. geht von der Separation der Schwingungsgleichung $\Delta \psi + k^2 \psi = 0$ in den Koordinaten $q, \varrho = kr$ aus, wobei $x = \sqrt{r^2 + \varrho^2} \cos q$, $y = r \sin q$ und $\sigma = kc$ gesetzt wird (siehe auch Meißner-Schäfer, Mathieusche Funktionen und Späroidfunktionen, Berlin 1954). K. Prachar.

Szegő, G.: On the singularities of zonal harmonic expansions. J. rat. Mech. Analysis 3, 561–564 (1954).

Verf. beweist den folgenden Satz: Es sei $\{a_n\}$ eine (reelle) Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = 1$. Ist $u(r, \theta)$ die durch $u(r, \theta) = \sum a_n r^n P_n(\cos \theta)$ [$P_n(x)$ = Legendresche Polynome] erklärte zonale harmonische Funktion und $f(z) = \sum a_n z^n$ ($z = r e^{i\theta}$), so sind $u(r, \theta)$ und $f(z)$ für $r < 1$ regulär. Es gilt nun: Genau dann ist $u(r, \theta)$ in einem Punkt $(r = 1, \theta)$ regulär, wenn $f(z)$ für $z = e^{i\theta}$ regulär ist. – Die Wichtigkeit dieses Satzes liegt auf der Hand: zu Sätzen über Potenzreihen, in denen eine Regularitätsvoraussetzung auftritt, liefert er sofort ein Analogon für Entwicklungen nach Kugelfunktionen. – Der Beweis geht ganz direkt vor, die Funktionen u und f werden durcheinander ausgedrückt. A. Peyerimhoff.

Olsen, Haakon: On a certain identity in Laguerre polynomials and the related Hankel transform. Arch. Math. Naturvid. 52, 1–8 (1954).

As pointed out by the author, it is possible to evaluate many sums by means of integral transforms and conversely the knowledge of summation formulae may be utilized to deduce new transforms. The object of the paper is to prove the following identity fulfilled by the Laguerre polynomials

$$\sum_{k=0}^l \sum_{k'=0}^{l'} \binom{v}{l-k} \binom{n'}{l'-k'} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(-1)^{k'}}{k'!} (n' - l' + k + k')! L_{n'-l'+k+k'}^{(v-n'+l'-l)}(x) \\ = \left(\frac{n'!}{l'!} \right) (-1)^{l'-l} L_l^{(l'-l)}(x) L_{n'-n'}^{(v-n')}(x),$$

(n', l, l' non-negative integers, v arbitrary complex) from which the related Hankel transform is found to be

$$\int_0^\infty J_{(v-l)-(n'-l')} \left(2\sqrt{xt} \right) e^{-t} t^{l(v-l)+(n'-l')/2} L_l^{(v-l)}(t) L_{l'}^{(n'-l')}(t) dt \\ = \left(\frac{n'!}{l'!} \right) e^{-x} x^{l(v-n')+(l-l')/2} L_l^{(l'-l')}(x) L_{n'-n'}^{(v-n')}(x),$$

two relations which, to the authors knowledge, have not so far been communicated. This identity constitutes a generalization of a formula given by W. T. Howell (this Zbl. 18, 255). There are some smaller misprints in the paper. *R. Gran Olsson.*

Hylleraas, Egil: Expansion of products of Laguerre polynomials. Arch. Math. Naturvid. 52, 69—72 (1954).

Adopting the same definition and notation of associated Laguerre polynomials as in the preceding review, namely, for integral m $(1) L_{n-m}^{(m)}(x) = (-1)^m L_{n-m}^{(m)}(x) (n-m)!$ in terms of conventionally defined Laguerre polynomials, the author makes use of the following representations

$$(2) L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\exp[-xs/(1-s)]}{(1-s)^{\alpha+1}} \frac{ds}{s^{\alpha+1}} = \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{(-x)^k}{k!} = x^\alpha \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\alpha} e^{-x}).$$

In this notation the identity derived from the Howell formula (this Zbl. 18, 255) reads

$$(3) [L_n^{(\alpha)}(x)]^2 = \sum_{k=0}^n \sum_{k'=0}^{n'} \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\alpha}{n-k'} \binom{k+k'}{k} (-1)^{k+k'} L_{k+k'}^{(2\alpha)}(x).$$

With some smaller changes the generalized formulae given in the preceding review can be written in a similar form

$$(4) L_n^{(\alpha)}(x) L_n^{(\beta)}(x) = \sum_{k=0}^n \sum_{k'=0}^{n'} \binom{n'+\beta}{n-k} \binom{n+\alpha}{n-k'} \binom{k+k'}{k} (-1)^{n+n'-k-k'} L_{k+k'}^{(\alpha+\beta)}(x).$$

Using the recurrence formula $(5) (n'+1) L_{n'+1}^{(\beta)}(x) = (2n'+1+\beta-x) L_{n'}^{(\beta)}(x) - (n'+\beta) L_{n'-1}^{(\beta)}(x)$ and the corresponding formula for $L_{k'+k}^{(\alpha+\beta)}(x)$ the formula (4) can be proved by induction supposing (4) to be true for a given n' and deriving the corresponding formula for the index $(n'+1)$.

R. Gran Olsson.

Nörlund, Niels Erik: Über hypergeometrische Funktionen. Arch. der Math. 5, 258—265 (1954).

Schreibt man die hypergeometrische Differentialgleichung n -ter Ordnung in der Form $(\vartheta - \gamma_1)(\vartheta - \gamma_2) \cdots (\vartheta - \gamma_n) y = z(\vartheta + \alpha_1)(\vartheta + \alpha_2) \cdots (\vartheta + \alpha_n) y = 0$, $\vartheta y = z dy/dz$, $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ die Parameter, so gibt es eine, im Punkte $z=1$ singuläre Lösung, die sich für $z=1|z|<1$ in der Form darstellen läßt:

$$\xi_n(z) = z^{\gamma_1} (1-z)^{\beta_n} \sum_{r=0}^{\infty} g_{r,n}^{(i)} (1-z)^r, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad \beta_n = n-1 - \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \gamma_i)$$

nicht ganz oder Null. Verf. kann die $g_{r,n}^{(i)}$ explizit durch Induktion gewinnen. Ferner gibt er für diese Lösung die beiden Integraldarstellungen:

$$\xi_n(z) = \Gamma(\beta_n + 1) (2\pi i)^{-1} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} z^{-x} \prod_{s=1}^n \frac{\Gamma(x + \gamma_s)}{\Gamma(x - \alpha_s + 1)} dx, \quad [0 < z < 1, \Re(k + \gamma_s) > 0,$$

$s = 1, \dots, n]$ und (mit $\Re(\gamma_0) < \Re(\gamma_s + \beta_n + 1)$, $s = 1, \dots, n$) $\xi_n(z) =$

$$\frac{\Gamma(\gamma_n + 1)}{2\pi i} (1-z)^{\gamma_n+1} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} z^{1-1} (1-x)^{\gamma_n} \prod_{s=1}^n \frac{\Gamma(x+\gamma_s)}{\Gamma(x+\gamma_s+1)} F(x+\gamma_0, \dots, x+\gamma_n) dx$$

gültig in der ganzen Ebene, die längs der Achse des Reellen von 1 bis $+\infty$ und von 0 bis $-\infty$ aufgeschlitzt ist. O. Volk.

Watson, G. N.: A reduction formula. Proc. Glasgow math. Assoc. **2**, 57—61 (1954).

Auf dem Weg über die Differentialgleichung zweiter Ordnung, der der Integrand des Integrals $I_n = \int_0^1 x^n (1-x)^{\beta} \frac{d^n \{x^{\gamma} (1-x)^{\delta}\}}{dx^n} dx$ genügt, wird die Rekursion be-

wiesen: $P_n I_{n+2} - Q_n I_{n+1} + R_n I_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, wo

$$P_n = (\sigma - n)(\alpha + \gamma - n - 1)(\beta + \delta - n - 1),$$

$$Q_n = (2\sigma - 2n - 1)[(\beta\gamma - \alpha\delta)(\sigma + 1) + \Theta_3(n+1)(2\sigma - n)],$$

$$R_n = (n-1)(\sigma - n - 1)(2\sigma - n - 1)(\alpha + \beta - n)(\gamma + \delta - n),$$

$$2\sigma = \alpha + \beta + \gamma + \delta, \quad 2\Theta_3 = \alpha - \beta - \gamma + \delta;$$

$$I_0 = \Gamma(\alpha + \gamma + 1)\Gamma(\beta + \delta + 1)/\Gamma(2\sigma + 2),$$

$$I_1 = \Gamma(\alpha + \gamma)\Gamma(\beta + \delta)(\beta\gamma - \alpha\delta)/\Gamma(2\sigma + 1).$$

Ferner zeigt Verf., daß ist

$$I_n = \Gamma(\alpha + \gamma - n - 1)\Gamma(\beta + \delta - n - 1)H_n/\Gamma(2\sigma - n + 2),$$

$$H_n = \sum_{r=0}^n (-1)^{n-r} \binom{n}{r} (-\gamma)_{n-r} (\beta + \delta - n - 1)_{n-r} (-\delta)_r (\alpha + \gamma - n + 1)_r;$$

H_n genügt der Rekursion $(2\sigma - n)(\sigma - n)H_{n-2} - Q_n H_{n+1} + S_n H_n = 0$,

$$S_n = (n-1)(\sigma - n - 1)(\alpha + \beta - n)(\gamma + \delta - n)(\alpha + \gamma - n)(\beta + \delta - n).$$

O. Volk.

Bailey, W. N.: Contiguous hypergeometric functions of the type ${}_3F_2(1)$. Proc. Glasgow math. Assoc. **2**, 62—65 (1954).

Verf. gibt für von G. N. Watson (vgl. vorhergehend. Referat) gegebene Rekursionen Darstellungen mittels der hypergeometrischen Funktion ${}_3F_2(1)$ in der Form:

$$(1) \quad (2\sigma - n)(\sigma - n)(\gamma - n)(\gamma - n - 1)(\beta + \delta - n)(\beta + \delta - n - 1)K_{n+2} - Q_n(\gamma - n)(\beta + \delta - n)K_{n+1} + S_n K_n = 0,$$

$$(2) \quad (2\sigma - n)(\gamma - n)(\beta + \delta - n - 1)(\alpha + \beta - n - 1)L_{n+2} - Q_n L_{n+1} + (n+1)(\sigma - n - 1)(\gamma + \delta - n)(\alpha + \gamma - n)L_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\text{wo} \quad K_n = {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -n, -\delta, \alpha + \gamma - n + 1 \\ 1 + \gamma + n, -\beta - \delta \end{matrix}; 1 \right] = \frac{(-1)^n (-\alpha - \beta)_n}{(-\gamma)_n} L_n,$$

$$L_n = {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -n, -\beta, n - 2\sigma - 1 \\ -\beta - \delta, -\alpha - \beta \end{matrix}; 1 \right].$$

Indem er eine allgemeine Methode angibt, wie man zwischen hypergeometrischen Funktionen vom Typ ${}_3F_2 \left[\begin{matrix} a, b, c \\ d, e \end{matrix}; x \right]$ zu Rekursionen kommen kann, kann er zeigen, daß die obigen Rekursionen auch für beliebige, nicht ganze, positive n gelten. Zum Schluß skizziert er die Ausdehnung der Resultate auf hypergeometrische Reihen beliebiger Ordnung. O. Volk.

Funktionentheorie:

● Carathéodory, C.: Theory of functions of a complex variable. Vol. II. Translated by F. Steinhardt. New York: Chelsea Publishing Company 1954. 220 p. \$ 4,50.

Heffter, Lothar: Gleichmäßige Differenzierbarkeit einer Funktion und Stetigkeit ihrer Ableitung in einem Bereich. Arch. der Math. **6**, 45—46 (1954).

Ergänzung der gleichbetitelten Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **47**, 310), wodurch ein Beweis nachgetragen wird. *H. Hornich.*

Fekete, Michel: Approximations par polynomes avec conditions diophantiennes. C. r. Acad. Sci., Paris **239**, 1337—1339 (1954).

Verf. untersucht das folgende Approximationsproblem: Welche Bedingungen müssen eine beschränkte, abgeschlossene Punktmenge E der z -Ebene und eine auf E stetige Funktion $f(z)$ erfüllen, damit $f(z)$ auf E gleichmäßig und konvergent durch Polynome approximiert werden kann, deren Koeffizienten ganze algebraische Zahlen aus einem gegebenen imaginär-quadratischen Zahlkörper $P(\eta)$ sind? Ist $\tau(E)$ der transfinite Durchmesser von E und bedeutet $N(E; P(\eta))$ diejenige Teilmenge von E , die aus den Wurzeln aller Gleichungen $z^m + l_1 z^{m-1} + \dots + l_m = 0$ besteht, deren Koeffizienten ganze algebraische Zahlen aus $P(\eta)$ sind, die in $P(\eta)$ irreduzibel sind und alle ihre Wurzeln auf E haben, so besteht $N(E; P(\eta))$ aus höchstens endlich vielen Punkten z_1, z_2, \dots, z_n , falls $\tau(E) < 1$ ist. Als notwendige Bedingungen ergeben sich: 1. $\tau(E) < 1$, 2. $N(E; P(\eta))$ nicht leer 3. Das zu den Stellen z_1, z_2, \dots, z_n gehörige Lagrangesche Polynom $l(z)$ der Funktion $f(z)$ muß als Koeffizienten ganze, algebraische Zahlen aus $P(\eta)$ haben. In einer folgenden Note will Verf. zeigen, daß diese Bedingungen auch hinreichend sind.

P. Heuser.

Walsh, Joseph L.: Sur l'approximation par fonctions analytiques bornées. C. r. Acad. Sci., Paris **239**, 1339—1341 (1954).

Ein früheres Resultat des Verf. über den Approximationsgrad der in einem von Jordankurven begrenzten Ringgebiet analytischen Funktion $f(z)$ (dies. Zbl. **19**, 404) wird durch Verwendung einer neuen Methode, die das Verhalten auf dem Rande berücksichtigt, verschärft.

P. Heuser.

Kuzmina, A. L.: Über Reihen nach Orthogonalpolynomen. Ukrain. mat. Žurn. **6**, 363—366 (1954) [Russisch].

Soit $\{p_n(x)\}$ la suite des polynomes orthonormaux sur la courbe analytique C relativement au poids $|v(x)|^2$, $v(x)$ étant régulière et non nulle sur C et dans l'extérieur de C . Selon la méthode bien connue pour les séries de polynomes de Faber, l'évaluation asymptotique des $p_n(x)$ ramène l'étude de la série $\sum c_n p_n(x)$, où $\sum |c_n|^2 < +\infty$, sur la courbe frontière de son domaine de convergence, à l'étude analogue pour $\sum c_n z^n$.

G. Bourion.

Makar, Ragy H.: Effect of the addition of the unit set on the order of a simple monic set of polynomials. Duke math. J. **21**, 75—78 (1954).

Es sei $\{p_n(z)\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) eine einfache normierte Polynomfolge, welche algebraisch vom Grade m ist und den Rang ω besitzt, d. h. es ist $p_i(z) = \sum_{j=1}^i p_{ij} z^j$ mit $p_{ii} = 1$, die Matrix $P = [p_{ij}]$ genügt der Gleichung $(P - I)^m = 0$ und man hat $\omega = \lim_{R \rightarrow \infty} \omega(R) = \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \omega_n(R)}{n \log n} \right\}$, wobei $z^n = \sum_i \pi_{ni} p_i(z)$ und $\omega_n(R) = \sum_i |\pi_{ni}| \max_{|z|=R} |p_i(z)|$ ist. Verf. beweist dann, daß die Polynomfolge $\{u_n(z)\} = a \{p_n(z)\} + b \{z^n\}$, $a + b = 1$, eine Ordnung Ω hat, für welche $\omega(m-1) \leq \Omega \leq (m-1)\omega$ gilt. Obere und untere Schranke können nicht verbessert werden.

E. Lammel.

Makar, Ragy H.: On algebraic basic sets of polynomials. I. II. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **57**, 57—68, 69—76 (1954).

1. Eine Polynomfolge (1) $\{p_n(z)\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) heißt basisch, wenn jedes Polynom eindeutig als endliche Linearkombination der Glieder der Folge dargestellt werden kann. Ist $p_i(z) = \sum_j p_{ij} z^j$, so heißt die basische Polynomfolge (1) algebraisch, wenn die Koeffizienten-

matrix $P = [p_{ij}]$ einer algebraischen Gleichung genügt. Jeder gegebenen Funktion $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ läßt sich formal eine Reihe (2) $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p_n(z)$ zuordnen. Man sagt, daß (2) die Funktion $f(z)$ in einem Bereiche darstelle, wenn (2) im betreffenden Bereiche gleichmäßig gegen $f(z)$ konvergiert. Eine basische Polynomfolge (1) heißt in einem abgeschlossenen Kreise $|z| \leq R$, $R > 0$ effektiv, wenn für jede in $|z| \leq R$ reguläre Funktion $f(z)$ die zugeordnete Reihe (2) $f(z)$ in $|z| \leq R$ darstellt. Verf. beweist zunächst folgendes Theorem: Ist (1) eine algebraisch basische Polynomfolge (a. b. P.), welche für $a \leq R < b$ oder $a \leq R = b$ der Bedingung (2) $A(R) \leq R$ genügt, wobei $A(R) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{A_n(R)\}^{1/n}$, $A_n(R) = \max_{|z|=R} p_n(z)$ ist, so verhält sich die betreffende Polynomfolge in jedem Kreise $|z| \leq R$, $a \leq R < b$ effektiv. Sie ist in jedem Kreise $|z| \leq R$, $a \leq R = b$ effektiv, wenn sie in $a \leq R < b$ der Bedingung (3) genügt und $A(R)$ für $R = b$ stetig ist. Hierauf zeigt Verf., daß eine a. b. P. (1) in $|z| \leq R$ effektiv ist, wenn $A(r) \leq R$ für alle $r \leq R$ gilt. Weiter wird bewiesen, daß eine a. b. P. (1) sich im Ursprung $z = 0$ effektiv verhält, wenn $A(0+) = 0$ ist, wobei $A(0+) = \lim_{R \rightarrow 0+} \{A(R)\}^{1/n}$. Man sagt, daß

sich eine basische Polynomfolge (1) im Ursprung $z = 0$ effektiv verhält, wenn jeder daselbst reguläre Funktion $f(z)$ eine Reihe (2) entspricht, welche $f(z)$ in einem Kreise darstellt, der den Ursprung zum Mittelpunkt hat und einen von $f(z)$ unabhängigen positiven Radius besitzt. Schließlich beweist Verf., daß sich eine a. b. P. (1) für jede ganze Funktion $f(z)$ in $|z| < \infty$ effektiv verhält, wenn $A(0+) < \infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} u(n)/n = \alpha < \infty$ ist, wobei $u(n)$ der Grad des Poly-

noms $p_n(z)$ ist. Es sei noch hervorgehoben, daß bei jedem Theorem durch Beispiele gezeigt wird, inwieweit die als hinreichend erkannten Bedingungen auch notwendig sind. — II. Verf. beweist zunächst folgendes Theorem über Aggregate von Potenzfolgen: Es sei (1) $\{p_n(z)\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) eine einfache und normierte algebraische Polynomfolge und (2) $a_0 \{p_n(z)\}^s + a_1 \{p_n(z)\}^{s-1} + \dots + a_{s-1} \{p_n(z)\} + a_s z^n$, (3) $a_0 - a_1 + \dots + a_s = 0$, s natürliche Zahl, eine Polynomfolge, welche vom gleichen Grade wie (1) algebraisch ist. Haben dann die beiden Folgen (1) und (2) eine oder die andere der folgenden Eigenschaften gemeinsam: a) effektvolles Verhalten (e. V.) auf $|z| \leq R$, b) e. V. im Ursprung und c) e. V. für jede ganze Funktion, so besitzen alle Polynomfolgen (2) mit der Eigenschaft (3) die nämlichen Eigenschaften. Hierauf werden algebraisch basische Polynomfolgen (a. b. P.) mit vorgegebenen Nullstellen betrachtet. Es sei (4) $p_n(z) = k_n(z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_{u(n)})$ und $\{p_n(z)\}$ eine a. b. P., bei welcher (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} u(n)/n = \alpha < \infty$,

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n^{1/n} = M < \infty$ und die Nullstellen eine beschränkte Punktmenge bilden. $\{p_n(z)\}$ verhält sich dann für jede ganze Funktion effektiv. Wenn eine a. b. P. $\{p_n(z)\}$ der Bedingung (5) genügt, ferner der Bedingung (6) mit $M = 1$ und außerdem die Nullstellen von $p_n(z)$ in dem Kreise $|z| \leq k n^{\lambda}$, $\lambda > 0$ liegen, so verhält sich $\{p_n(z)\}$ auf jedem Kreise $|z| \leq R$ effektiv, wenn $\alpha = 1$, und auf jedem Kreise $|z| \leq R$ mit $R < 1$, wenn $\alpha < 1$. — Es sei $\{p_n(z)\}$ eine a. b. P. mit den Eigenschaften (5) und (6), die Nullstellen der $p_n(z)$ sollen eine beschränkte Punktmenge bilden und schließlich sei außerdem $\lim_{n \rightarrow \infty} c(n)/u(n) = \beta < \alpha$, wobei $c(n)$ die Anzahl der

Nullstellen von $p_n(z)$ bedeutet, welche > 0 sind. $\{p_n(z)\}$ verhält sich dann im Ursprung effektiv. Durch ein einfaches Beispiel zeigt Verf., daß eine a. b. P. ihren algebraischen Charakter verlieren kann, wenn man ihre Glieder durch passende Zahlen dividiert. Diesem merkwürdigen Verhalten ist es zuzuschreiben, daß in den voranstehenden Sätzen auch den Koeffizienten k_n Bedingungen auferlegt werden müssen. Die Arbeit schließt mit einigen Theoremen über a. b. P. mit vorgegebenen Koeffizienten, von denen nur das folgende angeführt sei: Die a. b. P. $\{p_n(z)\}$,

$p_n(z) = \sum_{i=0}^{u(n)} p_{ni} z^i$ verhält sich in $|z| \leq 1$ effektiv, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \{u(n)\}^{1/n} = 1$ und $|p_{ni}| \leq K$, $0 \leq i \leq u(n)$. Wegen näherer Einzelheiten und insbesondere Literaturhinweisen muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden. E. Lommel.

Makar, Ragy H. and Bushra H. Makar: Further results on algebraic basic sets of polynomials. I, II. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 57, 306–318, 319–330 (1954).

1. (1) $\{p_n(z)\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) sei eine basische Polynomfolge und $u(n)$ der Grad von $p_n(z)$. Dann gilt (2) $z^n = \sum_i \pi_{ni} p_i(z)$. Man setzt $\omega_n(R) = \sum_i \pi_{ni} A_i(R)$, wobei $A_i(R) = \max_{|z|=R} p_i(z)$, $\omega(R) = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \omega_n(R)/(n \log n)$ und nennt $\omega = \lim_{R \rightarrow \infty} \omega(R)$ die Ordnung von (1). Außerdem führt man noch A durch $A = \lim_{R \rightarrow \infty} A(R)$, $A(R) = \lim_{n \rightarrow \infty} \log A_n(R)/(n \log n)$ ein. Wie die normierte einfache Polynomfolge $p_0(z) = 1$, $p_n(z) = -2^n z^{n-1} + z^n$, $n \geq 1$ zeigt, kann $A = 0$

und $\omega = \infty$ sein. Im Falle gewisser algebraischer Polynomfolgen lassen sich über den Zusammenhang von A und ω nähere Aussagen machen. Verff. beweisen zunächst folgendes Theorem: $\{p_n(z)\}$ sei eine algebraisch basische Polynomfolge vom Grade m , für welche außerdem (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} u(n)/n$

$= u < \infty$ gilt. Dann ist (4) $\omega \leq (1 + u + \dots + u^{m-1})A$, wobei auch das Gleichheitszeichen auftreten kann. Hierauf wird eine Abschätzung für die Ordnung der Potenzfolge $\{p_n(z)\}^v$ hergeleitet, welche für $v = 1$ in (4) übergeht, wenn $\{p_n(z)\}$ die Voraussetzungen des voranstehenden Theorems erfüllt. — Durch (2) wird einer basischen Polynomfolge (1) eindeutig eine Koeffizientenmatrix (5) $\Pi = [\pi_{ij}]$ zugeordnet. Dann und nur dann entspricht einer Matrix Π eine basische Polynomfolge (1), wenn Π zeilenfinit ist und eine zeilenfinite reziproke Matrix besitzt. Eine solche Matrix soll basisch heißen. Über algebraisch basische Matrizen beweisen Verff. folgendes Theorem: (5) sei eine algebraisch basische Matrix vom Grade m , $\lim_{n \rightarrow \infty} t(n)/n = t < \infty$, wobei $t(n)$ den

Spaltenindex des letzten der in der n -ten Zeile auftretenden Elemente π_{ni} bedeutet und $\lim_{n \rightarrow \infty} \log |\pi_{n, t(n)}| / (n \log n) = B$ mit $|\pi_{n, t(n)}| = \max_i |\pi_{ni}|$. Dann gilt für die Ordnung $\Omega^{(v)}$ der der Matrix Π^v zugeordneten basischen Polynomfolge $\{p_n(z)\}^v$ die Abschätzung $\Omega^{(v)} \leq (1 + t + \dots + t^{m+v-2})B$, wenn $1 \leq v \leq m-1$ und $\Omega^{(v)} \leq (1 + t + \dots + t^{m-3})B$, wenn $v \geq m-1$, wobei das Gleichheitszeichen in allen Fällen auftreten kann. — Schließlich wird durch ein Beispiel gezeigt, daß eine algebraisch basische Polynomfolge mit der Eigenschaft $\lim_{n \rightarrow \infty} \{u(n)\}^{1/n} = 1$ nicht notwendig eine Cannonsche Folge zu sein braucht, wogegen jede algebraisch basische Polynomfolge mit der Eigenschaft (3) eine Cannonsche Folge ist. (1) heißt eine

Cannonsche Folge, wenn $\{N(n)\}^{1/n} \rightarrow 1$, wobei $N(n)$ die Anzahl der in (2) von Null verschiedenen Koeffizienten π_{ni} bedeutet. — II. Verff. beweisen zunächst folgendes Theorem über algebraisch basische Polynomfolgen (a. b. P.): Es sei $\{p_n(z)\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), $p_n(z) = \sum_{i=0}^n p_{ni} z^i$, eine

a. b. P. vom Grade m , bei der $\lim_{n \rightarrow \infty} u(n)/n = u < \infty$ ist und $p_{ni} \leq k M^m n^{4n}$ für alle n und i gilt. Dann verhält sich die Folge $\{p_n(z)\}$ auf jedem Kreise $|z| \leq R$, $R \geq 1$ für jede ganze Funktion der Ordnung $1/\omega$ vom Typus $< 1/\gamma(R)$ effektiv, wobei $\omega = (1 + u + \dots + u^{m-1})A$ ist und $\gamma(R)$ von A, M, R, m und u abhängt. Der für $\gamma(R)$ angegebene Wert ist der bestmögliche. Hierauf wird ein Theorem ähnlichen Charakters hergeleitet. Im weiteren Teil der Arbeit beschäftigen sich die Verff. mit den quasi-einfachen normierten Polynomfolgen (q. n. P.). Ist (1) $P = [p_{ij}]$ mit $p_{ii} = 1$ und $p_{ij} = 0$, $i > j$ eine zeilenfinite Matrix, deren inverse Matrix ebenfalls zeilenfinit ist, so soll die P zugeordnete basische Polynomfolge als q. n. P. bezeichnet werden. Ist (1) eine Matrix, welche einer algebraischen q. n. P. entspricht, so zeigen Verff., daß sich die Matrix $Q = P^{1/s}$, s natürliche Zahl, derart definieren läßt, daß ihr eine q. n. P. entspricht. Von den Ergebnissen, welche Verff. noch über algebraisch q. n. P. erhalten, sei nur folgendes erwähnt: Ist $\{p_n(z)\}$ eine algebraisch q. n. P. vom Grade m und der Ordnung ω , welche außerdem der Bedingung $\lim_{n \rightarrow \infty} u(n)/n = 1$ genügt. Dann gelten für die Ordnung Ω von $\{p_n(z)\}^{1/s}$, wobei s eine natürliche Zahl ist, die Abschätzungen $\omega(2s-1) \leq \Omega \leq (m-1)\omega$, $s \geq m/2$; $(m-1)2$, und $\omega(m-1) \leq \Omega \leq (m-1)\omega$, $s \geq m/2$; $(m-1)2$, je nachdem m gerade oder ungerade ist. Die angegebenen Schranken sind scharf. Wegen der von den Verff. hergeleiteten Konvergenzeigenschaften algebraischer q. n. P. muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden. E. Lammel.

Makar, Ragy H.: On derived and integral basic sets of polynomials. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 218–225 (1954).

Bei den basischen Polynomfolgen (1) $\{p_n(z)\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) unterscheidet man bezüglich ihres Konvergenzverhaltens hauptsächlich zwischen Folgen, welche sich I. auf $z \in R$; II. in $|z| \leq R$; III. auf $z = 0$ für jede Funktion und IV. auf $z = 0$ für jede ganze Funktion effektiv verhalten. Ferner zwischen Folgen, welche sich in bezug auf die ganzen Funktionen mit einer Ordnung $\leq \varrho$ V. in der ganzen Ebene, VI. auf $z \in R$, VII. in $|z| \leq R$ und VIII. auf $z = 0$ effektiv verhalten. Durch Differentiation einer basischen Polynomfolge (1) erhält man die Polynomfolge $\{p'_n\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), welche selbst basisch ist oder durch Hinzunahme eines passenden Polynoms basisch wird. Auch durch Integration einer basischen Polynomfolge (1) bekommt man wieder eine basische Polynomfolge $\{p_v(z)\}$ ($v = 0, 1, 2, \dots$)

mit $p_0(z) = 1$ und $p_v(z) = \int_0^z p_{v-1}(z) dz$, $v = 1, 2, \dots$. Im Anschluß an frühere Arbeiten des Verf. und M. Mursi [Proc. Math. phys. Soc. Egypt. **3** (1948)], M. N. Mikhail (dies. Zbl. **52**, 74) und einer nicht veröffentlichten Thesis von Tantawi (Cairo 1950) beweist Verf. folgende abgerundeten Ergebnisse: a) Hat eine basische Polynomfolge (b. P.) die eine oder andere der Eigenschaften II–V und VII–VIII, so besitzt die abgeleitete Folge die nämlichen

Eigenschaften. b) Hat eine b. P. die Eigenschaften VI und (*) $\log(t_n/(n \log n)) \rightarrow 0$, so hat ihre abgeleitete Folge auch die Eigenschaft VI. D_n bedeutet den Grad des in $z^n = \sum \pi_{nv} p_v(z)$ auftretenden Polynoms höchsten Grades. c) Ist für eine b. P. mit der Eigenschaft I. (**) $D^{(n)} \rightarrow 1$, so hat die abgeleitete Polynomfolge ebenfalls die Eigenschaft I. Die Bedingungen (*) und (**) lassen sich in gewissem Sinne nicht mehr verschärfen. d) Hat eine b. P. eine andere der Eigenschaften I–VIII, so hat die durch Integration sich ergebende b. P. dieselben Eigenschaften.

E. Lammle.

Landau, Henry J.: On uniform approximation to continuous functions by rational functions with preassigned poles. Proc. Amer. math. Soc. 5, 671–676 (1954).

Durch Resultate von J. L. Walsh und durch einen Satz von M. Lavrentieff (dies. Zbl. 17, 206) kennt man die genauen Bedingungen, denen eine Punktmenge E der z -Ebene genügen muß, damit ein auf E stetiges $f(z)$ dort gleichmäßig durch Polynome approximierbar ist. Wesentlich ist hierbei, wie ein vom Verf. einleitend dargestelltes, von V. A. Ton'yan [Akad. Nauk Armjan. SSR, Doklady 12, 33–36 (1950)] herrührendes Gegenbeispiel zeigt, daß E die Ebene nicht zerlegt. Für den Fall, daß diese Bedingung nicht mehr erfüllt ist, charakterisiert Verf. durch eine Zerlegbarkeitseigenschaft eine Klasse von Mengen E , für die jedes auf E stetige $f(z)$ durch rationale Funktionen gleichmäßig approximiert werden kann, die in jedem der Teilgebiete, in die E die Ebene zerlegt, mindestens einen Pol aufweisen.

P. Heuser.

Tumarkin, G. G.: Approximation von Funktionen durch rationale Brüche mit von vornherein vorgegebenen Polen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 98, 909–912 (1954) [Russisch].

Etant donné un tableau à double entrée χ_{ki} , on sait que la possibilité d'approcher uniformément toute fonction continue sur $|z| = 1$ par une suite $\{R_k\}$ de fractions, les pôles de R_k étant pris dans la k -ième ligne, fait intervenir deux conditions portant respectivement sur les pôles intérieurs et extérieurs à $|z| = 1$; dans le cas où une seule de ces conditions est satisfaite, l'A. caractérise les fonctions qui admettent une telle approximation.

G. Bourion.

Mergeljan, S. N. und M. M. Džrbašjan: Über die besten Annäherungen durch rationale Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 99, 673–675 (1954) [Russisch].

Les AA. évaluent la meilleure approximation par des fractions à pôles donnés $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de $f(z)$ définie sur $|z| = 1$, si $f(z)$ admet sur cette circonférence une dérivée p -ième avec condition de Lipschitz d'ordre α ; ils donnent ensuite des hypothèses sur l'approximation de $f(z)$ par des fractions à pôles pris dans une suite donnée, garantissant l'existence d'une telle dérivée sur un arc de la circonférence-unité.

G. Bourion.

Meschkowski, Herbert: Die Koeffizienten des Bergmanschen Orthonormal-systems. Math. Ann. 128, 200–203 (1954).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 55, 72) hat Verf. eine analytische Darstellung für das Bergmansche vollständige Orthonormalsystem bezüglich einer Klasse derjenigen Funktionen gegeben, die in einem endlich vielfach zusammenhängenden Gebiet samt ihren Integralen regulär und eindeutig sind und ein endliches Dirichlet-Integral haben. In der vorliegenden Arbeit zeigt sich, daß die Koeffizienten der Entwicklung jeder Funktion der Klasse nach diesem System dann mittels der lokalen Potenzreihenentwicklung der Funktion einfacherweise berechnet werden können, wenn eine Folge der von dem System abhängigen und für das Gebiet charakteristischen Zahlen erst einmal ermittelt ist. — Ähnliche Aussagen werden für einige andere Klassen gemacht, wobei Pole vorgeschriebener Art zugelassen werden.

Y. Komatu.

Hahn, Wolfgang: Über einige Grenzwertbeziehungen bei unendlichen Produkten. Math. Z. 60, 488–494 (1954).

Die Funktion $f(z)$ sei in einer Nullpunktumgebung regulär, und es sei $f(0) = 1$;

β sei eine feste reelle oder komplexe Zahl und $|q| < 1$. Unter diesen Annahmen wird bewiesen, daß $(*) \lim_{j \rightarrow \infty} \prod_{j=0}^{\infty} \frac{f(z q^j)}{f(z q^{j+\beta})} = (f(z))^\beta$ gilt für $q \rightarrow 1$ „im Winkelraum“ (i. W.) und für alle festen z , für die beide Seiten von $(*)$ regulär sind, d. h. insbesondere in einer gewissen Nullpunktsumgebung. Der Fall $f(z) = 1 - z$ in $(*)$ ist zur Untersuchung spezieller Funktionen bedeutsam und war bereits bekannt. Das Verhalten des Nenners in $(*)$ wird noch präzisiert: Es gilt

$$\lim (1 - q) \log \prod_{j=0}^{\infty} f(z q^{j+\beta}) = \int_0^z \log f(y) \frac{dy}{y},$$

wieder für $q \rightarrow 1$ i. W. Weiter untersucht der Verf. das Produkt $H(\alpha, \beta; q) = (1 - q)^{-\beta} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1 - q^{2+\beta}}{1 - q^{2+j+\beta}} (\alpha + \beta \neq 0, \neq -1, \neq -2, \dots)$ und findet die Beziehung $\lim H(\alpha, \beta; q) = \Gamma(\alpha + \beta) / \Gamma(\alpha)$ für $q \rightarrow 1$ i. W. In Formel (20) ist „ $j = 1$ “ durch „ $j = 0$ “ zu ersetzen.

D. Gaier.

Bowen, N. A. and A. J. Macintyre: Interpolatory methods for theorems of Vitali and Montel type. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A **64**, 71–79 (1954).

Verff. beweisen zunächst den klassischen Vitalischen Satz über Konvergenz von Funktionenfolgen in Kreisbereichen und seine Verallgemeinerung durch Blaschke mit Hilfe des folgenden von Whittaker (dies. Zbl. **12**, 155) stammenden Lemmas: $F(z)$ sei eine in $|z| < 1$ reguläre Funktion, für welche daselbst $|F(z)| \leq M$ und außerdem in den endlich vielen $p + 1$ paarweise verschiedenen Punkten $\{z_\nu\}$ ($\nu = 0, 1, \dots, p$), die in $|z| \leq \omega < 1$ liegen sollen, $F(z_\nu) = 0$ ist. Dann gilt in $|z| \leq \omega$:

$$|F(z)| \leq M \prod_{\nu=0}^p \left| \frac{z - z_\nu}{1 - \bar{z}_\nu z} \right| + N \frac{\Delta(2\omega)^p}{1 - \omega^4}, \quad |F(z)| \leq M \left(\frac{2\omega}{1 + \omega^2} \right)^{p+1} + N \frac{6\Delta(2\omega)^p}{1 - \omega^4},$$

$$\text{wobei } \Delta \equiv \sum_{\lambda=0}^p \prod_{\kappa \neq \lambda} \frac{1}{|z_\kappa - z_\lambda|}.$$

Dieses Lemma wird auch zum Beweise des folgenden Grenzwertsatzes von Montelschem Typus verwendet: $f(z)$ sei in $|\arg z| \leq \alpha$ regulär und beschränkt. Ferner gelte $\lim_{x \rightarrow \infty} f(z_x) = l$, wobei $|z_x| \leq |z_{x+1}| \rightarrow \infty$, $\arg z_x \leq \alpha - \delta_1$, $\delta_1 > 0$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} |z_{x+1} - z_x| = 1$. Dann konvergiert $f(z)$ für $|z| \rightarrow \omega$ in $|\arg z| \leq \alpha - \delta$, $\delta > 0$ gleichmäßig gegen l . Für den Fall, daß im vorangehenden Theorem $\alpha = \pi/2$ ist und es kein $\delta_1 > 0$ so gibt, daß die Folge $\{z_x\}$ ($x = 1, 2, \dots$) in $|\arg z| \leq \pi/2 - \delta_1$ zu liegen kommt, erhalten Verff. folgendes Resultat: $f(z)$ sei in $|\arg z| \leq \pi/2$ regulär und beschränkt. Ferner sei $\lim_{x \rightarrow \infty} f(z_x) = l$ auf einer Punktfolge $z_x = r_x e^{i\theta_x}$, $x = 1, 2, \dots$, für welche $r_x \leq r_{x+1} < \infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} \lambda_x = 0$ gilt, wobei $\lambda_x = (r_{x+1} - r_x) / r_x \sin \Phi_x$ und $\Phi_x = \min_{1 \leq s \leq x} (\frac{1}{2} \pi - |\theta_s|)$ ist. Dann konvergiert $f(z)$ für $|z| \rightarrow \infty$ in $|\arg z| \leq \pi/2 - \delta$, $\delta > 0$, gleichmäßig gegen l . Der Beweis stützt sich auf ein Lemma von Hall (dies. Zbl. **16**, 216).

E. Lammel.

Hayman, W. K. and F. M. Stewart: Real inequalities with applications to function theory. Proc. Cambridge philos. Soc. **50**, 250–260 (1954).

Die Funktion $f(x)$ sei für $x \geq 0$ nicht negativ und besitze für große x eine stetige n -te Ableitung $f^{(n)}(x)$. Man setze

$$f_n(x) = \inf_{h>0} \frac{f(x+h)}{h^n}, \quad \text{und} \quad E_n = \{x; f^{(n)}(x) > 0\}.$$

Ist nun E_n nicht beschränkt, so gilt auf einer Punktmenge $E \subseteq E_n$ ($1) f_n(x) \leq K(e/n)^n f^{(n)}(x)$. Dabei ist K eine Konstante > 1 . Sind die Ableitungen $f^{(m)}(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) nicht abnehmende konvexe positive Funktionen, so gilt (1) sogar auf einer Punktmenge mit positiver unterer Dichte. Dieses Hauptresultat der Arbeit in Verbindung mit einigen (in dieser Arbeit verschärften) früheren Ergebnissen (dies. Zbl. **48**, 55) des ersten der beiden Verff. wird auf funktionentheoretische Fragen

angewandt. Von den vielen interessanten Resultaten dieses letzten Abschnittes sei hier nur folgendes angeführt: Es sei $f(z)$ ganz transzendent, und es sei $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$, $T(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta$. Dann gilt auf einer Punktmenge von $r \geq 0$ mit einer endlichen unteren logarithmischen Dichte $\log M(r) = T(r) [\log T(r)]^K$. Wie das Beispiel $f(z) = e^{z^2}$ zeigt, kann die Konstante K nicht unter $\frac{1}{2}$ herabgedrückt werden. *A. Dinghas.*

Heins, Maurice: The set of asymptotic values of an entire function. 12. Skand. Mat.-Kongr., Lund 1953, 56—60 (1954).

Es wird gezeigt, daß jede ebene analytische Menge A , die den Punkt ∞ enthält, mit der Menge aller Zielwerte einer ganzen Funktion identisch ist. Der Beweis erfolgt durch Konstruktion der zugehörigen Riemannschen Fläche unter Ausnutzung der Existenz einer in $0 < x \leq 1$ definierten linksseitig stetigen Funktion mit dem Wertebereich $A = \{\infty\}$. Wegen einer analogen Aussage für meromorphe Funktionen im Einheitskreis vgl. Kierst (dies. Zbl. 15, 307). *P. Seibert.*

Kjellberg, Bo: A relation between the maximum and minimum modulus of a class of entire functions. 12. Skand. Mat.-Kongr., Lund 1953, 135—138 (1954).

Für $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{r_n}\right)$ mit $r_n \rightarrow 0$ sei $M(r) = \max |f(z)|$ und $m(r) = \min |f(z)|$ auf $|z| = r$. Es sei $M(r)$ von der Ordnung $\varrho < 1$, aber $\liminf (r^{-\lambda} \ln M(r)) < \infty$ für $0 < \lambda < \varrho$. Dann gibt es beliebig große r mit $\ln m(r) > \cos \pi \lambda \ln M(r)$, und für $\lambda < \frac{1}{2}$, $\varepsilon > 0$, gilt sogar $\ln m(r) > r^{\lambda-\varepsilon}$. [Dagegen braucht nicht $\ln m(r) > r^{\varrho-\varepsilon}$ zu gelten, wie irrtümlicherweise behauptet wird, denn im Beweis kann nur $\ln m(r) = \cos \pi \lambda \ln M(r) = r^{\lambda-\varepsilon}$, nicht $= r^{\varrho-\varepsilon}$, geschlossen werden. Nur für $\varrho \leq \frac{1}{2}$ ergibt sich dann auch $m(r)$ von der Ordnung ϱ , da λ beliebig nahe an ϱ gewählt werden kann.] *G. af Hällström.*

Reich, Edgar: An alternative proof of a theorem of Beckenbach. Proc. Amer. math. Soc. 5, 578—579 (1954).

Let $f(z)$ be regular in $|z| < 1$, and let $I(\varrho, \theta) = \int_0^{\varrho} |f(re^{i\theta})| dr \leq 1$, $0 \leq \varrho < 1$ and $0 \leq \theta < 2\pi$. Then $I(\varrho, \theta) \leq \varrho$ and equality for any (ϱ_0, θ_0) implies $f(z) = e^{i\alpha}$, α real. The author gives an alternative proof of the above result (due to Beckenbach) by adopting a device used by Landau for proving Hardy's result that $\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta$ increases as r increases, $0 \leq r < 1$. *V. Ganapathy Iyer.*

Hiong, King-Lai: Généralisations du théorème fondamental de Nevanlinna-Milloux. Bull. Sci. mat., II. Ser. 78, 181—198 (1954).

H. Milloux (Les fonctions méromorphes et leurs dérivées, Paris 1949) a étendu le second théorème fondamental de Nevanlinna, en faisant intervenir les valeurs prises par une combinaison linéaire de dérivées de la fonction méromorphe étudiée. L'A. reprend les théorèmes de Milloux et les étend de nouveau. Voici son résultat le plus général: Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans tout le plan, soient $x_i(z)$ avec $i = 0, 1, \dots, l$ des fonctions entières telles que $T(r, x_i) = o(T(r, f^{(i)}))$ et que $x_i(z)$ ne s'annule pas; on pose $g = \sum x_i f^{(i)}$; si $q(z)$ et $p(z)$ sont deux fonctions méromorphes qui ne sont identiques ni à 0, ni à ∞ et qui vérifient $T(r, q^{(i)}) = o(T(r, f^{(i)}))$ et $T(r, p) = o(T(r, f^{(l)}))$, on a

$$\{1 - o(1)\} T(r, f) \leq l N(r, f) + N(r, 1/(f - q)) + N(r, 1/(g - p)) - (l-1)N(r, f) + S(r)$$

où le terme complémentaire $S(r)$, donné sous une forme précise par l'A., satisfait aux conditions de Nevanlinna. *J. Dufresnoy.*

Umezawa, Toshio: Star-like theorems and convex-like theorems in an annulus. J. math. Soc. Japan 6, 68—75 (1954).

The author gives some sufficient conditions for the multivalency of a single-valued meromorphic function $f(z)$ in an annulus $D: r_1 \leq |z| \leq r_2$. The following is typical: Let $n(0)$ and $n(\infty)$ be the number of zeros and the number of poles of $f(z)$ in D respectively. Put $\frac{1}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) d\theta = p_i$, ($i = 1, 2$). If $\operatorname{Re} (zf'(z)/f(z)) > 0$ on $|z| = r_i$ ($i = 1, 2$), then $f(z)$ is at most $p_2 + n(\infty)$ ($= p_1 + n(0)$)-valent and at least $\max(n(0) - p_2, 1)$ -valent in D . Furthermore, the author defines and studies the convexity in one direction of a single-valued analytic function in D .
K. Noshiro.

Keogh, F. R.: A property of bounded schlicht functions. J. London math. Soc. 29, 379—382 (1954).

Sei $f(z)$ regulär und schlicht in $|z| < 1$, $l(\varrho)$ die Länge des Bildes von $0 \leq z \leq \varrho < 1$. Verf. zeigt zunächst, auf Grund einer Mitteilung von Littlewood: $l(\varrho) = o((\log(1-\varrho)^{-1})^{1/2})$ mit $\varrho \rightarrow 1$ und beweist dann, daß $\frac{1}{2}$ der kleinstmögliche Exponent ist.
H. Grunsky.

Heinhold, J. und R. Albrecht: Zur Praxis der konformen Abbildung. Rend. Circ. mat. Palermo 3, 130—148 (1954).

Nach Aufzählung und kurzer Charakterisierung der bekannten Methoden zur näherungsweise Bestimmung der Riemannschen Abbildungsfunktion für einfach-zusammenhängende Bereiche auf Kreise behandeln Verf. eingehend das sogenannte Stachelverfahren (J. Heinhold, dies. Zbl. 40, 38) und das Kreissichelverfahren (Ringleb, Numerische und graphische Verfahren der konformen Abbildung, Heidelberg 1939). Hierauf entwickeln Verf. ein Verfahren, welches mit der Abbildung von Kreisbogendreiecken arbeitet, bei denen zwei Kreise orthogonal zum dritten sind. Dieses Verfahren enthält das Stachel- und Kreissichelverfahren als Spezialfälle. Für Hinweise für praktische Anwendung der einzelnen Verfahren muß auf die mit lehrreichen Figuren ausgestattete Arbeit selbst verwiesen werden.

E. Lammell.

Tammi, Olli: On the conformal mapping of symmetric schlicht domains. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I 173, 12 S. (1954).

Es sei B ein auf der w -Ebene gelegenes Gebiet, das dadurch entsteht, daß man $|w| < 1$ längs zwei bezüglich der reellen Achse symmetrisch gelegener Jordanbogen aufschneidet. Dann zeigt sich, daß ein Analogon zum Löwnersehen Satze über beschränkte Schlitzabbildungen gilt, das so ausgesprochen wird: Jedem derartigen Gebiet B läßt sich eine reelle stetige Funktion $\vartheta(u)$ mit $1 \geq u \geq x \geq 0$ so zuordnen, daß die $|z| < 1$ auf B schlicht und konform abbildende Funktion $w = f(z)$ mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = x$ als Integral $f(z) = f(z, x)$ der Differentialgleichung $\partial \log f(z, u) / \partial \log u = (1 - f(z, u)^2) / (1 - 2f(z, u) \cos \vartheta(u) + f(z, u)^2)$, $f(z, 1) = z$, bestimmt werden kann. Umgekehrt, zu jeder in $(0, 1) \times [0, 1]$ reellen stetigen Funktion $\vartheta(u)$ liefert die Lösung $f(z, x)$ der Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $f(z, 1) = z$ stets eine schlichte Funktion, die $|z| < 1$ auf ein Gebiet B der genannten Beschaffenheit abbildet. Ferner wird hingewiesen auf die Möglichkeit, den Satz auf das Koeffizientenproblem für die ganze Familie derjenigen in $|z| < 1$ schlichten Funktionen anzuwenden, deren Potenzreihenentwicklungen um $z = 0$ lauter reelle Koeffizienten besitzen.

Y. Komatu.

Leja, F.: Polynômes extrémaux et la représentation conforme des domaines doublement connexes. Ann. Polon. math. 1, 13—28 (1954).

L'A. considera un qualunque dominio piano D doppiamente connesso, limitato, la cui frontiera interna non si riduce ad un punto; e, collegati con questo dominio, definisce, mediante una proprietà di massimo, certi polinomi, che chiama polinomi estremali, dipendenti anche da un intero positivo n e da un numero reale $\lambda > 0$, arbitrari l'uno e l'altro. Partendo da tali polinomi, mediante passaggi al limite per

$n \rightarrow \infty$, e un successivo passaggio al limite per $\lambda \rightarrow 0$, l'A. determina una funzione analitica, che effettua la rappresentazione conforme di D su una corona circolare.

F. Cecioni.

Myrberg, Lauri: Über die Existenz von positiven harmonischen Funktionen auf offenen Riemannschen Flächen. 12. Skand. Mat.-Kongr., Lund 1953, 214–216 (1954).

Bericht über früher publizierte Resultate (dies. Zbl. 50, 306). (S. 214, Zeile 9 lies „nullberandeten“ statt „positivberandeten“.) G. af Hällström.

Gerstenhaber, Murray and H. E. Rauch: On extremal quasi-conformal mappings. I. II. Proc. nat. Acad. Sci. USA 40, 808–812, 991–994 (1954).

Sei $f: S_1 \rightarrow S_2$ eine topologische Abbildung zweier geschlossener Riemannscher Flächen aufeinander; sie heißt quasikonform, wenn ihr Dilatationsquotient $D_p f$ beschränkt ist: $\sup_{p \in S_1} D_p f = Df < \infty$. In jedem Punkt p mit $D_p f \neq 1$ wird das Linienelement $\pm dz_p$ ausgezeichnet, in dessen Richtungen $dr dz$ maximal ist. — Betrachten wir nun eine Homotopieklasse von (differenzierbaren) topologischen Abbildungen von S_1 auf S_2 ; nach Teichmüller und Ahlfors wird das Extremalproblem $Df = \min$ durch diejenige (im wesentlichen einzige) quasikonforme Abbildung der betr. Klasse gelöst, die konstante Dilatation besitzt; sie heißt „extremal“. Die vorliegende Arbeit will zeigen, daß dieses Extremalproblem durch ein einfacher zu lösendes ersetzt werden kann, in dem es ein Integral zu minimalisieren gilt. Zu diesem Zwecke werden nach Teichmüller die quadratischen Differentiale [kovariante Tensoren $a(z)$, invariante $a(z) dz^2$ bezüglich lokalen Koordinatentransformationen] herangezogen. Das duale Bild bezüglich f einer konformen Metrik $\eta = \lambda dr dr$ auf S_2 ist von der Form $f^* \eta = b_f(z) dz d\bar{z} + 2\Re\{a_f(z) dz^2\}$; $a_f(z) dz^2$ ist ein quadratisches Differential; in den Stellen, wo $f(z)$ konform ist, verschwindet $a(z)$; in den übrigen Stellen gilt auf dem ausgezeichneten Linienelement $\pm dz_p$ die Ungleichung $a(p) dz_p^2 > 0$; bei extremaler f ist $a(z)$ analytisch (Teichmüller). Sei jetzt das Douglas-Dirichletsche Funktional $I(g^* \eta) = \frac{i}{2} \iint_{S_1} b_f dz \wedge d\bar{z}$ zu minimalisieren, wobei die Abbildungen

$g: S_1 \rightarrow S_2$ der betrachteten Homotopieklasse zur Konkurrenz zugelassen werden. Es wird gezeigt: ist (bei festem η) f die extremale Abbildung für I , so ist $a_f(z)$ analytisch. — Anschließend an Teil I wird in Teil II die konforme Metrik η variiert; dabei ändert sich auch die durch $I(f^* \eta) \leq I(g^* \eta)$ (für alle $g \sim f$) bedingte η -extremale Abbildung f . Die betrachteten Metriken η werden durch die Flächenbedingung $A(\eta) = \frac{i}{2} \iint_{S_1} \lambda dr \wedge d\bar{r} = 1$ normiert. Es wird folgender Satz

mit Vorbehalt ausgesprochen: Ist η normiert, $f: S_1 \rightarrow S_2$ eine η -extremale topologische Abbildung und gilt $I(f^* \eta) = I(g^* \eta)$ für jede g -extremale Abbildung $g \sim f$ mit $g =$ normierte Metrik, so ist $D_p f$ konstant. M. a. W.: es wird ein Maximum-Minimum-Problem aufgestellt, wobei zunächst f , dann η variiert wird; der extremalen (normierten) Metrik η entspricht die gesuchte extremale quasikonforme Abbildung von S_1 auf S_2 . — Der Beweis beruht allerdings, wie im Text hervorgehoben wird, auf einer unbewiesenen, sehr plausiblen Stetigkeitsannahme über die Veränderung der η -extremalen Abbildung f bei infinitesimaler Variation der Metrik η . Darum wird obiger Satz vorsichtig als „Versuche“ bezeichnet. — Der Ref. glaubt, daß sich Fragestellung und Lösungsverfahren in natürlicher Weise in die Sprache der Extremallängen übertragen lassen.

J. Hersch.

Tôki, Yukinari and Kôichi Shibata: On the pseudo-analytic functions. Osaka math. J. 6, 145–165 (1954).

Une fonction pseudo-analytique (ps. a.) dans un domaine D du plan des z est — au sens des AA. — une fonction complexe $w = f(z) = u + i v$, continue dans D , pouvant y devenir ∞ en des points isolés, et satisfaisant dans $D - E$ (où E , dénombrable, est fermé dans D) aux conditions: a) les dérivées partielles premières de u et v existent et sont continues b) leur déterminant fonctionnel est $\neq 0$. Une telle fonction est nécessairement une transformation intérieure dans D . — Aux points de $D - E$ est défini, comme d'habitude, un quotient de dilatation $Q(f)$, rapport des longueurs des axes de l'ellipse image d'un cercle infinitésimal. Les nombreuses extensions aux fonctions f ps. a. de théorèmes connus pour les fonctions analytiques contenues dans ce travail concernent principalement le cas de $Q(f)$ borné dans D , ou bien les suites f_n où $Q(f_n)$ est uniformément borné. Relevons parmi ces extensions les théorèmes de Liouville, Picard, Schottky, Hurwitz, Bloch. — L'un des

instruments essentiels intervenant dans les démonstrations consiste à faire usage de la représentation sur une aire annulaire plane de la surface de Riemann engendrée par la fonction ps. a. *S. Stoilow.*

Bilimovitch, A.: Sur la mesure de déflexion d'une fonction non analytique par rapport à une fonction analytique. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. 6, 17—26 (1954).

Ist $P(x, y) + iQ(x, y)$ eine analytische Funktion, so gilt $|\text{grad } P| = |\text{grad } Q|$ und $(\text{grad } P \cdot \text{grad } Q) = 0$, wobei der Drehsinn von $(\text{grad } P, \text{grad } Q)$ mit dem des Koordinatensystems übereinstimmt. Sei \vec{k} der Einheitsvektor senkrecht zur orientierten (x, y) -Ebene, so lassen sich diese Eigenschaften in der Gleichung $\text{grad } Q = [\vec{k} \text{ grad } P]$ zusammenfassen. Ist nun $P - iQ$ keine analytische Funktion, so wird der Vektor $\vec{b} = \text{grad } Q - [\vec{k} \cdot \text{grad } P]$ als „mesure vectorielle de déflexion d'analyticité“ bezeichnet. Untersuchung von Spezialfällen. *A. Kriszten.*

Fréchet, Maurice: Sur les surfaces dérivables relativement à une règle de multiplication hypercomplexe. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 633—636 (1954).

Jede hyperkomplexe Funktion $W = \sum_{i=1}^3 c_i X_i(u, v)$ der hyperkomplexen Variablen $w = e_1 u + e_2 v$ kann i. A. im Raume der (X_1, X_2, X_3) als Fläche S dargestellt werden. Besitzt W eine Ableitung, d. h. ist $dW = V dw$, wo $V = \sum_{i=1}^3 c_i V_i$ und $c_i e_k = \sum_{h=1}^3 a_{hik} c_h$ ist, so erzeugt V wieder eine Fläche, die abgeleitete Fläche von S . *A. Kriszten.*

Fréchet, Maurice: Les surfaces dérivables relativement à une règle de multiplication. Ann. sci. École norm. sup., III. Sér. 71, 29—85 (1954).

Der erste Teil bringt eine Zusammenstellung und Verallgemeinerung der Resultate des Verf. (dies. Zbl. 50, 308; 51, 63), indem nun die Variable und die Funktion in zwei verschiedenen Linearsystemen L_1 und L_2 gewählt werden, wobei L_2 durch Multiplikation von rechts mit einem Element von L_1 in sich transformiert wird. Ist die Dimension von L_1 gleich zwei, diejenige von L_2 gleich drei, so läßt sich die Funktion als Fläche S im euklidischen R^3 deuten. Entsprechend der Multiplikationstabelle der Elemente von L_2 mit denjenigen von L_1 ergeben sich — evtl. nach linearen Transformationen der Variablen — Normalformen für differenzierbare Funktionen. Diese Normalformen werden in Hinblick auf ihre Bedeutung für die Fläche S untersucht. Für die Resultate sei auf die Arbeit verwiesen. *A. Kriszten.*

Saban, Giacomo: Funzioni totalmente derivabili di variabili in $[(n+1)\text{-duali}]$ un'algebra ad $n+1$ unità definita nel corpo reale. Giorn. Mat. Battaglini, V. Ser. 82, 267—276 (1954).

Die Basiselemente der betrachteten Algebra (u_0, u_1, \dots, u_n) über dem Körper der reellen Zahlen erfüllen die Relationen: $u_0 u_i = u_i u_0 = u_i$ und $u_i u_j = 0$ ($i, j > 0$). Sei $Z = \sum_{i=0}^n u_i z_i$ und $F(z) = \sum_{i=0}^n u_i f_i(z_0, \dots, z_n)$. Aus der Bedingung, daß $F(Z)$ eine Ableitung besitzen soll, folgt $f_0 = f_0(z_0)$, $f_i = z_i df_0 dz_0 + g_i(z_0)$ ($i > 0$). *A. Kriszten.*

Rothstein, Wolfgang: Der Satz von Casorati-Weierstrass und ein Satz von Thullen. Arch. der Math. 5, 338—343 (1954).

Der Satz von Casorati-Weierstrass läßt sich, wie P. Thullen (dies. Zbl. 11, 124) gezeigt hat, als Sonderfall eines allgemeinen Satzes über die Singularitäten analytischer Mengen im Raume C^2 von zwei komplexen Veränderlichen interpretieren. Verf. hat über den Thullenschen Satz hinaus früher eine Aussage bewiesen (dies. Zbl. 51, 63), die den Picardschen Satz und eine von K. Noshiro [Proc. Japan. Acad. 22, 263—306 (1946)] stammende Verallgemeinerung dieses Satzes enthält. In der

vorliegenden Arbeit erweitert Verf. seinen Satz wie folgt auf analytische Mengen beliebiger Dimension im C^n : Im Raume der komplexen Veränderlichen $z_1, \dots, z_k, w_1, \dots, w_{n-k}$ sei Z der Einheitspolyzylinder. Es seien M_1, \dots, M_k abgeschlossene Punktmengen des Einheitskreises von positivem harmonischem Maß, ferner N_1, \dots, N_{n-k} harmonische Nullmengen im Einheitskreis. Mit N sei die Vereinigung aller Ebenen $E^k(a): (w_1, \dots, w_{n-k}) = (a_1, \dots, a_{n-k}) \in (N_1, \dots, N_{n-k})$ bezeichnet. In $Z - N$ sei eine rein k -dimensionale analytische Menge A^k gegeben. Trifft dann A^k jede Ebene $*E^{n-k}(c): (z_1, \dots, z_k) = (c_1, \dots, c_k) \in (M_1, \dots, M_k)$ in höchstens endlich vielen Punkten, so ist die abgeschlossene Hülle \bar{A}^k von A^k in Z eine in Z analytische Menge. — Im Beweise wird zunächst der Fall $k = n - 1$ mittels Induktion auf den in der zitierten Arbeit des Verf. erledigten Fall $k = 1, n = 2$ zurückgeführt. Der Allgemeinfall des Satzes wird sodann „durch Projektion“ auf den Fall $k = n - 1$ reduziert. In ähnlicher Weise war früher von R. Remmert und K. Stein (dies. Zbl. 51, 63) der Allgemeinfall des Thullen'schen Satzes auf den von Thullen behandelten Sonderfall $k = n - 1$ zurückgeführt worden. K. Stein.

Norguet, François: Sur les domaines d'holomorphie des fonctions uniformes de plusieurs variables complexes. (Passage du local au global.) Bull. Soc. math. France 82, 137—159 (1954).

K. Oka hat in seiner Arbeit [VI] Tôhoku math. J. 49, 15—52 (1942) für 2 komplexe Veränderliche bewiesen, daß jeder schlichte endliche lokale Holomorphiebereich ein globaler Holomorphiebereich ist. (Theorem 1). (Ein Bereich D im Raum C^n von n komplexen Veränderlichen heißt „lokaler Holomorphiebereich“, wenn es um jeden Punkt des C^n eine Umgebung V gibt, so daß der Durchschnitt $D \cap V$ ein Holomorphiebereich oder die leere Menge ist.) (Vgl. auch Behnke-Stein, dies. Zbl. 42, 318.) Der Okasche Beweis macht wesentlichen Gebrauch von Eigenschaften des C^2 und ist nicht ohne weiteres auf den C^n übertragbar. Ein Beweis für den C^n ist der Gegenstand der vorliegenden Arbeit. [Weitere Beweise für $n \geq 2$: K. Oka [IX], Japanese J. Math. 23, 97—155 (1953) und H. J. Bremermann, nachfolg. Referat. Außerdem ist der Okasche Beweis für $n = 2$ in B. A. Fuks, dies. Zbl. 39, 89 (russisch) reproduziert und ergänzt englische Übersetzung, Amer. math. Soc. Translations Nr. 93, 59 p. (1953).] Die Arbeiten von Norguet und Bremermann sind in vielen Punkten ähnlich, beide realisieren die Grundgedanken der Arbeit Oka [VI] und überwinden die Schwierigkeit des Überganges vom C^2 zum C^n in ähnlicher Weise. Der neue Beweis von Oka [IX] dagegen ist völlig anders und gilt nicht nur für schlichte Gebiete, sondern auch für komplexe Mannigfaltigkeiten ohne Verzweigungspunkte im Innern über dem C^n . — Zunächst wird gezeigt, daß Theorem 1 äquivalent ist mit dem folgenden Theorem 1': Es sei $x = (x_1, \dots, x_n)$ der Vektor der n komplexen Veränderlichen. Im x_1 Imaginarteil von x_1 , ferner sei D ein beschränkter Bereich und $a_1 < a_2$. Ist dann $\{x \mid \operatorname{Im} x_1 > a_1\} \cap D$ und $\{x \mid \operatorname{Im} x_1 < a_2\} \cap D$ Holomorphiebereich, so ist D Holomorphiebereich. Der Beweis der Äquivalenz wird mit folgender Begriffsbildung geführt: Eine Klasse K von Bereichen des Raumes R^m der m reellen Veränderlichen (ξ_1, \dots, ξ_m) heißt „Durchschnittsklasse“, falls sie folgenden Bedingungen genügt: a) K enthält die Nullmenge und die „Intervalle“ des R^m , das sind die Gebiete $\bigcap_{1 \leq i \leq m} (\xi_i \in (a_i, b_i))$. b) Wenn $D_1 \in K$ und $D_2 \in K$, so

$D_1 \cap D_2 \in K$. K heißt „nach rechts abgeschlossen“, wenn der Limes jeder monoton wachsenden Folge beschränkter Bereiche aus K zu K gehört. Man ersetze in Theorem 1 und 1' „Holomorphiebereich“ durch „gehört zu K “. In dieser Form wird die Äquivalenz von 1 und 1' allgemein für nach rechts abgeschlossene Durchschnittsklassen nachgewiesen. Die Äquivalenz allgemein für nach rechts abgeschlossene Holomorphiebereiche folgt dann aus der Tatsache, daß die Klasse der Holomorphiebereiche eine nach rechts abgeschlossene Durchschnittsklasse ist; das ist der Inhalt des Satzes von Behnke-Stein über konvergente Folgen von Holomorphiebereichen. Verf. verallgemeinert dann in naheliegender Weise den Begriff der „Holomorphiebereichen“. Verf. verallgemeinert dann in naheliegender Weise den Begriff der „Holomorphie-konvexität“ von Cartan-Thullen zu: Ein Bereich ist „Holomorphkonvex (holomorphkonv.) auf einem Stück seines Randes“, indem er diese und weitere von ihm eingeführte Begriffe gebraucht, beweist er „Subtraktionstheoreme“ für Holomorphiebereiche, die er in den späteren Beweisführungen benutzt. Dann stellt er die von H. Cartan (Séminaire, exposé 6, 1951—52) für die Weil-Bermansche substituierte Integralformel in einer für ihn geeigneten Form bereit. Danach löst er die Heftungsaufgabe des additiven Cousin-Problems ungefähr folgendermaßen: G sei ein Holomorphiebereich, der durch die Hyperebene $L = \{x \mid \operatorname{Im} x_1 = 0\}$ in G_1 und G_2 geteilt wird. Gegeben in der Umgebung von $G - L$ eine holomorphe Funktion g . Gesucht: f_1 , holomorph in $G_1 - G$, und f_2 , holomorph in $G_2 \cap G$, so daß $f_1 - f_2 \equiv g$. Zur Lösung wird für g das Weil-Cartansche Integral angesetzt, aufgespalten, und die beiden Teile definieren ein Paar von Funktionen f_1 und f_2 mit den gewünschten Eigenschaften. Ein ähnliches Heftungs-

problem ist lösbar, falls nicht bekannt ist, daß G ein Holomorphiebereich ist, sondern nur, daß $G \cap \{x \mid \operatorname{Im} x_1 > a_1\}$ und $G \cap \{x \mid \operatorname{Im} x_1 < a_2\}$, wobei $a_1 < a_2$ sein möge, Holomorphiebereiche sind (und daß G noch einer Reihe weiterer Bedingungen genügt). Bei der Lösung dieses Problems wird die vorangehende Lösung auf $G \cap \{x \mid a_1 < \operatorname{Im} x_1 < a_2\}$ (das ja Holomorphiebereich ist) angewendet, die meromorphen Integralkerne werden durch in den gewünschten größeren Bereichen meromorphe Funktionen approximiert und schließlich der durch die Approximation entstandene Fehler durch Lösung einer Integralgleichung wieder ausgeglichen. Aus der Lösung dieses Heftungsproblems wird dann geschlossen, daß das additive Cousinproblem für ein gewisses Teilgebiet D^* von G lösbar ist, falls die Pole in einer Umgebung von D^* gegeben sind. Daraus und aus den (hier nicht spezifizierten) Eigenschaften von D^* und G folgt, daß D^* ein Holomorphiebereich ist. Schließlich wird der in Theorem 1' auftretende Bereich D durch Bereiche D^* und G approximiert, die alle erforderlichen Eigenschaften haben. Auf Grund des Satzes von Behnke-Stein folgt dann, daß D ein Holomorphiebereich ist.

H. J. Bremermann.

Bremermann, Hans J.: Über die Äquivalenz der pseudokonvexen Gebiete und der Holomorphiegebiete im Raum von n komplexen Veränderlichen. Math. Ann. 128, 63—91 (1954).

Nennt man ein Gebiet H des komplexen (z_1, z_2, \dots, z_n) -Raumes C^n pseudokonvex (im Sinne von H. Cartan), wenn es um jeden Randpunkt von H eine Hyperkugel K gibt, so daß der Durchschnitt $K \cap H$ ein Holomorphiebereich ist, so gilt: Ein schlichtes, endliches pseudokonvexes Gebiet im Raume C^n ist Holomorphiegebiet. K. Oka bewies diesen Satz für den C^2 [Tôhoku math. J. 49, 15—52 (1942)]. Der Beweis für beliebiges n stützt sich auf die Möglichkeit, Holomorphiegebiete durch analytische Polyeder zu approximieren, auf die die Integralformel von A. Weil (dies. Zbl. 11, 123) anwendbar ist. (Einen anderen Beweis siehe bei F. Norguet, vorstehendes Referat.)

F. Sommer.

Grauert, Hans: Métrique kaehlérienne et domaines d'holomorphic. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 2048—2050 (1954).

Eine Metrik in einem nicht kompakten topologischen Raum M heißt vollständig, wenn für jede Punktfolge $p_i \in M$, die keinen Häufungspunkt in M hat, die Folge der Entfernungen der Punkte p_i von einem Punkt $q \in M$ unbeschränkt ist. Verf. zeigt zunächst, daß auf einer nicht kompakten komplexen Mannigfaltigkeit M , deren Topologie eine abzählbare Basis besitzt, stets eine vollständige Hermitesche Metrik eingeführt werden kann; ist überdies M holomorph-konvex und kählersch, so läßt sich auch eine vollständige Kählersche Metrik auf M einführen. Man kann allgemein fragen, wie diejenigen nicht kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten zu beschreiben sind, auf denen vollständige Kählersche Metriken existieren. Für Reinhardtische Gebiete im C^n wird eine befriedigende Charakterisierung gegeben: Ein Reinhardtisches Gebiet $M \subset C^n$ besitzt genau dann eine vollständige Kählersche Metrik, wenn M holomorph-konvex ist oder aus einem solchen Reinhardtischen Gebiet durch Fortlassung irgendwelcher Koordinatenebenen der Form $z_{i_1} = 0, \dots, z_{i_s} = 0$ ($2 \leq s \leq n$) erzeugbar ist. Ein Gebiet $M \subset C^n$, in dem eine vollständige Kählersche Metrik existiert, ist also i. a. nicht notwendig holomorph-konvex. Macht man jedoch hinreichend starke Voraussetzungen über die Gestalt des Randes von M , so sind die beiden Eigenschaften äquivalent. Verf. zeigt nämlich: Ein Gebiet $M \subset C^n$, dessen Rand eine reell-analytische $(2n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist, ist genau dann holomorph-konvex, wenn auf M eine vollständige Kählersche Metrik existiert. Der Beweis dieses Theorems macht wesentlichen Gebrauch von der Okaschen Charakterisierung der holomorph-konvexen Gebiete durch die Bedingung der Pseudokonvexität des Randes sowie von folgendem, ebenfalls vom Verf. herrührendem Satz [Verallgemeinerung eines Satzes von Kommerell, Math. Ann. 60, 548—596 (1905)]: Eine Hermitesche Metrik auf einer komplexen Mannigfaltigkeit ist genau dann eine Kählersche Metrik, wenn jede eindimensionale analytische Menge in M eine Minimalfläche bez. der Metrik ist.

R. Remmert.

Lelong, Pierre: Sur les dérivées d'une fonction plurisousharmonique. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 2276—2278 (1954).

Verf. kündigt weitere Resultate über die von ihm eingeführten und in verschiedenen früheren Arbeiten [Ann. sci. École norm. sup., III. Sér. **62**, 301–338 (1945); dies. Zbl. **39**, 88; **47**, 323; C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 691–693, 865–867, 1379–1381 (1953); Centre Belge Rech. math., Colloque fonctions plusieurs variables, Bruxelles du 11 au 14 mars 1953, 21–40 (1953)] behandelten plurisubharmonischen Funktionen $V(z_1, \dots, z_n)$ an: 1. Die als Distributionen definierten Ableitungen $V^{i,j} = \partial^2 V / \partial z_i \partial \bar{z}_j$ sind Radonsche Maße. Es gilt $V^{i,i} \geq 0$. Wird für ein Radonsches Maß ν in bezug auf das Definitionsgebiet D von V als Norm $\|V\|_D$ das Supremum von $|\int f d\nu|$ erklärt, wo f alle stetigen Funktionen mit $|f| \leq 1$ und in D enthaltenem kompakten Träger durchläuft, so ist stets $\|V^{i,i}\|_D \leq \sum_i \|V^{i,i}\|_D$. 2. Für jede positiv semi-definite Hermitesche Form $H = \sum_{i,j} q_{ij} w_i \bar{w}_j$ mit stetigen Koeffizienten $q_{ij}(z_1, \dots, z_n)$ ist $(q, V) = \sum_{i,j} q_{ij} V^{i,j}$ ein positives Radonsches Maß. 3. Es wird eine charakteristische Eigenschaft der Differentialform $\sum_{i,j} V^{i,j} dz_i \wedge d\bar{z}_j$ angegeben. 4. Jeder in D analytischen rein p -dimensionalen Menge W^p läßt sich eine Differentialform ω vom Typus $(n-p, n-p)$ mit Radonschen Maßen als Koeffizienten zuordnen, derart daß gilt: Für jede Differentialform θ vom Typus (p, p) mit stetigen Koeffizienten und in D enthaltenem kompakten Träger ist $\int_D \omega \wedge \theta = \int_{W^p} \theta$. Es ergeben sich Aussagen über den Flächeninhalt des in einer gegebenen Hyperkugel gelegenen Teiles von W^p , die Verf. schon früher (dies. Zbl. **39**, 88) für den Fall $p = n-1$ gewonnen hatte.

K. Stein.

Stoll, Wilhelm: Einige Bemerkungen zur Fortsetzbarkeit analytischer Mengen. Math. Z. **60**, 287–304 (1954).

En s'appuyant notamment sur le fait que pour une fonction plurisousharmonique V , l'ensemble $V = -\infty$ est de mesure nulle, l'A. établit: si W^{n-1} est une variété analytique complexe à $n-1$ dimensions dans $G = D - S$, où D est un domaine, S une variété analytique complexe de dimension $s \leq n-1$; si pour tout compact $K \subset D$, $\int_{W^{n-1} \cap K} \alpha \wedge \beta_{n-2}$ est finie, $\beta = \sum dz^i \wedge d\bar{z}^i$, $\beta_{n-2} = \frac{\beta^{n-2}}{(n-2)!}$, $\alpha = \frac{1}{2} i \sum x_{ij} dz^i \wedge d\bar{z}^j$, avec $x_{ij} = \bar{x}_{ji}$, à coefficients x_{ij} continus; alors W^{n-1} est prolongeable aussi aux points de S dans D . Un autre résultat concerne les variétés algébriques de dimension p (au sens de Remmert et Stein) en tous leurs points. On définit leur aire (voir aussi la note du réf., récénsion précédente) et on montre que pour que W^p , variété analytique de dim. p en tout point soit algébrique il faut et il suffit que son aire dans $|z| < r$ ait un rapport à r^{2p} borné et que dans le plan de l'infini, il existe une variété plane de dim. $n-p-2$ sur laquelle W^p est encore analytique.

P. Lelong.

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

• **Hort, Wilhelm:** Die Differentialgleichungen der Technik und Physik. Neubearb. von Alfred Thoma-Fulda. 6. Aufl. des Lehrbuches „Die Differentialgleichungen des Ingenieurs“. Leipzig: Johann Ambrosius Barth 1954. XI, 582 S.; 343 Abb. im Text. DM 38,—.

Die sechste Auflage des bekannten Buches unterscheidet sich von der vorhergehenden (1950 im gleichen Verlage) durch einige Ergänzungen; hinzugekommen ist ein Paragraph über die Riccatische Differentialgleichung und ein solcher über eine nichtlineare erzwungene Schwingung, an welcher die Erscheinung der Helmholtz'schen Kombinationstöne demonstriert wird. Die sich vor allem an den Ingenieur

und Physiker wendende Darstellung gibt in acht Teilen: Grundlegende Betrachtungen, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Mechanische Integration von Differentialgleichungen, Differenzengleichungen, Partielle Differentialgleichungen, Grundzüge der Variationsrechnung, Einführung in die Theorie der linearen Integralgleichungen, einen umfassenden Überblick über die zahlreichen und vielseitigen Anwendungsmöglichkeiten mathematischer Methoden auf technische und physikalische Probleme. Der Verf. hat mit viel Geschick und Umsicht die Fülle des den verschiedenen Gebieten der Technik und Physik entnommenen Stoffes zu einem Ganzen geformt, ohne dabei das Ziel aus den Augen zu verlieren, den Nutzen der Mathematik im Schaffen des Ingenieurs deutlich erkennbar zu machen. Da das Buch in erster Linie für Ingenieure und Physiker geschrieben ist, liegt bei der Darstellung der mathematischen Methoden die Betonung auf dem Handwerklichen. Wenn Ref. einen Wunsch äußern darf, so wäre es der, daß bei einer Neuauflage auch die dem Ingenieur so nützlichen neueren Verfahren der numerischen Integration von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen berücksichtigt werden möchten. Die vorliegende Auflage des bewährten Werkes wird sicherlich in Ingenieurkreisen begrüßt werden und sich dort viele neue Freunde erwerben. *W. Quadr.*

Underwood, F.: Notes on differential equations. *Math. Gaz.* 38, 175—180 (1954).

These notes deal with substitutions or changes of variables in different types of differential equations. For convenience they are classified under the heading of each type of differential equation where they are used (Charpit's equations, Jacobi's equations, Monge's method, the total differential equation $P dx + Q dy + R dz = 0$).

Kerawala, Sulaiman: On the integration of the Darboux-Riccati equation for the general helix. *Math. Student* 22, 145—147 (1954).

Walmsley, Charles: Correction to „Null trigonometric series in differential equations“. *Canadian J. Math.* 6, 447—448 (1954).

Vgl. dies. Zbl. 51, 319.

Evans, Robert L.: Erratum to „Asymptotic and convergent factorial series in the solution of linear ordinary differential equations.“ *Proc. Amer. math. Soc.* 5, 1000 (1954).

Vgl. dies. Zbl. 55, 315.

Albrecht, F.: Remarques sur un théorème de T. Ważewski relatif à l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles. *Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III* 2, 315—318 (1954).

Le théorème de T. Ważewski (ce Zbl. 32, 350) inspire à l'A. un énoncé voisin qui utilise la notion de rétracte par déformation. Une application intéressante: Soit X un champ de vecteurs dans R^2 , soit G un fermé de R^2 dont la frontière est la réunion de deux courbes de Jordan I_1 et I_2 . Si l'ensemble des points de sortie (stricte) S vérifie $I_1 \nmid S$, $I_2 \nmid S$, le champ admet au moins une trajectoire périodique. *G. Reeb.*

Mikolajska, Z.: Sur une propriété asymptotique des intégrales d'une équation différentielle du second ordre. *Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III* 2, 113—116 (1954).

Consider the equation: $dj(t, x, \dot{x}) dt = g(t, x, \dot{x})$ having a unique solution for any given initial conditions; assume that the relation $y = \dot{j}(t, x, z)$ can be inverted to $z = F(t, x, y)$; assume that g and F are continuous for $t \geq 0$ and that continuous functions $a(t)$ and $b(t)$ exist for $t \geq 0$ with the following properties:

$$a(t) > 0, \quad b(t) \geq 0, \quad b(t) \equiv 0, \quad \int_0^\infty a(t) \int_0^t b(s) ds \, dt < \infty,$$

$$|F(t, x, y)| \leq |y| \cdot a(t), \quad |g[t, x, F(t, x, y)]| \leq |x| \cdot b(t);$$

then, for any given c , there is a one parameter family of solutions defined for $t \geq t_0 \geq 0$ such that, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = c$. *J. L. Massera.*

Atkinson, F. V.: The asymptotic solution of second-order differential equations. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **37**, 347—378 (1954).

Verf. leitet Kriterien für das asymptotische Verhalten ($x \rightarrow +\infty$) der Lösungen von Differentialgleichungen $y'' + F(x) y^{2n-1} = 0$ (n = natürliche Zahl) mit Hilfe der (verallgemeinerten) Polarkoordinaten-Methode her; der erste und umfassendere Teil der Arbeit bezieht sich auf den linearen Fall $n = 1$, der zweite auf gewisse Verallgemeinerungen im nichtlinearen Falle. — Hauptergebnis des ersten Teils ist eine Verschärfung eines Kriteriums von G. Ascoli, die in gewisser Analogie zu Stabilitätskriterien von A. Prodi steht: In der Differentialgleichung (1) $y'' + (f^2 - f g) y = 0$ seien für $x \geq 0$ die Funktion f positiv und stetig differenzierbar, die Funktion g reell und stetig; es sei $\log f$ über $(0, \infty)$ von beschränkter

Variation; mit $q = \int_0^x f dx$ mögen $\int_x^\infty g dx$, $g_1 = \int_x^\infty g \cos 2q dx$, $g_2 = \int_x^\infty g \sin 2q dx$

existieren; es seien $\int_0^\infty g g_s dx < \infty$ ($s = 1, 2$). Dann gibt es für jede nichttriviale

Lösung y von (1) zwei Konstanten $A \neq 0$ und B derart, daß $y = A \cos(q + B) + o(1)$, $y' = -A f \sin(q + B) + o(1)$ für $x \rightarrow +\infty$. — Der Beweis beruht auf dem Ansatz $y = r \cos \theta$, $y' = -r f \sin \theta$, $r > 0$ und der Diskussion der entstehenden Formeln für θ' und r' , wobei hier die Differentialgleichung für θ auf $\psi = \theta - q$ umgeschrieben und durch partielle Integration so umgeformt wird, daß g_1, g_2 erscheinen. — Dieser Satz wird nun auf Differentialgleichungen

(2) $y'' - y \left\{ 1 + \sum_{r=1}^m [\mu_r(x) \cos \lambda_r(x) + \mu_r^*(x) \sin \lambda_r(x)] \right\} = 0$ angewandt, und zwar speziell auf die beiden Fälle (a) $\mu_r = 1$, $\mu_r^* = 0$ und (b) $\lambda_r = \text{const} \neq 0, \neq \pm 2$. — Weitere Untersuchungen beziehen sich nun ergänzend auf Differentialgleichungen

(2) in Fällen, wo die oszillierenden Glieder $\sum_{r=1}^m$ das asymptotische Verhalten mit beeinflussen. Hier werden zwei Gruppen von Sätzen erhalten (mit im wesentlichen derselben Beweismethode wie oben), für die die beiden folgenden charakteristisch sind: I. In $y'' - y[1 - h(x) \cos kx] = 0$ sei die Konstante k verschieden von 0, ± 1 . 2. die reelle stetige Funktion $h(x)$ von beschränkter Variation über $(0, \infty)$

derart, daß $\int_0^\infty h^2 dx = \infty$, $\int_0^\infty h^3 dx < \infty$. Dann gibt es zu jeder nichttrivialen Lösung y zwei Konstanten A, B mit $A > 0$ derart, daß

$$y = A \cos \left\{ x + \frac{1}{4(k^2 - 4)} \int_0^x h^2 dx + B \right\} + o(1) \quad (x \rightarrow +\infty)$$

(entsprechende Formel für y'). — II. In $y'' - y[1 - h(x) \cos 2x] = 0$ sei $h(x)$ für $x \geq 0$ positiv und stetig, für $x \rightarrow +\infty$ monoton gegen 0 abnehmend. Es

gelte $\int_0^\infty h dx = \infty$, $\int_0^\infty h^2 dx < \infty$. Dann gibt es zwei Lösungen y_1, y_2 mit

$$y_1 = \exp \left(\frac{1}{4} \int_0^x h dx \right) \left\{ \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + o(1) \right\}, \quad y_2 = \exp \left(- \frac{1}{4} \int_0^x h dx \right) \left\{ \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + o(1) \right\}$$

für $x \rightarrow +\infty$. — Der zweite Teil leitet gewisse analoge Resultate für die nichtlineare Differentialgleichung (3) $y'' + n f^2 y^{2n-1} = 0$ ($n \neq 1$, ganz) her, wobei zum Vergleich $\psi(\theta)$ mit $\psi''(\theta) + n \psi^{2n-1} = 0$, $\psi(0) = 1$, $\psi'(0) = 0$, also mit $(\psi'(\theta))^2 + \psi^{2n} = 1$ herangezogen wird; der „Polarkoordinatenansatz“ ist hier $y = r \psi(\theta)$, $y' = r^n f \psi'(\theta)$, $r > 0$. Es ergibt sich zum Beispiel: Sei f positiv und stetig differenzierbar in $(0, \infty)$, $f(\infty)$ sei vorhanden und positiv, $\int_0^\infty x f' dx < \infty$. Dann gibt es zu jeder nicht-

trivialen Lösung y von (3) zwei Konstanten $A \geq 0$, B mit $y = A \psi(x A^{n-1} f(\infty) + B) + o(1)$ ($x \rightarrow +\infty$) (entsprechende Formel für y' durch formale Differentiation).
F. W. Schäfke.

Atkinson, F. V.: On linear perturbation of non-linear differential equations. Canadian J. Math. 6, 561—571 (1954).

1. Ist $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$, $g_1(x)$ stetig und $g_2(x)$ stetig differenzierbar für $x > 0$, ist $\int_0^\infty |g_1| dx < \infty$, $\int_0^\infty |g_2'| dx < \infty$, $g_2(\infty) = 0$, so existiert für die Lösungen $y(x)$ von (1) $y'' + y^{2n-1} + g(x)y = 0$ ($n \geq 2$, ganz) und $r^{2n} = y^{2n} + n(y')^2$, $r \geq 0$ der Grenzwert $r(\infty)$. [Ist $r(\infty) > 0$, so heißt y vom Typ I, ist $r(\infty) = 0$, vom Typ II.] Jede Lösung mit genügend großem $r(0)$ ist vom Typ I. — 2. Ist $g(x)$ positiv und stetig differenzierbar für $x \geq 0$, strebt $g(x)$ für $x \rightarrow +\infty$ monoton gegen 0, so ist jede nichttriviale Lösung von (1) vom Typ I. — 3. Ist $g(x)$ stetig für $x \geq 0$ und $\int_0^\infty x |g(x)| dx < \infty$, so hat (1) nur nichttriviale Lösungen vom Typ I. — 4. Ist $g(x)$ negativ und stetig differenzierbar für $x \geq 0$, strebt $g(x)$ für $x \rightarrow +\infty$ monoton gegen 0, so hat eine (evtl. vorhandene) nichttriviale Lösung vom Typ II keine Nullstelle. — 5. Ist $g(x)$ stetig und absolut integrierbar über $(0, \infty)$, so genügt jede (evtl. vorhandene) Typ-II-Lösung von (1) der Schranke $|y|^{n-1} \leq (n-1)(n+1)^{-(n+1)/2n} \int_x^\infty |g| dx$. — 6. Sei $g(x)$ stetig und $g(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \infty$). Dann ist jede Lösung vom Typ I, falls vorhanden, oszillatorisch. Bezeichnet $N(x)$ die Anzahl der Nullstellen in $(0, x)$, so gilt $N(x) \sim A^{n-1} x^{n-1/2} (2K)^{-1}$ mit $A = r(\infty)$ und $K = \int_0^1 (1 - \psi^{2n})^{-1/2} d\psi$. — 7. Sei $g(x)$ für $x \geq 0$ zweimal stetig differenzierbar; mögen $g(x)$ und $g'(x)$ für $x \rightarrow \infty$ monoton gegen 0 streben; gelte $\int_0^\infty g^2 dx < \infty$. Dann gibt es zu jeder Typ-I-Lösung von (1) zwei Konstanten $A \geq 0$, B derart, daß für $x \rightarrow \infty$ gilt $y = A \psi \left(A^{n-1} x^{n-1/2} + c_n A^{1-n} \int_0^x g dx + B \right) + o(1)$ (entsprechende Formel für y' durch formale Differentiation). Dabei ist $\psi(\theta)$ definiert durch $\psi'' + n \psi^{2n-1} = 0$, $\psi(0) = 1$, $\psi'(0) = 0$, und es ist $c_n = \frac{1}{4K} \int_0^{4K} \psi^2(\theta) d\theta$.
F. W. Schäfke.

Taam, Choy-Tak: An extension of Osgood's oscillation theorem for a nonlinear differential equation. Proc. Amer. math. Soc. 5, 705—715 (1954).

In $(m(t)x')' + \sum_{j=1}^k f_j(t)x^{2j-1} = 0$ seien $(m(t))^{-1}$, $f_j(t)$ reellwertige, nichtnegative, Lebesgue-meßbare Funktionen in $T: t \in \infty$ und Lebesgue-integrierbar in T, R für jedes $R \in T$. I. Für $T \subseteq t < \infty$ gelte ferner $m(t) \leq m_0$ (m_0 positive Konstante), $f_1(t) \geq f_0 > 0$ (f_0 Konstante), alle $m(t)f_j(t) \geq 0$ und nichtfallend (bzw. alle nichtwachsend), $m(t)f_j(t) \leq r < 0$ für mindestens ein j . Dann wechselt jede Lösung ($\neq 0$) der Differentialgleichung in einem Intervall $T \subseteq T' \subseteq t < \infty$ unendlich oft das Vorzeichen, und die Amplituden der Schwingungen sind gleichmäßig beschränkt. Die Amplituden haben monotonen Verlauf, anwachsend bei nichtwachsenden $m f_j$ (bzw. fallend bei nichtfallenden $m f_j$). $M(t)$ sei die absolut stetige Funktion, welcher $m x'$ fast überall gleich ist; dann gilt $M^2 = \sum_{i=1}^k a_i x^{2i} = c^2 + \varepsilon(t)$, wo c konstant und $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$ ist. — II. Die Beschränktheit aller Lösungen kann bereits gezeigt werden, wenn von den Koeffizienten m, f_j an Stelle von I. vorausgesetzt wird: Es sind alle $m f_j \geq 0$ und monoton, und a) $m f_j$ ist nichtfallend und positiv für mindestens ein j oder b) $m f_j$ ist nichtwachsend für alle j und hat für mindestens ein j eine positive untere Grenze. — III. Die Existenz

und Eindeutigkeit (für alle $t \in T$) der Lösung der Anfangswertaufgabe der Differentialgleichung wird gezeigt. Die Ergebnisse lassen sich auf allgemeinere Differentialgleichungen übertragen; insbesondere gelten die Aussagen von I. auch bei $(m x'')' + f + \sum_{j=1}^k f_j g_j = 0$ unter den in I. über $m f_j$ getroffenen Voraussetzungen, und falls $x' f(t, x, x') \geq 0$, $g_j(x) = g_j(-x) = 0$ für $x \geq 0$, g_j stetig ist und ein j existiert, für welches $\int_0^t g_j(s) ds$ bei $x \rightarrow \infty$ divergiert, wenn $m f_j$ eine positive untere Grenze hat.

L. Collatz.

Castro, Antonio de: Un teorema di confronto per l'equazione differenziale delle oscillazioni di rilassamento. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 9, 280—282 (1954).

L'A. établit quelques propriétés d'existence et de limitation pour les intégrales périodiques d'équations de la forme $x'' + f(x, x') x' + g(x) = 0$, en comparant des équations qui ne diffèrent que par le choix de f .

Ch. Blanc.

Gagliardo, Emilio: Sui criteri di oscillazione per gli integrali di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 9, 177—189 (1954).

L'A. généralise les théorèmes d'oscillation connus (A. Wintner, ce Zbl. 32, 348; M. Zlamal, ce Zbl. 40, 195; etc.) pour l'équation (1) $y'' + A(x)y = 0$. — Si $M(x) > 0$, $\int_0^\infty [M(x)]^{-2} dx = \infty$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t ds \int_0^s \{A(x) [M(x)^2] + M(x) M''(x)\} dx = \infty$ (M'' continue), toute solution de l'équation (1) est oscillante. — La remarque de l'A. que ce théorème est plus général que les théorèmes de Kneser, Fite et Mikusiński (voir p. e. J. G. Mikusiński, ce Zbl. 39, 313) n'est pas tout-à-fait exacte, car ces théorèmes concernent l'équation $y^{(n)} + A(x) = 0$ d'ordre arbitraire.

J. Mikusiński.

Chandrasekhar, S.: On characteristic value problems in high order differential equations which arise in studies on hydrodynamic and hydromagnetic stability. Amer. math. Monthly 61, Nr. 7, Teil 2, 32—45 (1954).

Für Eigenwertprobleme bei Differentialgleichungen hoher Ordnung werden einige allgemeine Behandlungsmethoden (Variationsrechnung und Entwicklung nach Orthogonalfunktionen) skizziert. In einem Anhang sind eine Reihe hierher gehöriger typischer Probleme, hauptsächlich strömungstechnischer Art, angeführt und mehr oder weniger ausführlich diskutiert.

C. Heinz.

Hartman, Philip: On the essential spectra of ordinary differential operators. Amer. J. Math. 76, 831—838 (1954).

1. Die Funktion $q(t)$ sei für $0 \leq t < \infty$ positiv, stetig und nicht-abnehmend, für $t \rightarrow \infty$ gelte $q(t) \rightarrow \infty$. Ist dann entweder $q(t) = o(t^2)$ ($t \rightarrow \infty$) oder $\int_0^\infty dt q^{1/\mu} = \infty$ für ein $\mu > 1$, so ist die Differentialgleichung $y'' + (\lambda + q)y = 0$ im Sinne von H. Weyl vom Grenzpunkttyp und ihr wesentliches Spektrum ist die gesamte λ -Achse. — 2. Es gibt in $0 \leq t < \infty$ stetige Funktionen $q(t)$ mit $q(t) \leq C$, für die das wesentliche Spektrum von $y'' + (\lambda + q)y = 0$ aus den Punkten $\lambda = n^2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) besteht.

F. W. Schäfke.

Titchmarsh, E. C.: On the asymptotic distribution of eigenvalues. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 5, 228—240 (1954).

In $0 \leq x < \infty$ sei $q(x)$ dreimal differenzierbar; q und q' seien nicht-abnehmende Funktionen: für $x \rightarrow +\infty$ gelte $q' q = O(x^{-1})$, $q'' q' = O(x^{-1})$, $q''', q'' = O(x^{-1})$; $\int_0^\infty \{q(x)\}^{-1/2} dx$ sei konvergent. Sind dann $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ die Eigenwerte des singulären Problems $\psi'' + (\lambda - q)\psi = 0$, $\psi(0) \cos \alpha + \psi'(0) \sin \alpha = 0$, so gilt bei $\sin \alpha \neq 0$ stets $z(\lambda_n) = (n + \frac{1}{4})\pi + O(1/n)$ mit $z(\lambda) = \int_0^X \{\lambda - q(t)\}^{1/2} dt$ und $q(X) = \lambda$; ist $\sin \alpha = 0$, so hat man $1/4$ durch $3/4$ zu ersetzen. — Das ent-

sprechende Resultat: $z(\lambda_n) = (n + \frac{1}{2})\pi + o(1)$ bei $z(\lambda) = \int_{\lambda'}^x \{\lambda - q(t)\}^{1/2} dt$, $q(X) = q(X') = \lambda$, ergibt sich hieraus auch für das Problem in $(-\infty, \infty)$, falls $q(x)$ in $-\infty < x \leq 0$ entsprechende Voraussetzungen erfüllt. *F. W. Schäfke*.

Šnol', I. E.: Über das Verhalten von Eigenfunktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **94**, 389—392 (1954) [Russisch].

Es wird das Problem betrachtet: $-y'' + q(x)y = \lambda y$ ($0 \leq x < \infty$), $\alpha y(0) + \beta y'(0) = 0$; $q(\lambda)$ sei die zugehörige Spektralfunktion, und S sei das Spektrum des Problems, d. h. die Komplementärmenge der Konstanzintervalle der (monoton wachsenden) Funktion $q(\lambda)$. Satz: Ist $q(x) > C$, so gilt für q -fast alle $\lambda \in S$: $|\varphi(x, \lambda)| \leq C(\lambda, \varepsilon) x^{1/2+\varepsilon}$ mit beliebigem $\varepsilon > 0$. Umgekehrt bilden diejenigen Punkte λ , für die $\varphi(x, \lambda)$ nicht stärker als eine Potenz von x wächst, eine Teilmenge von S mit vollem q -Maß. Also ist die Bedingung, daß $\varphi(x, \lambda)$ nicht stärker als eine Potenz von x wächst, für q -fast alle Punkte λ notwendig und hinreichend dafür, daß λ zum Spektrum S gehört. *B. Sz.-Nagy*.

Meixner, Josef und Friedrich Wilhelm Schäfke: Eigenwertkarten der Sphäroid-differentialgleichung. Arch. der Math. **5**, 492—505 (1954).

Die Sphäroiddifferentialgleichung

$$(1) \quad ((1 - z^2) y'(z))' + [\mu^2/(1 - z^2) + \lambda + \gamma^2(1 - z^2)] y(z) = 0$$

mit den Parametern λ, γ^2, μ^2 hat stets eine nichttriviale Lösung mit der Umlaufsrelation $y(z e^{\pi i}) = e^{\pi i \nu} y(z)$; ν heißt der charakteristische Exponent. Als Eigenwertkarten der Differentialgleichung (1) werden bezeichnet die Darstellungen der Kurven $\nu = \text{const.}$ bei festem μ in einer (λ, γ^2) -Ebene. Im Anschluß an die Untersuchungen, die die Verff. S. 221 ff. ihres Buches, Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen, Berlin 1954, über die Struktur der Eigenwertkarten der Differentialgleichung (1) gemacht haben, werden Ergänzungen und Vereinfachungen gegeben. So werden z. B. in II für die charakteristischen Kurven $\nu = 1/2 \pmod{1}$ bei $\gamma^2 = 0$, die in jeder Eigenwertkarte besondere Verhältnisse schaffen, sowohl für ihre Berechnung wie für die Realitätsverhältnisse um $\gamma^2 = 0$, insbesondere für $\mu = m = 0, 1, 2, \dots$ sehr vereinfachte Überlegungen gegeben, aus denen sich allgemeine Aussagen über den Verlauf dieser Kurven in der Umgebung von $\gamma^2 = 0$ ergeben. In III wird das Problem des Verhaltens der charakteristischen Kurven $\nu = \pm \mu \pmod{1}$ beim Übergang von $\mu < 1$ über $\mu = m = 1$ zu $\mu > 1$ eingehend untersucht. Zur Erläuterung sind Ausschnitte aus acht Eigenwertkarten zu $\mu = 0, \mu = 1/4, \mu = 1/2, \mu = 3/4, \mu = 0,95, \mu = 1, \mu = 1,05, \mu = 5/4$ mit Einzeichnung vor allem der Kurven $\nu = \pm \mu \pmod{1}$ angefügt. *O. Volk*.

Hartman, Philip and Aurel Wintner: On monotone solutions of systems of non-linear differential equations. Amer. J. Math. **76**, 860—866 (1954).

1. (Hauptsatz) Sei $f = (f^1, f^2, \dots, f^n) = f(t, x)$ eine stetige Vektorfunktion von $(t, x) = (t, x^1, x^2, \dots, x^n)$ für $t \geq 0, x \geq 0$ [d. h. $x^i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$)] mit $f(t, 0) = 0, f(t, x) > 0$. Für jede Konstante $T > 0$ möge eine in $0 \leq r < \infty$ positive, stetige Funktion $q = q_T(r)$ existieren mit $\int_0^\infty \frac{dr}{q(r)} = \infty$ und $x \cdot f(t, x) \leq q(|x|^2)$ in $0 \leq t \leq T$. Dann gibt es zu jedem $c > 0$ mindestens eine Vektorfunktion $x = x(t)$ mit $|x(0)| = c$, die für $0 \leq t < \infty$ Lösung von $x' = -f(t, x)$ ist mit $x(t) \geq 0, x'(t) \leq 0$. 2. Ergänzend zu den Voraussetzungen von 1. möge $f(t, x)$ stetige partielle Ableitungen beliebiger Ordnung besitzen; es gelte für diese $(-1)^{h_0} D_t^{h_0} D_{x_1}^{h_1} \dots D_{x_n}^{h_n} f \geq 0$ ($h_k = 0, 1, 2, \dots$). Dann ist jede Lösung von $x' = -f(t, x)$ mit $x \geq 0, x' \leq 0$ in der Form $x(t) = \int_0^\infty e^{-ts} da(s)$ mit $da(s) \geq 0$ darstellbar. 3. Sei ergänzend zu den Voraussetzungen von 1. $f(t, x)$ stetig definiert

für $0 \leq t < \infty$ und alle x und eine nicht-abnehmende Funktion von x , $f(t, x_1) \leq f(t, x_2)$ für $x_1 \leq x_2$. Sei $x = x(t)$ eine Lösung von $x' = -f(t, x)$ mit $x \geq 0$, $x' \leq 0$. Dann gilt für die durch $x_0(t) = x(0)$; $x_m(t) = x(0) - \int_0^t f(s, x_{m-1}(s)) ds$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) definierten sukzessiven Approximationen zu $x(t)$ — unabhängig von Konvergenz — $(-1)^m (x_m(t) - x(t)) \geq 0$ für $0 \leq t < \infty$. — Bem. d. Ref. Beim Beweise von 1. besteht anscheinend noch eine Lücke. Denn entgegen der Bemerkung der Verff. wird trotz $f(t, 0) = 0$ die für x mit mindestens einer negativen Komponente zu 0 erklärte Funktion $f(t, x)$ im allgemeinen nicht für $0 \leq t < \infty$ und alle x stetig sein. Man kann jedoch mit geeigneten Schlüssen wohl auch ohne eine solche Fortsetzung auskommen.

F. W. Schäfke.

Putnam, C. R.: Stability and almost periodicity in dynamical systems. Proc. Amer. math. Soc. 5, 352—356 (1954).

Sia dato il sistema di equazioni differenziali (1) $\dot{x} = f(x)$ ($\dot{x} = dx/dt$) dove $x = (x_1, \dots, x_n)$ ed $f = (f_1, \dots, f_n)$ ha derivate prime continue. Hartman e Wintner [Amer. J. Math. 65, 273—278 (1943)] hanno provato che per ogni caratteristica $x(t)$ di (1) la cui chiusura Ω sia compatta la quasi periodicità nel senso di Bohr di $x(t)$ equivale ad un particolare tipo di stabilità (B -stability). Da esempi risulta che tale stabilità è più ristretta di quella nel senso di Liapunov in $-\infty < t < +\infty$ rispetto a Ω , cosicchè da questa non segue, in generale, la quasi periodicità della $x(t)$. L'A. prova tuttavia che sostituendo alla chiusura Ω della caratteristica $x(t)$ un più generale insieme Q compatto e invariante per (1), ed ammessa inoltre la condizione di incompressibilità $\text{div } f = 0$, allora ogni caratteristica di (1) che sia stabile secondo Liapunov in $-\infty < t < +\infty$ rispetto ad Q ha tre proprietà in comune con le funzioni quasi periodiche di Bohr. Resta da decidere se tali caratteristiche siano effettivamente quasi periodiche.

R. Conti.

Putnam, C. R.: A note on correlation functions and stability in dynamical systems. Proc. Amer. math. Soc. 5, 696—699 (1954).

È dato il sistema di equazioni differenziali (1) $\dot{x} = f(x)$ ($\dot{x} = dx/dt$) dove $x = (x_1, \dots, x_n)$, dove $f = (f_1, \dots, f_n)$ ha derivate prime continue ed è soddisfatta la condizione $\text{div } f = 0$, in un certo spazio Ω compatto, invariante, chiusura di un insieme aperto di misura L finita. Sia P_t^* una qualunque traiettoria di (1) stabile per $-\infty < t < +\infty$ (secondo Liapunov) rispetto ad Ω . L'A. prova che se $\varphi(P)$ è una qualunque funzione continua in Ω che risulta lungo P_t^* quasi periodica B^2 (per la definizione cfr. ad es. A. S. Besicovitch, questo Zbl. 4 253, p. 78), allora le frequenze di $\varphi(P_t^*)$ appartengono allo spettro di una ben determinata funzione che dipende dalla φ considerata, ma che è del tutto indipendente dalla particolare traiettoria P_t^* . Si noti che la P_t^* può anche non essere ovunque densa in Ω . R. Conti.

Zubov, V. I.: Zur Theorie der zweiten Methode von A. M. Ljapunov. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 99, 341—344 (1954) [Russisch].

Verf. betrachtet ein System $\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, t)$ unter den üblichen Voraussetzungen (Eindeutigkeit der Lösung, Vorhandensein der trivialen Lösung $x_i = 0$). Die Existenz einer geeigneten „Ljapunovschen Funktion“ ist bekanntlich hinreichend für asymptotische Stabilität der trivialen Lösung; doch ist dieses Ljapunovsche Kriterium, das sogar gleichmäßige Stabilität bezüglich der Anfangswerte garantiert, zu stark. Verf. teilt ohne Beweis einige schwächere Kriterien mit, z. B.: Es sei $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ positiv definit, stetig differenzierbar, $\Phi(0, \dots, 0) = 0$, und zu jedem δ existiere ein $r(\delta)$, daß $\Phi > r^2$ für $\sum x_i^2 = \delta > 0$. Wenn sich zu einem derartigen Φ eine negativ definite Funktion $V(x_1, \dots, x_n, t)$ mit $V(0, \dots, 0, t) = 0$ konstruieren läßt, die der Gleichung

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x_1, \dots, x_n, t) + \frac{\partial V}{\partial t} = \Phi(x_1, \dots, x_n) \left(1 + \sum f_i^2\right) (1 + V)$$

genügt und in einem gewissen Bereich $0 < \sum x_i^2 < \gamma$ zwischen 0 und -1 liegt,

dann ist die Nulllösung asymptotisch stabil (V ist nicht notwendig eine „Ljapunovsche Funktion“). — Der Satz ist umkehrbar: aus der asymptotischen Stabilität folgt die Existenz einer Funktion Φ . — Bemerkung: Die Beweise für den stationären Fall finden sich in der Arbeit „Fragen der Theorie der zweiten Methode von Ljapunov, Konstruktion der allgemeinen Lösung im Gebiet asymptotischer Stabilität“, Priklad. Mat. Mech. 19, 179—210 (1955). Die der mitgeteilten entsprechende Formel hat rechts den Exponenten eins an Stelle von 1 2. W. Hahn.

Krasovskij, N. N.: Hinreichende Bedingungen für die Stabilität der Lösungen eines Systems von nicht-linearen Differentialgleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 98, 901—904 (1954) [Russisch].

Verf. beweist unter Erweiterung eines Ansatzes von Zubov [Prikl. Mat. Mech. 17, 506—508 (1953)] folgendes über die Lösungen des Systems $\dot{x}_i = X_i(x_1, \dots, x_n)$: Es seien die Eigenwerte der symmetrisierten Jacobischen Matrix J , also der Matrix

$$J^* = \left\{ \frac{1}{2} (\partial X_k / \partial x_i + \partial X_i / \partial x_k) \right\}$$

mit $\lambda_i(x_1, \dots, x_n)$ bezeichnet. Es sei $\lambda(r)$ der kleinste Absolutbetrag der λ_i auf der Sphäre $\sum x_i^2 = r^2$. Ferner sei $m^2(r)$ das Minimum von $\sum X_i^2$ auf der gleichen Sphäre, und G sei der „Einflußbereich“ des Nullpunkts (d. h. alle in G beginnenden Trajektorien laufen im Nullpunkt aus). Hinreichend dafür, daß die Sphäre $\sum x_i^2 = R^2$ ganz in G liegt, ist, daß die λ_i für alle Punkte der Sphäre $\sum x_i^2 \leq R_1^2$ negativ sind.

Darin ist R_1 durch $\int_R^{R_1} m(r) \lambda(r) dr > 2N$ ($2N = \max \sum X_i^2$ auf $\sum x_i^2 = R^2$)

definiert. Zum Beweis bildet man $2V = \sum X_i^2$. Wenn man dV/dt als quadratische Form schreibt, bekommt diese die Matrix J^* . — Verf. beweist noch: Gibt es eine konstante Matrix A mit positiven Eigenwerten derart, daß die symmetrisierte Matrix AJ in einer Umgebung des Nullpunkts negative Eigenwerte hat, so ist die Nulllösung asymptotisch stabil. [Vgl. Verf., dies. Zbl. 56, 89; Priklad. Mat. Mech. 18, 735—737 (1954).]

W. Hahn.

Staržinskij, V. M.: Übersicht über die Arbeiten über die Stabilität der trivialen Lösung linearer Differentialgleichungssysteme mit periodischen Koeffizienten. Priklad. Mat. Mech. 18, 469—510 (1954) [Russisch].

Das im Titel genannte Problem ist in den letzten zwanzig Jahren von einer Anzahl sowjetischer Forscher behandelt worden, die vorwiegend mit den von Ljapunov entwickelten Methoden arbeiten. Der Bericht des Verf. berücksichtigt vor allem diese neueren sowjetischen Untersuchungen (geht also beispielsweise auf die Hillsche Methode und das Verfahren der kleinen Parameter nicht ein) und bringt eine große Zahl von Einzelergebnissen aus teilweise schwer zugänglichen und noch ungedruckten Arbeiten. — § 1: Stabilitätsfragen bei der Gleichung $\ddot{x} + \lambda p(t)x = 0$. Untersuchungen von Ljapunov. Verf. stellt fest, daß so manche von andern Autoren nach Ljapunov veröffentlichten Ergebnisse sich bereits bei Ljapunov finden, z. B. die Aufteilung der λ -Achse ($-\infty < \lambda < +\infty$) in Intervalle stabilen und instabilen Verhaltens. Weiterführende Untersuchungen von Kovalenko und Krejn (1950, z. T. noch nicht gedruckt). § 2. Periodische Lösungen der Gleichung. Arbeiten von Adamov (ab 1935) und seinen Schülern. Die Stabilitätskriterien von G. Borg (1944), Krejn (1951), Jakubovič (Diss. 1953). Es handelt sich dabei um „L-Kriterien“, d. h. es wird eine Funktion gegeben, deren Argumente die Koeffizienten der Gleichung oder aus ihnen gebildete Funktionale sind und deren Vorzeichen eine Entscheidung über die Stabilität der Nulllösung ermöglicht. Einige der Kriterien von Jakubovič beruhen auf Abschätzungen der charakteristischen Zahlen der Lösungen, wobei von $p(t)$ nur Maximalwert, Minimalwert und Integralmittel bekannt zu sein brauchen. § 3. Die Gleichung $\ddot{x} + q(t)\dot{x} + p(t)x = 0$ (bzw. transformierte Formen). Kriterien von Leonov (1946, 1949), Jakubovič und Staržinskij. § 4. Das System zweiter Ordnung $\dot{x}_1 = h_{12}(t)x_1 + h_{22}(t)x_2$, $\dot{x}_2 = -h_{11}(t)x_1 - h_{12}(t)x_2$, also in „kanonischer Form“. Kriterien von Krejn und Jakubovič, dabei z. B. das folgende: Es sei H die (symmetrische) Matrix (h_{ij}) , $H_0 = (a_{ij})$ reell symmetrisch, $a_{11} > 0$, det $H_0 = 1$. Ferner sei die größte bzw. kleinste Wurzel von det $(H - h H_0) = 0$ mit $h_{\max}(t)$ bzw. $h_{\min}(t)$ bezeichnet. Ist dann für irgendein ganzes k die Ungleichung (ω Per-

odenlänge) $k\pi < \int_0^\omega h_{\min}(t) dt < \int_0^\omega h_{\max}(t) dt < (k+1)\pi$ erfüllt, so ist die triviale Lösung des Systems stabil. § 5. Sätze über das allgemeine System zweiter Ordnung (Staržinskij 1954)

§ 6. Das allgemeine System n -ter Ordnung. Anwendung der zweiten Methode von Ljapunov. Heranziehung eines Hilfsystems mit konstanten Koeffizienten — die Koeffizienten $p_{ij}(t)$ werden durch ihre Integralmittel über die Periodenlänge ersetzt —, das als „System der ersten Näherung“ dient (Nugmanova 1944, Četaev 1946). § 7. Das System $(2m)$ -ter Ordnung in kanonischer Form mit Parameter, also

$$\dot{x}_j = \lambda \frac{\partial H}{\partial x_{j+m}}, \quad \dot{x}_{j+m} = -\lambda \frac{\partial H}{\partial x_j} \quad (j = 1, \dots, m), \quad H = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{2m} h_{jk}(t) x_j x_k, \quad h_{jk} = h_{kj}.$$

Kriterien von Krejn und Didskij (1951), darunter eins vom gleichen Typ wie das oben zitierte von Jakubovič. Stabilitätsbereiche auf der λ -Achse. § 8. Das System $\ddot{y}_k + \mu(p_{k1} y_1 + \dots + p_{km} y_m) = 0$ ($k = 1, \dots, m$) mit periodischen Koeffizienten und dem Parameter μ . Kriterien von Krejn. Das Schriftenverzeichnis zählt 101 Nummern; alphabetische oder zeitliche Anordnung wäre vorzuziehen gewesen. W. Hahn.

Ljaščenko, N. Ja.: Über die asymptotische Stabilität der Lösungen eines Differentialgleichungssystems. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **96**, 237—239 (1954) [Russisch].

Assume that the matrix $B(t)$ is bounded, satisfies a uniform Lipschitz condition in $0 \leq t < \infty$ and has characteristic roots $p_i(t)$ such that $\operatorname{Re} p_i(t) < -\gamma$, $\gamma > 0$. If the Lipschitz constant is small enough, the solutions of the system $\dot{x} = Bx$ decrease exponentially. More generally, the same is true for the solution of $\dot{x} = Ax$ if the mean value of $A - B$ in any interval (t_0, t) , $0 \leq t_0 < t < \infty$, is sufficiently small. The author gives precise sufficient inequalities for the Lipschitz constant and mean value. J. L. Massera.

Vinograd, R. E.: Über eine Behauptung K. P. Persidskij's. Uspechi mat. Nauk **9**, Nr. 2, 125—128 (1954) [Russisch].

L'A. démontre au moyen des exemples que le théorème suivant de K. P. Persidskij est incorrect: Soit donné un système linéaire des équations différentielles (1) $x' = A(t)x$, $0 < t < \infty$, soit $A_\tau(t)$ la matrice coïncidante avec $A(t)$ dans l'intervalle $0 < t < \tau$ et puis périodiquement prolongée et soit (2) $y' = A_\tau(t)y$ le système périodique avec la matrice $A_\tau(t)$. Désignons les exposants caractéristiques du système (1) par $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ et les exposants caractéristiques du système (2) par $\lambda_1(\tau), \lambda_2(\tau), \dots, \lambda_n(\tau)$. Alors il est nécessaire et suffisant pour la régularité du système (1) qu'existent les limites suivantes $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \lambda_j(\tau) = \lambda_j^*$ et si cela a lieu, on obtient au moyen d'une énumération convenablement choisie $\lambda_j^* = \lambda_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Néanmoins, la conséquence suivante déduite par K. P. Persidskij de ce théorème est exacte. Si un système canonique (Hamiltonien) d'ordre $2n$ est régulier, alors en même temps que l'exposant caractéristique λ_i , il existe toujours l'exposant caractéristique tel que $\lambda_{2n-i+1} = -\lambda_i$. Cette conséquence, qui naturellement, ne peut pas être déduite du théorème de K. P. Persidskij, est démontrée d'une manière très élémentaire par I. G. Malkin. C. Orloff.

Antosiewicz, H. A. and P. Davis: Some implications of Liapunov's conditions for stability. J. rat. Mech. Analysis **3**, 447—457 (1954).

The results contained in this paper are essentially known; for instance, Theorem 1 is included in more general results of Malkin and Persidskij (Cf. I. G. Malkin, this Zbl. **48**, 328, pages 309—317, Theorem 1 and 2, of this book). J. L. Massera.

Malkin, I. G.: Über die Resonanz in quasiharmonischen Systemen. Priklad. Mat. Mech. **18**, 459—463 (1954) [Russisch].

Der Verf. behandelt das System (1) $dx_s/dt = p_{s1}x_1 + \dots + p_{sn}x_n + f_s(t)$ ($s = 1, \dots, n$) von linearen nichthomogenen Differentialgleichungen, wo p_{sj} stetige periodische Funktionen von t und f_s fastperiodische Funktionen von t sind. In Abhängigkeit vom Frequenzspektrum der Funktionen f_s und von den Wurzeln der charakteristischen Gleichung des entsprechenden homogenen Systems untersucht der Verf. notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz fastperiodischer Lösungen des Systems (1). Dabei unterscheidet er zwei Fälle: den Fall,

wo das System fastperiodische Lösungen bei vorgegebenem Frequenzspektrum und sonst beliebiger Wahl der Funktionen f_s besitzt, und den Fall, wo fastperiodische Lösungen des betrachteten Systems nur unter zusätzlichen Bedingungen existieren. Diesen zweiten Fall versteht der Verf. unter Resonanz. In einer allgemeinen Ausführung leitet der Verf. für den Resonanzfall zwei Sätze ab, die notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz der fastperiodischen Lösungen angeben, und zwar: 1. wenn die Störungsfunktionen f_s als endliche trigonometrische Summen erscheinen, und 2. wenn die Anzahl der Lösungsgruppen, die jeder mehrfachen Wurzel vom Modul 1 der erwähnten charakteristischen Gleichung entspricht, und die Wurzelvielfachheit gleich sind.

T. P. Angelitch.

Basov, V. P.: Konstruktion der Lösungen einer Klasse von Systemen linearer Differentialgleichungen. Priklad. Mat. Mech. 18, 313–328 (1954) [Russisch].

This paper contains complete proofs of theorems announced earlier (this Zbl. 44, 92).

J. L. Massera.

El'sin, M. I.: Eine Vergleichsmethode in der qualitativen Theorie einer unvollständigen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Mat. Sbornik, n. Ser. 34 (76), 323–330 (1954) [Russisch].

The author considers system (1): $\dot{x} = y$, $\dot{y} = f(x, y)$ and replaces the ordinary plane by a Riemann surface by means of cuts along the x -axis to the right of certain singular points; an infinite number of replicas of the cut (x, y) -plane are then connected to form a surface of logarithmic type in the neighborhood of such points. The systems $\dot{x} = u$, $\dot{u} = F(x, u)$ and $\dot{x} = v$, $\dot{v} = G(x, v)$ are called comparable with (1) if (i) $F(x, y)/y \leq f(x, y)/y \leq G(x, y)/y$; (ii) the singular points of the three systems coincide; (iii) the trajectories of the three systems „lie on common sheets of the same Riemann surface“. Under these assumptions trajectories of comparable systems may cut each other at most at one point (on the Riemann surface). A number of consequences are derived as to the location of limit cycles, separatrices, trajectories going to infinity, etc. A certain vagueness of language in the definitions, statements and proofs makes it difficult to the reviewer to understand some points of this paper.

J. L. Massera.

Grabar, M. I.: Über die strenge Ergodizität dynamischer Systeme. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 95, 9–12 (1954) [Russisch].

The author announces the construction of a system $\dot{x} = \alpha_1$, $\dot{y} = \alpha_2$, $\dot{z} = \lambda/\Phi(x, y)$ defined in a 3-torus, x, y, z being real numbers mod 2π , Φ analytic, $\gamma = \alpha_2/\alpha_1$ irrational, such that for any $\lambda \neq 0$ it is an irreducible (the torus is a minimal set) dynamical system which, according to the value of λ , may be strictly ergodic or not, both alternatives actually taking place. For this purpose the following theorems are used: 1. Let S_t be a continuous strictly ergodic system defined in a compactum R and $\lambda \neq 0$ an arbitrary real number; the homeomorphism $S_{2\pi/\lambda}$ is strictly ergodic if and only if no eigenvalue of S_t has the form $k\lambda$, k integer; 2. Let S_t be a dynamical system in R , F a section of period $t_0 \neq 0$ (i. e. $F \subset R$, $S_{kt_0} F = F$ for any integer k , $S_t F \cap F \neq \emptyset$ implies $t = k t_0$, $\bigcup S_t F = R$); then S_t is strictly ergodic if and only if the homeomorphism $S_{t_0}: F \rightarrow F$ is strictly ergodic; 3. $S_{2\pi/\lambda}$ is irreducible if and only if S_t has no continuous eigenfunctions corresponding to eigenvalues $k\lambda$, k integer; 4. Let S_t be an irreducible dynamical system defined in an n -torus which, by means of a change of the time variable, can be transformed in an almost-periodic system; if S_t admits a continuous non-constant eigenfunction, then S_t is almost-periodic. No proofs are given.

J. L. Massera.

Nemyckij, V. V.: Die Methode der drehenden Funktionen von Ljapunov zum Aufsuchen von Schwingungszuständen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 97, 33–36 (1954) [Russisch].

A closed region G of n -space is said to be „torus-like“ if it can be obtained

from a topological (solid) torus by subtracting a finite number of subdomains; the trajectory $q(P, t)$ of a dynamical system $\dot{x} = f(x)$ in G defines a certain oscillatory state relative to G if it is stable in the sense of Poisson and there is a $\tau_0 > 0$ such that after an interval of time $\tau_0 \leq \tau$ the point $q = q(P, t)$ intersects once and only once each meridian section of G . A function $V(x) = F_1(x) F_2(x)$ is called a "rotating Ljapunov function" relative to G if F_1 and F_2 are continuously differentiable in G , the surface $V = C$ form a pencil whose axis does not intersect G ($C = -\infty$ correspond to the surface $F_2 = 0$), each surface intersects G and each point of G belongs to one of these surfaces. Let $dV/dt = (dV/dt) \cdot f = I(x) \cdot V^2$ for $V \neq 0$, $dV/dt = B(x)$ for $V = 0$. Then: if at every boundary point of G the vectors f enter into G , if G contains no singular point and if a rotating Ljapunov function exists such that $I = a^2 < 0$, $B = a^2 > 0$ in G , then there is an oscillatory state in G . In the opinion of the reviewer, the result is true, although some points of the definitions are not entirely clear to him and certain conditions seem to be redundant or superfluous.

J. L. Massera.

Myśkiś, A. D.: Verallgemeinerungen eines Satzes über den Fixpunkt eines dynamischen Systems innerhalb einer geschlossenen Bahnkurve. Math. Sbornik, n. Ser. **34** (76), 525—540 (1954) [Russisch].

The author begins with the following elementary theorem: if $f(A, t)$ is a dynamical system (continuous one-parameter semigroup) defined in a (curved) n -polyhedron P with non-vanishing Euler characteristic, the system has a fixed point in P . Next he considers many-valued dynamical systems and, in particular, systems arising from equations "in contingents"; for this purpose he has to derive several topological lemmas relative to many-valued mappings whose image sets may be approximated in a certain way by means of aspherical sets. The statements are too numerous and complicated to be reproduced here in full; the following is a typical result: Let P be an n -polyhedron with non-vanishing Euler characteristic whose boundary S consists of smooth manifolds: assume that a continuous field of directions l_A is defined on S such that l_A forms at each point an acute angle with the inward normal; let $\Phi(A)$ be an equation in contingents [i. e. $\Phi(A)$ is a continuous many-valued mapping such that $\Phi(A)$ is bounded and convex] defined in the neighborhood of P and such that for any $A \in S$ and $B \in \Phi(A)$, the vector AB is not parallel to l_A ; then Φ has a fixed point $A_0 \in \Phi(A_0)$ in P .

J. L. Massera.

Krasovskij, N. N.: Über das Verhalten im Großen der Integralkurven eines Systems von zwei Differentialgleichungen. Priklad. Math. Mech. **18**, 149—154 (1954) [Russisch].

Consider the system $\dot{x} = X(x, y)$, $\dot{y} = Y(x, y)$ where X, Y belong to C^1 ; let $\lambda_i(x, y)$ be the characteristic roots of the matrix $\mathcal{C}(X, Y) \mathcal{C}^T(x, y)$; $m(r)$ and $M(r)$ are the bounds of the norm of the vector (X, Y) on the circle $x^2 + y^2 = r^2$. 1. If $\text{Re } \lambda_i < 0$ for $x^2 + y^2 \leq R_1^2$ and $\int_R^{R_1} m(r) dr = 2\pi R M(R)$, the attractive domain of the origin contains the circle $x^2 + y^2 \leq R^2$. 2. If $\text{Re } \lambda_i < 0$ for any (x, y) and $\int_0^\infty m(r) dr = \infty$, the origin is stable under arbitrary perturbations. 3. If there is only one singular point (the origin), $\text{Re } \lambda_i(0, 0) = 0$, $\text{Re } \lambda_i(x, y) < 0$ for $x^2 + y^2 \geq R^2$, $\int_0^\infty m(r) dr = \infty$, there is at least one stable limit cycle.

J. L. Massera.

Sansone, G. ed R. Conti: Sull'equazione di T. Uno ed R. Yokomi. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **37**, 37—59 (1954).

Gli AA. studiano il sistema $dx/dt = y^2 - (x+1)(\{x-1\}^2 + \lambda)$, $dy/dt = -xy$, equivalente all'equazione differenziale $dy/dx = -x/y \{y^2 - (x+1)(\{x-1\}^2 + \lambda)\}$,

il parametro reale λ variando da $-\infty$ a $+\infty$. Se $\lambda \leq 0$ oppure $\lambda \geq 1$ esistono cicli. Se $0 < \lambda < 1$ esistono due cicli, stabili e situati simmetricamente rispetto all'asse delle ascisse e questi cicli sono unici; in corrispondenza a valori di λ sufficientemente prossimi allo zero, esistono cicli aventi distanza arbitrariamente piccola dall'insieme costituito da due punti singolari e da due separatrici che li uniscano; in corrispondenza a valori di λ sufficientemente prossimi ad 1, esistono cicli contenuti in un intorno arbitrariamente piccolo del punto $(0, 1/2)$. Da questi risultati si deduce che l'equazione $u'' + \{3u^2 - (1 - \lambda)\} u' + 2u(u+1)\{(u-1)^2 + \lambda\} = 0$ non ammette soluzioni periodiche se $\lambda \geq 0$ oppure $\lambda \leq 1$ ed ha una sola soluzione periodica (stabile) se $0 < \lambda < 1$. Nell'ultimo paragrafo gli AA. studiano, per λ variabile nell'intervallo aperto $5 - 4\sqrt{2} < \lambda < 5 - 4\sqrt{2}$, la struttura delle caratteristiche.

G. Scorza Dragoni.

Conte, S. D. and W. C. Sangren: An expansion theorem for a pair of singular first order equations. Canadian J. Math. 6, 554—560 (1954).

Verff. verallgemeinerten die Untersuchung von Titchmarsh (Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations, Oxford 1949) über einen Entwicklungssatz des singulären Eigenwertproblems $y'' + (\lambda - q(x))y = 0$ auf das System (1) $u' - (\lambda + q_1(x))v = 0$, $v' + (\lambda + q_2(x))u = 0$ in einem Bericht der Oak Ridge National Laboratories (1952). Die vorliegende Arbeit stellt eine Zusammenfassung dieses Berichtes dar: Es sei (1) in $0 \leq x \leq \infty$ definiert und den Randbedingungen (2) $u(0) \cos \alpha - v(0) \sin \alpha = 0$ (α reell) unterworfen sowie $q_{1,2} \in L(0, \infty)$ und λ komplex. Dann existiert auf der gesamten reellen Achse ein kontinuierliches Spektrum. Ein beschränktes Funktionenpaar $f_1(x)$, $f_2(x) \in L^2(0, \infty)$, das außerdem beschränkter Schwankung ist und (2) genügt, läßt sich

$$\text{durch} \quad f_{1,2}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) \frac{u}{v}(x, \lambda) d\lambda$$

$$\text{mit} \quad g(\lambda) = [\mu^2(\lambda) + \nu^2(\lambda)]^{-1} \int_0^{\infty} [u(y, \lambda) f_1(y) + v(y, \lambda) f_2(y)] dy$$

darstellen, wobei $\mu(\lambda)$ und $\nu(\lambda)$ nicht gleichzeitig verschwinden können. Der Beweis von Titchmarsh läßt sich zur Bestätigung dieses Satzes verallgemeinern. Bei $u(0) = -\sin \alpha$, $v(0) = \cos \alpha$ hat (1) für große $\lambda = \sigma + it$, $t < 0$ die asymptotische Entwicklung $\frac{u}{v}(x) \sim \frac{\sin}{\cos}(\xi - \alpha) + \mathcal{O}\left(\frac{e^{tx}}{\lambda^{1/2}}\right)$ mit $\xi(x) = \lambda x - \frac{1}{2} \int_0^x [q_1(s) + q_2(s)] ds$.

W. Haacke.

Herlestam, Tore: On linear difference equations with constant coefficients. 12. Skand. Mat.-Kongr., Lund 1953, 61—78 (1954).

Der Differenzengleichung (1) $\sum_{v=0}^q a_v f(x+v) = a(T) f(x) = \varphi(x)$ werden das Polynom $a(z) = \sum_{v=0}^q a_v z^v$, der Operator $a(T)$ mit $Tf(x) = f(x+1)$ und verallgemeinerte Bernoullische Polynome $A_n(x)$ und Zahlen $A_n = A_n(0)$ zugeordnet, die ähnliche Eigenschaften wie die gewöhnlichen Bernoullischen Polynome und Zahlen haben und aus der erzeugenden Funktion $\frac{t^q e^{xt}}{a(e^t)} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{t^v}{v!} A_v(x)$ (für $|t| < \varrho$) gewonnen werden können. Dabei ist q die kleinste ganze Zahl ≥ 0 mit $a^{(q)}(1) \neq 0$ und ϱ der kleinste Betrag von $|\log \lambda|$, wenn λ alle Nullstellen von $a(z) = 0$ durchläuft und vom Logarithmus alle Zweige in Betracht gezogen werden. Die gewöhnlichen Bernoullischen Polynome und Zahlen erhält man für $a(z) = z - 1$, $q = 1$. Es wird eine verallgemeinerte Eulersche Summationsformel mit Restglied aufgestellt. Die „ a -periodische Fortsetzung“ \tilde{F} einer in $(x_0, x_0 + q)$ gegebenen Funktion $F(x)$ wird durch $a(T)\tilde{F}(x) = 0$ festgelegt und ihre Stetigkeit untersucht. Mit $\chi_v(x) = e^{2\pi i v x} \sum_{\lambda} \frac{\lambda^x}{(\mu - 1)!} A_{\mu-1}^{(\lambda)}(x)$ [μ = Vielfachheit der

Wurzel λ . $A_n^{(\lambda)}$ aus $a(z)$ herleitbare Polynome] wird für eine Riemann-integrierbare Funktion $F(x)$ die Äquivalenz aufgestellt

$$F(x) \sim \sum_{v=-\infty}^{+\infty} \gamma_v(x) \text{ in } (x_0, x_0 + g) \text{ mit } \gamma_v(x) = \left[a(T_v) \int_{x_0}^{x_0+u} \chi_v(x-u-t) F(t) dt \right]_{u=0}^{x_0+u}$$

Bei gleichmäßiger Konvergenz der Reihe in $(x_0, x_0 + g)$ geht die Äquivalenz in Gleichheit über. Ist $q(x)$ ein Polynom, so kann man eine spezielle Lösung von (1) mit Hilfe unbestimmter mehrfacher Integrale von $q(x)$ aufstellen. Unter gewissen Voraussetzungen kann man auch im allgemeinen Falle eine spezielle Lösung von (1) als „Eulersche Lösung“ aufstellen; diese lautet für

$$a(T) f(x) = q^{-m}(x), \text{ sofern } q^{-m}(x) \text{ stetig ist, einfach } \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^{(m)}(x+n), \text{ wobei } c_n \text{ die Koeffizienten}$$

von $\frac{1}{a(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ sind. Es werden einige Eigenschaften dieser so herausgegriffenen Eulerschen Lösung (Ableitungen, Fourierentwicklung) hergeleitet und Erweiterungsmöglichkeiten auf allgemeinere Differenzgleichungen angedeutet. *L. Collatz.*

Jost, Res: Lineare Differenzgleichungen mit periodischen Koeffizienten. Commentarii math. Helvet. 28, 173–185 (1954).

Zuerst wird die Differenzgleichung (I) $\sum_{v=0}^n r_v(e^{2\pi i z}) H(z+v) = 0$ untersucht; die $r_v(z)$ sind rationale Funktionen in v , die $a_v(z) = r_v(e^{2\pi i z})$ sind also meromorph und periodisch. Mit dem Translationsoperator t , der durch die Gleichung $t^k f(z) = f(z+k)$ eingeführt wird ($k=0, 1, 2, \dots$), kann man (I) anschreiben mit $\sum_{v=0}^n a_v(z) t^v H(z) = P(t) H(z) = 0$; hier ist $P(t)$ das Polynom $\sum_{v=0}^n a_v(z) t^v$. Als besondere Voraussetzung wird nun verlangt, daß $P(t)$ über dem Körper der $a_v(z)$ irreduzibel ist. Man kann (I) gewiß umformen zu $\sum_{v=0}^n p_v(e^{2\pi i z}) H(z+v) = 0$, wobei die $p_v(v)$ teilerfremde Polynome sind; die Nullstellen von $p_0(e^{2\pi i z})$ und $p_n(e^{2\pi i z})$ werden als die „singulären Stellen“ von (I) bezeichnet. Unter gewissen weiteren Voraussetzungen wird eine Lösung $H(z)$ konstruiert, die meromorph ist, deren Pole sich in den singulären Stellen von (I) befinden und die sich für große $|\operatorname{Im} z|$ in einer vorgeschriebenen Art verhält. Bemerkenswert ist, daß diese Lösung $H(z)$ nicht identisch mit der Nörlundsehen Lösung ist. Im zweiten Teil der Arbeit folgt eine Verallgemeinerung: Der Vektor $\eta(z) = [y_1(z), y_2(z), \dots, y_m(z)]$ und die nichtsinguläre m -reihige Matrix $\mathfrak{M}(z)$, deren Elemente gewissen Körpern meromorpher periodischer Funktionen angehören, werden durch die Gleichung (II) $\eta(z+1) = \mathfrak{M}(z) \eta(z)$ zu einem System von linearen Differenzgleichungen erster Ordnung für die $y_v(z)$ verknüpft. (II) läßt sich auf (I) reduzieren.

H. Töpfer.

Fort, Tomlinson: The loaded vibrating net and resulting boundary-value problems for a partial difference equation of the second order. J. Math. Physics 33, 94–104 (1954).

Es sei ein rechtwinkliges Netz von gewichtlosen Bändern gegeben, die in jedem Knotenpunkt (x, y) ($i=1, 2, \dots, m$; $j=1, 2, \dots, n$) mit der Masse m belastet sind. In diesem Netz werden Schwingungen senkrecht zur Netzebene (= Netz in Ruhe) betrachtet, deren Amplituden klein sind. q_i sei die von der Zeit t unabhängige Spannung des die Punkte (x, y) ($i=1, \dots, m$), ($j=1, \dots, n$) verbindenden Bandes, b ist der entsprechende Wert für die (x, y) ($i=1, \dots, m$). Die Abweichung der Masse in (x, y) aus der Ruhelage wird mit $u_{i,j}(t)$ bezeichnet. Setzt man $b(i, j) = b_j[m(x_{i-1} - x_i)]^{-1}$ und $k(i, j) = g_j[m(y_{j-1} - y_j)]^{-1}$, so hat man für jedes (i, j) die Bewegungsgleichung: $u_{i,j}'' = \frac{1}{m} \{b(i-1, j) \frac{1}{m} [u_{i-1,j}]^2 + \frac{1}{m} \{k(i, j-1) \frac{1}{m} [u_{i,j-1}]^2\}$, wobei $\frac{1}{m} [f(p, q)] = f(p+1, q) - f(p, q)$ und $\frac{1}{m} [f(p, q)] = f(p, q+1) - f(p, q)$. Das ist ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Es wird $u_{i,j}(t) = e^{st} v(i, j)$ angesetzt; dann findet man mit $s^2 = \lambda$ die Differenzgleichung

$$(I) \quad \frac{1}{m} [b(i-1, j) \frac{1}{m} [v(i-1, j)]] + \frac{1}{m} [k(i, j-1) \frac{1}{m} [v(i, j-1)]] + \lambda v(i, j) = 0.$$

(I) wird mit der Randbedingung (II) $v(0, j) = v(i, 0) = v(m+1, j) = v(i, n+1) = 0$ ($i=1, \dots, m$; $j=1, \dots, n$) versehen (eingespanntes Netz!). Indem diese Aufgabe die

Lösung eines Systems homogener linearer Gleichungen erfordert, ergibt sich eine (bei geeignet gewählter Zeilenanordnung) symmetrische „charakteristische Determinante“, die verschwinden muß, und dann auf gewisse „charakteristische Werte“ λ führt; diese sind, wie algebraisch gezeigt wird, alle positiv. — Wegen der zahlreichen Einzelergebnisse, die sich zu einem Teil auch auf „Knotenlinien“ beziehen, muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden. *H. Töpfer.*

El'sgol'e, L. É.: Die Stabilität der Lösungen von Differential-Differenzengleichungen. Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 4 (62), 95–112 (1954) [Russisch].

Verf. skizziert die Grundzüge einer Stabilitätstheorie für Differential-Differenzengleichungen (DDGL) analog der Ljapunovschen Theorie und berichtet gleichzeitig über einige Ergebnisse aus der neueren Literatur. § 1: Definition der Stabilität einer Lösung. Es sei $\bar{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(t)))$ die DDGL mit $\tau(t) \geq 0$. E_{t_0} sei die Punktmenge, die aus $t = t_0$ und $t - \tau(t) \leq t_0$ für $t \geq t_0$ besteht. Die Lösung $x(t) = x(t, \Phi, t_0)$ sei durch $x(t) = \Phi(t)$ ($t \in E_{t_0}$) festgelegt. Es sei $\bar{x} = x(t, \Phi, t_0)$ eine zweite Lösung. Wenn sich zu jedem $\varepsilon > 0$ ein von t_0 und ε abhängiges δ so finden läßt, daß aus der in E_{t_0} geltenden Ungleichung $|\Phi(t) - x(t)| < \delta$ die Ungleichung $|\bar{x} - x| < \varepsilon$ ($t \geq t_0$) folgt, und zwar für alle $t_0 \geq t_0$, dann heißt die ausgezeichnete Lösung $x(t)$ stabil. (Im Gegensatz zur gewöhnlichen Ljapunovschen Definition spielt hier der Anfangspunkt eine wesentliche Rolle.) Analog definiert Verf. asymptotische Stabilität, Stabilität für Systeme usw. § 2: Lineare DDGL mit konstanten Koeffizienten und Spannen: Bericht über Arbeiten von Wright und Bellman. § 3: Satz von Wright (1950) über „Stabilität nach der ersten Näherung“. § 4: Nullstellen der charakteristischen Gleichungen (Quasipolynome) bei linearen DDGL mit konstanten Koeffizienten und Spannen. § 5: Anwendung der „zweiten Methode von Ljapunov“. Verf. zeigt, daß sich die Hauptsätze fast wörtlich übertragen lassen. Man kann aber nicht viel damit anfangen: denn da in den Argumenten der zu bildenden Ljapunovschen Funktionen auch die Verzögerungen auftreten, läßt sich die Definitheit i. a. nicht entscheiden. § 6: Stabilität hinsichtlich gestörter Abweichungen der Argumente. Es werden dabei Lösungen zweier DDGL verglichen, die sich nur durch die Spannen $\tau(t)$ unterscheiden. — Das Literaturverzeichnis umfaßt 23 Nummern, deren Auswahl etwas willkürlich erscheint. Vgl. auch die Berichte von Bellman-Danskinn (dies. Zbl. 52, 315) und vom Ref. [J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. 57, 55–84 (1954)]. *W. Hahn.*

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Kiselev, A. A.: Über die Lösung der Gleichungen, die die Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit beschreiben. Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 4 (62), 251–254 (1954) [Russisch].

Mendes, M.: Sur une équation aux dérivées partielles du troisième ordre. Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, IV. Sér. 17, 97–137 (1954).

In der Gleichung (1)
$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} + a(x) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + d(y, z) \frac{\partial u}{\partial x} + g(x, y, z) \cdot u = 0$$
 werden d und $H = a d - g$ die Invarianten genannt, da sie gegenüber gewissen Transformationen von u sowohl als auch der unabhängigen Variablen x, y, z invariant bleiben; weiter sind alle Gleichungen mit denselben Invarianten vermöge dieser Transformationen äquivalent. Der zweite Teil ist verschiedenen Spezialfällen von (1) gewidmet, während im dritten Teil eine Reihe von Anfangswertproblemen behandelt werden. *A. Kriszten.*

Davis, Robert B.: A special case of the normal derivative problem for a third order composite partial differential equation. Proc. Amer. math. Soc. 5, 720–725 (1954).

Sei A eine Kurve in der rechten Halbebene, die die Punkte $P_1(0, y_1)$ und $P_2(0, y_2)$ verbindet und stetig gekrümmt ist, wobei in den Punkten P_1 und P_2 die Ableitungen

y' und y'' verschwinden. Weiter soll A jede Gerade $y = \text{const}$ ($y_1 \leq y \leq y_2$) genau einmal schneiden, und der von A und der Strecke $P_1 P_2$ begrenzte Bereich soll konvex sein. Dann gibt es genau eine Lösung $u(x, y)$ der Differentialgleichung $(\partial/\partial x) \Delta u = 0$, die die Bedingungen erfüllt: (1) $u \in C^3$ in R ; (2) $u \in C$ in $R + A + P_1 P_2$, $u_x \in C$ in $R + P_1 P_2$; (3) $\Delta u = 0$ in R ; (4) $u = g(x, y)$ auf $A + P_1 P_2$ und $u_x = f(y)$ auf $P_1 P_2$. Die gegebenen Funktionen $g(x, y)$ und $f(y)$ sollen im betrachteten Bereich analytisch in y sein und müssen noch weiteren speziellen Regularitätsbedingungen genügen. *A. Kriszten.*

Weinstein, Alexander: The singular solutions and the Cauchy problem for generalized Tricomi equations. Commun. pure appl. Math. **7**, 105–116 (1954).

L'équation de Tricomi $\sigma \psi_{\theta\theta} + \psi_{\sigma\sigma} = 0$ et plus généralement

$$(1) \quad \sigma^{2n+1} \sum \psi_{\theta_i \theta_i} + \psi_{\sigma\sigma} = 0$$

se ramènent aussitôt pour $\sigma > 0$ et $\sigma < 0$ aux équations

$$(2) \quad \sum u_{x_i x_i} + u_{yy} + k y^{-1} u_y = 0 \quad \text{et} \quad (3) \quad \sum u_{x_i x_i} - u_{tt} - k t^{-1} u_t = 0.$$

L'A. donne deux solutions fondamentales de (2) dans le demi-espace $y > 0$, d'où des solutions pour (1). On les prolonge pour σ quelconque en résolvant le problème de Cauchy pour (3). Certain résultats sont complètement explicites. *M. Brelot.*

Blum, E. K.: The Euler-Poisson-Darboux equation in the exceptional cases. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 511–520 (1954).

La solution $u^{(k)}(x, t)$ de l'équation $\sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} - u_{tt} - k t^{-1} u_t = 0$ qui satisfait à $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = 0$, est connue pour $k = -2r - 1$; et les cas exceptionnels ont été traités par J. B. Diaz et H. F. Weinberger (ce Zbl. **52**, 324) par prolongement analytique. L'A. détermine ici, pour les cas exceptionnels, une solution explicite (mais non unique) en se ramenant à la construction d'une solution $u^{(1)}$ possédant une singularité logarithmique pour $t = 0$. *Jacqueline Lelong.*

Hayes, Wallace D.: The vibrating string with moving ends. Acad. Roy. Belgique, Cl. Sci., Mém. Coll. **80** **28**, 42–49 (1954).

The equation of motion of a vibrating string is considered in the simplified form $u_{tt} - u_{xx} = 0$, where the velocity of wave propagation has been set equal to one. The general solution of this equation is written in a form involving intermediate functions: $u = F\{f(t-x)\} + G\{g(t-x)\}$. With new variables replacing time and distance defined by $\tau = \{f(t-x) + g(t-x)\}/2$, $\xi = \{f(t-x) - g(t-x)\}/2$ the general solution may be written in the form $u = F(\tau + \xi) + G(\tau - \xi)$ and the original equation in the form $u_{\tau\tau} - u_{\xi\xi} = 0$. This general transformation to the independent variables in the wave equation is in close analogy with the conformal transformation of Laplace's equation. Its purpose is to separate mathematically the effect of the moving boundaries from the solution for the dependent variable. The transformation is chosen so that ξ assumes constant values on the two moving ends. *R. Gran Olsson.*

Durand, Émile: Recherche des solutions de l'équation des ondes planes $(1/r^2) \partial^2 \psi / \partial t^2 - \partial^2 \psi / \partial x^2 - k_0^2 \psi = f(x, r, t)$. Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, IV. Sér. **17**, 229–264 (1954).

Verf. gibt Lösungen von Randwertaufgaben gewisser Art der genannten Differentialgleichung an. Er geht dabei von der Identität

$$\left(v^{-2} D_t^2 - D_x^2 - k_0^2 \right) \left(\int_2^r \int_S \psi(\xi, r, \tau) I_0(k_0 \gamma) d\xi d\tau \right) = \chi \psi(x, r, t)$$

aus, wobei $\alpha = 1, \frac{1}{2}$ oder 0 ist, je nachdem der Schnittpunkt P zweier Charakteristiken, die hier Geraden sind, innerer, Rand- oder Außenpunkt des Gebietes S ist; $I_0(k_0 \gamma)$ ist die Besselsche Funktion nullter Ordnung vom imaginären Argument $i k_0 \gamma$. Außer dieser für das im „unteren“ Winkel der Charakteristiken liegende

Teilgebiet von S geltenden Identität werden weitere für die Fälle mitgeteilt, daß das Gebiet S im „oberen“ Winkel oder in einem der „Seitenwinkel“ der Charakteristiken liegt. Ist C derjenige Teil der Randkurve von S , der in einem der erwähnten Winkel liegt, dann kann die Lösung der Differentialgleichung angegeben werden, sobald φ und die Ableitung von φ nach der „Konormalen“ auf C gegeben ist. Verf. wendet dieses Ergebnis auf den Sonderfall an, daß C ein Streckenzug ist, dessen Strecken parallel zu den Koordinatenachsen sind. Bei der Cauchyschen Randwertaufgabe und beim Kirchhoffschen Problem ist C ein auf einer der Koordinatenachsen liegendes Geradenstück. Am Schluß werden zwei gemischte Probleme betrachtet und die Ergebnisse auf die Maxwell'schen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes angewandt.

W. Quade.

Martin, A. I.: On L^2 -solutions of the wave equation. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 5, 212—227 (1954).

Verf. beschäftigt sich im Anschluß an Untersuchungen von Titchmarsh mit der Übertragung von Sätzen der Weylschen Theorie singulärer Eigenwertprobleme bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf die partielle Differentialgleichung $(1) \nabla^2 q(x, y) + \{\lambda - q(x, y)\} q(x, y) = 0$ mit der ganzen (x, y) -Ebene als Grundgebiet, in dem q als reell und stetig vorausgesetzt wird. — Eine Lösung $\varphi = \psi(x, y)$ von (1) heißt L^2 -Lösung, wenn

$$0 < \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x, y)|^2 dx dy < \infty.$$

Nach Titchmarsh existiert stets eine Greensche Funktion $G(x, y, \xi, \eta, \lambda)$, die bezüglich (x, y) und (ξ, η) symmetrisch und bezüglich λ außerhalb der reellen Achse analytisch ist. Ist f eine L^2 -Funktion, so ist

$$\Phi(x, y, \lambda, f) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, y, \xi, \eta, \lambda) f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

L^2 -Lösung von $\nabla^2 \Phi + \{\lambda - q\} \Phi = f$. Es existiert für jedes reelle u der Grenzwert

$$H(x, y, \xi, \eta, u) = \frac{1}{\pi} \lim_{v \rightarrow 0} \int_0^u \operatorname{Im} G(x, y, \xi, \eta, u' + i v) du'$$

und ist bezüglich u in jedem beschränkten Intervall von beschränkter Variation, ferner zu $H(\dots, u) = \frac{1}{2} [H(\dots, u+0) + H(\dots, u-0)]$ normiert. Die Greensche Funktion ist eindeutig bestimmt, genau wenn (1) keine L^2 -Lösung hat. Eine reelle Zahl λ „gehört zum Spektrum“, wenn $H(\dots, u)$ nicht in einer Umgebung von λ konstant ist, speziell „zum Punktspektrum“, wenn H dort unstetig ist. — Verf. zeigt: 1. Hat (1) für ein nicht reelles λ keine L^2 -Lösung, so auch für jedes nicht reelle λ . 2. Hat (1) für nicht reelles λ keine L^2 -Lösung, so hat (1) für reelles λ genau dann eine L^2 -Lösung, wenn λ zum Punktspektrum gehört. 3. Sei in (1) λ nicht reell und keine L^2 -Lösung vorhanden; sei ferner $q_1(x, y) = q(x, y)$ stetig und beschränkt für $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$. Dann hat auch (1) mit q_1 an Stelle von q keine L^2 -Lösung. 4. Hat (1) für nicht reelles λ keine L^2 -Lösung, so gehört ein reelles λ genau dann nicht zum Spektrum, wenn $\nabla^2 \Phi + \{\lambda - q\} \Phi = f$ für jede L^2 -Funktion f eine L^2 -Lösung Φ hat (eindeutig).

F. W. Schäfke.

Levitan, B. M.: Über die Entwicklung nach Eigenfunktionen des Laplaceschen Operators. Mat. Sbornik, n. Ser. 35 (77), 267—316 (1954) [Russisch].

Proofs of results announced earlier (this Zbl. 50, 322). The author gets his results via the wave equation $i^2 u / t^2 = \Delta u = f$ and certain Tauberian theorems. Those which concern the asymptotic behaviour of the Riesz means of the spectral function have recently been considerably generalized by the reviewer [Fysiogr. Sällsk. Lund Förhdl. 24, Nr. 21 (1955)].

L. Gårding.

Ladyženskaja, O. A.: Über die Lösbarkeit der fundamentalen Randwertaufgaben für Gleichungen von parabolischem und hyperbolischem Typus. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 97, 395—398 (1954) [Russisch].

Let Ω be a domain in R^n with smooth boundary Γ and let Q be a cylinder in $R^n \times R$ with base Ω . The operator S in $L^2(Q)$ defined by $Su = \partial u / \partial t - \Delta u$ for all $u(x, t)$, such that $\partial u / \partial t, \partial u / \partial x^i, \partial^2 u / \partial x^i \partial x^k$ (defined in the weak sense) are in $L^2(Q)$ and $u(x, 0) = 0$; $u(x, t) = 0$ for $x \in \Gamma$, corresponds to a mixed boundary value problem for the equation of heat. Using the estimates of a note by the author (this Zbl. 44, 127) and a uniqueness proof for weak solutions of the mixed problem it is proved that S is closed and that S^{-1} is bounded and defined everywhere. — Let $Tu = \partial^2 u / \partial t^2 - \Delta u$ for all u with second derivatives in L^2 and $u(x, t) = 0, x \in \Gamma$; $u(x, 0) = \partial u(x, 0) / \partial t = 0$ the closure of T has bounded inverse defined everywhere in L^2 . (This result is not new.) Analogous results are stated but not proved in detail when the Laplacian is replaced by a general elliptic second order differential operator.

L. Hörmander.

Ljance, V. E.: Über eine Randwertaufgabe für parabolische Differentialgleichungssysteme mit stark elliptischer rechter Seite. Mat. Sbornik, n. Ser. 35 (77), 357—368 (1954) [Russisch].

Der Verf. integriert „stochastisch“ mit Hilfe der Theorie der Halbgruppen ein gemischtes Rand- und Anfangswertproblem für ein ziemlich allgemeines parabolisches System. Definitionen: Es sei

$$L u_i = \sum_{k_1, \dots, k_n} a_{i, k_1, \dots, k_n}(x) \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} u_j(x)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}, \quad a_{ij}^{(k_1, \dots, k_n)} \in C^m(\Omega_n),$$

Ω_n ein beschränkter Bereich des n -dimensionalen Raumes ($i, j = 1, \dots, N$). L sei stark elliptisch im Sinne von Višik, d. h.

$$(a) \quad (-1)^m \sum_{i, j=1}^N a_{ij}^{(k_1, \dots, k_n)}(x) \xi_1^{k_1} \dots \xi_n^{k_n} \bar{\rho}_i \bar{\rho}_j = 0 \quad \text{für} \quad \sum_{i=1}^n \xi_i^2 = 0, \quad \sum_{i=1}^n \rho_i^2 > 0.$$

$$(b) \quad (Cu, u) \geq \alpha [(-1)^m \Delta^m u, u], \quad \alpha > 0, \quad \Delta \text{ der Laplace-Operator};$$

$$(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n u_i(x) \overline{v_i(x)} dx;$$

$$C \text{ der symmetrische Teil von } \sum_{k_1, \dots, k_n} a_{ij}^{(k_1 + \dots + k_n)}(x) \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}.$$

L_1 sei eine abgeschlossene Fortsetzung von L , die der Randwertaufgabe (R): $\partial u / \partial \nu_i|_{\partial \Omega_N} = 0$ ($i = 1, \dots, m-1$) entspricht. Das Problem: Es wird statt der gemischten Aufgabe: (1) $\partial u / \partial t = Lu + f(t, x)$, (A): $u|_{\Gamma} = \varphi(x)$, (R), die Gleichung

$$(2) \quad u(t, -) = -L_1 \int_{t_0}^t u(\tau, -) d\tau + \varphi + \int_{t_0}^t f(\tau, -) d\tau$$

gelöst. Ihre Lösung wird die verallgemeinerte Lösung (v. L.) von (1), (A), (R). Hauptergebnis: Durch eine Anwendung der Ergebnisse der Theorie der stark elliptischen Systeme von Višik (dies. Zbl. 44, 95) auf den Satz 12.2.1 der Monographie von Hille (dies. Zbl. 33, 65) wird der folgende Satz bewiesen: Wenn $\varphi, f(t, -) \in L^{2,N}(\Omega_n)$, $f(t, -)$ stark stetig ist, dann existiert eine einzige v. L. von (1) (A), (R):

$$u(t, -) = T(t - t_0) \varphi + \int_{t_0}^t T(t - \tau) f(\tau, -) d\tau \quad \text{wobei} \quad T(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{k}{t} \left(T + T_1 \right)^{-1} \right\}^k,$$

$t > 0$, eine Halbgruppe von beschränkten Operatoren mit der infinitesimalen Erzeugenden $-L_1$ ist. $T(t) \varphi = \varphi$. Wenn außerdem $\varphi, f(t, -) \in D(L_1)$, dann ge-

nügt die v. L. der Gleichung $du/dt = -L_1 u + f(t, -)$ (d/dt bedeutet die starke Ableitung; die Integrale bedeuten starke Integrale). — [Anmerkung des Ref.: Diese Behandlung des Problems wurde zuerst im speziellen Falle der Fokker-Planckschen Gleichung von Yosida angewandt (dies. Zbl. 45, 80). Etwas schärfere Aussagen in bezug auf die Differenzierbarkeit der Lösung — jedoch nur für formal-selbstadjungiertes System ($L = L^+$), $f = 0$ — bei Browder (dies. Zbl. 55, 343). In der Abhandlung wurde die Bedingung (b) vermißt, jedoch ist sie für hinreichend kleines Ω_n erfüllt.]

K. Maurin.

Gårding, Lars: Eigenfunction expansions connected with elliptic differential operators. 12. Skand. Mat.-Kongr., Lund 1953, 44—55 (1954).

Durch die meisterhafte Handhabung sowohl der Methoden der Spektraltheorie der selbstadjungierten Operatoren im Hilbertschen Raume, als auch der modernen Maßtheorie gelang es dem Verf., das Problem der Entwicklung nach Eigenfunktionen zu einem gewissen Abschluß zu bringen und die Lösung in eine vollkommene Form zu gießen. Diese wichtige Arbeit bildet eine weitgehende Verallgemeinerung der klassischen Ergebnisse von H. Weyl (für $m = 2$, $n = 1$) und Carleman, und — in letzter Zeit — von Povsner (für die Schrödingergleichung) (vgl. dies. Zbl. 50, 322), Kodaira (für $n = 1$, m -beliebig) (dies. Zbl. 41, 423) und Mautner. Der Verf. erzielt die gleichzeitig (auf anderem Wege) von Browder erreichte Allgemeinheit (vgl. jedoch die Bemerkung des Ref.). § 1. Definitionen: Es sei S ein offener Bereich des n -dimensionalen Raumes E^n , $L = \sum_{p \leq m} l_p(x) D^p$, wobei $p = (p_1 \dots p_n)$ der

Differentiationsindex ist, $|p| = p_1 + \dots + p_n$, $D^p = D_x^p = \partial^{|p|} / \partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}$, $l_p(x)$ komplexwertig, hinreichend regulär in S . L ist elliptisch in S , d. h.: $\sum_{|p|=m} l_p(x) \xi^p \neq 0$, für $x \in S$;

$\xi^p = (\xi_1^{p_1} \dots \xi_n^{p_n})$; $\xi \neq 0$. $\bar{L} = \sum_{|p| \leq m} \overline{l_p(x)} D^p$. $C_0^m(S)$ seien die Funktionen aus $C^m(S)$ mit kompakten Trägern in S ; B_0 sei die Klasse der Borel-meßbaren auf E^1 beschränkten Funktionen mit kompakten Trägern; L_0 sei die Einschränkung von L auf C_0^m . $L_1 = L_1^*$. L_0 eine beliebige selbstadjungierte Fortsetzung von L_0 (von L wird vorausgesetzt, daß eine solche immer existiert).

Weiter sei $\Theta(f, g, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\lambda) d(E(\lambda) f, g)$, $f, g \in H = L^2(S)$, $\chi \in B_0$, und $E(\lambda)$ sei die von L_1

induzierte Zerlegung der Einheit $\left(L_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE(\lambda) \right)$. Im § 2. werden folgende Eigenschaften

der Spektralfunktion Θ bewiesen: für $f, g \in C_0^m(S)$, $\alpha \in B_0$ gilt

$$\Theta(f, g, \alpha) = \int_{S \times S} \Theta(x, x', \alpha) f(x) g(x') dx dx',$$

wobei der Kern $\Theta(-, -, \alpha) \in C^m(S \times S)$ in bezug auf λ linear ist und $\bar{L}_x \Theta(x, x', \alpha) = L_{x'} \Theta(x, x', \alpha) = \Theta(x, x', \lambda \alpha)$. (Im Beweise spielt die Grundlösung von L eine fundamentale Rolle.) Im § 3 wird die Differenzierbarkeit des Spektralmaßes bewiesen. Auf Grund des Radon-Nikodym-Satzes, durch eine Vervollkommnung der Povsnerschen Beweisidee, wird der folgende Satz bewiesen: Es existiert auf E^1 ein nichtnegatives Maß $d\tau(\lambda)$ derart, daß $\Theta(x, y, \alpha) = \int_{E^1} \theta(x, y, \lambda) \chi(\lambda) d\tau(\lambda)$; $\alpha \in B_0$. Der Kern $\theta(x, y, \lambda)$ ist integrierbar auf kompakten Unter-

mengen von $S \times S \times E^1$ in bezug auf $dx dy d\tau(\lambda)$; für f. a. λ ist $\theta(x, y, \lambda) \neq 0$, $\theta(-, -, \lambda) \in C^m(S \times S)$ und $\bar{L}_x \theta(x, y, \lambda) = L_y \theta(x, y, \lambda) = \lambda \theta(x, y, \lambda)$, wobei

$$\theta(f, f, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{S \times S} \theta(x, y, \lambda) f(x) \overline{f(y)} dx dy \geq 0, \quad f \in C_0^m(S).$$

§ 4. Für f. a. λ existieren N_λ (darf auch unendlich sein) unabhängige Eigenfunktionen $\theta_1(x, \lambda), \theta_2(x, \lambda), \dots$ des Operators L , die meßbar in bezug auf $dx d\tau(\lambda)$ sind und für die gilt:

$(L - \lambda) \theta_j(x, \lambda) = 0$, $\theta(x, y, \lambda) = \sum_{j=1}^{N_\lambda} \overline{\theta_j(x, \lambda)} \theta_j(y, \lambda)$. Es sei H^* der Hilbertsche Raum der Äquivalenzklassen der Vektorfunktionen $F(\lambda) = (F_1(\lambda), \dots)$, wobei die $F_j(\lambda)$ meßbar in bezug

auf $d\tau(\lambda)$ sind. $(F, G)_{H^*} \stackrel{\text{def}}{=} \int \sum_{j=1}^{N_\lambda} \overline{F_j(\lambda)} G_j(\lambda) d\tau(\lambda)$, dann ist die Transformation $f \mapsto Z f \in H^*$,

wo für $f \in C_0^m(S)$ $(Z f)_j(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \int_S \theta_j(x, \lambda) f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \theta(f, \lambda)$ eine unitäre Abbildung von H auf H^* sei; Z^{-1} ist gegeben durch $Z^{-1} F(x) = \int \sum_{j=1}^{N_\lambda} F_j(\lambda) \theta_j(x, \lambda) d\tau(\lambda)$, wenn F einen kom-

pakten Träger besitzt. Der Operator Z diagonalisiert L_1 im folgenden Sinn: ZL_1Z^{-1} ist die Multiplikation mit λ . (Die hier entwickelte Theorie ist eine Realisation in concreto der v. Neumannschen verallgemeinerten Summen: dies. Zbl. 34, 61–62.) § 5. Im § 4 waren die Eigenfunktionen (zu einem λ) orthonormal in bezug auf $\theta(f, \lambda)$ gewählt; für andere in bezug auf $d\alpha d\tau(\lambda)$ meßbare Eigenfunktionen von L , $L\theta_j = \lambda\theta_j$, hat man: $\Theta(x, y, \lambda) = \sum a_{jk}(\lambda)\theta_j(x, \lambda)\theta_k(y, \lambda)$. Im Falle $n=1$ (gewöhnliche Differentialgleichungen), gibt es m linear unabhängige Lösungen von $(L-\lambda)\theta=0$, $\theta'_1, \dots, \theta'_m$, und die Parsevalgleichung hat die Form:

$$(f, f) = \int_{E^1} \sum_{j,k=1}^m \theta'_j(f, \lambda) \bar{\theta}'_k(f, \lambda) d\alpha_{jk}(\lambda), \text{ mit } d\alpha_{jk}(\lambda) = a_{jk}(\lambda) d\tau(\lambda).$$

In diesem Falle ist die Vielfachheit $N_\lambda = \text{Rang von } (a_{jk}(\lambda))$ (vgl. Kodaira, loc. cit.). [Bemerkung des Ref.: Die von L. Garding erzielten Ergebnisse lassen sich ohne Mühe auf formal-selbstadjungierte elliptische Systeme übertragen, und dann decken sie sich im wesentlichen mit denjenigen gleichzeitig auf anderem Wege erhaltenen) von F. E. Browder (dies. Zbl. 55, 343). Wie dem Ref. scheint, war der Weg, der in der wichtigen Note von Mautner (dies. Zbl. 50, 119) gewiesen wurde und den Browder gegangen ist, dem Verf. bekannt (wie seine Bemerkung auf S. 52 zeigt), jedoch ging er den eigenen, nach der Meinung des Ref. zu einfacheren und natürlicheren Formulierung der Eigenfunktionenentwicklung führenden Weg (es wird ein einziges Maß $d\tau(\lambda)$ eingeführt und nicht eine unendliche, zufällig gewählte Folge von $q^k(\lambda)$, wie bei K. Maurin).

Pleijel, Åke: On Green's functions and the eigenvalue-distribution of the three-dimensional membrane equation. 12. Skand. Math.-Kongr., Lund 1953, 222–240 (1954).

Let V be a simply connected bounded domain in the $x^1 x^2 x^3$ -space and let $G(x_1, x_2, -k^2) = \exp(-k r) / 4\pi r = \gamma(x_1, x_2, k)$ be a Green's function of the equation $\Delta u - k^2 u = 0$ in V . In this equation $1 = \sum_{i=1}^3 (x_i - x^i)^2$, k is a positive constant. The quantity r is the distance between

the points $x_1 = (x_1^1, x_1^2, x_1^3)$ and $x_2 = (x_2^1, x_2^2, x_2^3)$ so that $r = r_{x_1, x_2} = \sum_{i=1}^3 \{(x_2^i - x_1^i)^2\}^{1/2}$.

The boundary conditions which are considered are either Dirichlet's condition, $u = 0$ on the boundary S of V , or Neuman's condition $u_n = 0$ on S , $u_n = \partial u / \partial n$ is the normal derivative of u . Thus two different functions $G(x_1, x_2, -k^2)$ that is, two different functions $\gamma(x_1, x_2, k)$ are being considered. T. Carleman has shown (this Zbl. 12, 70) that from the asymptotic behaviour of $\gamma(x_1, x_2, k)$ when k tends to infinity, it is possible to deduce theorems on the asymptotic distribution of eigenvalues and eigenfunctions of the equation $\Delta u - \lambda u = 0$. If S is sufficiently regular the best informations about the functions are constructed by the use of Fredholm's integral equation. In this way the author has studied the two-dimensional membrane equation (this Zbl. 55, 88), whereas the present paper deals with the three-dimensional case. Under the assumption that S be infinitely differentiable it is possible to approximate $\gamma(x, x, k)$ for $k \rightarrow \infty$ by certain expressions so as to obtain an error of order $O(k^{-N} \exp(-2Ak\eta))$, where η is the distance from x to S , N is an arbitrarily large number and $A \rightarrow 1$ is a constant which can be taken arbitrarily close to 1. From these approximations it follows that

$$\int_V \{\gamma(x, x, k) - \gamma(x, x, k_0)\} dx^1 dx^2 dx^3 = C \log k + \sum_{v=0}^{m-1} a_v k^{-v} + O(k^{-m}), \quad k \rightarrow +\infty,$$

where C, a_0, a_1, \dots are constants. Certain consequences for the eigenvalues and eigenfunctions of the equations are discussed at the end of the paper. R. Gran Olsson.

Levitán, B. M.: Über die Entwicklung nach Eigenfunktionen der Gleichung $\Delta u + \{\lambda - q(x_1, x_2, \dots, x_n)\} u = 0$. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 97, 961–964 (1954) [Russisch].

Die Note bildet die Weiterführung der Untersuchungen des Verf. über asymptotische Abschätzungen für die Spektralfunktion der Eigenwertaufgabe:

(A): $\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \{\lambda - q(x)\} u = 0$, (B): $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, wo Ω_n ein beschränkter einfach zusammenhängender Bereich des n -dimensionalen Raumes E_n sein soll ($n > 3$; $q \in C^{n-3}(E_n)$). Außer den Sätzen, die schon früher von dem Verf. formuliert wurden (dies. Zbl. 55, 87) gelten die folgenden zwei Sätze: 1. Es seien $(\Omega_n^{(N)})$ eine unbeschränkt wachsende Folge von n -dimensionalen Bereichen und $(\lambda_n^{(N)})$ die Eigenwerte, $(\omega_p^{(N)}(x))$ die entsprechenden orthonormierten Eigenfunktionen des Problems (A), (B) für $\Omega_n^{(N)}$ ($N = 1, 2, \dots$). $\theta(x, y; \lambda)$ sei eine der Grenzfunktionen (nach

Helly) der Folge $(\theta^{(N)}(x, y; \lambda))$, wobei $\theta^{(N)}(x, y; \lambda) = \sum_{\lambda_p^{(N)} < \lambda} \omega_p(x) \omega_p(y)$. Dann

gilt für beliebiges $t > 0$: $\int_{-\infty}^0 e^{\sqrt{\lambda}|t|} |d_n \theta(x, y; \lambda)| < \infty$. — 2. Für jeden beschränkten Bereich $F \subset E_n$ gibt es eine solche Konstante $C = C(F) > 0$, daß für $(x, y) \in F$, $\lambda \rightarrow \infty$:

$$|\theta(x, y; \lambda) - (\sqrt{\lambda}/2\pi r)^{n/2} J_{n/2}(\sqrt{\lambda} r)| < C \lambda^{(n-1)/2} \quad (J_{n/2} \text{ Besselfunktion}).$$

Es gelten analoge Sätze für allgemeine formal-selbstadjungierte Gleichungen vom elliptischen Typus:

$$\sum_{i,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + \{\lambda - q(x)\} u = 0, \quad a_{ik} = a_{ki} \in C^{n-1}.$$

K. Maurin.

Weinstock, Robert: Inequalities for a classical eigenvalue problem. J. rat. Mech. Analysis 3, 745—753 (1954).

Es sei D in der (x, y) -Ebene ein einfach zusammenhängender, von einer analytischen Kurve C berandeter Bereich und h_r mit $0 = h_0 < h_1 \leq h_2 \leq \dots$ seien die Eigenwerte von $\Delta \Phi = 0$ in D , $\partial \Phi / \partial n = h \Phi$ auf C . Mit Benutzung der klassischen Minimumeigenschaften der Eigenwerte und der konformen Abbildung von D auf dem Einheitskreis wird gezeigt: $h_1 \leq 2\pi L \leq \frac{1}{2} \pi A$, und mit Hilfe von $LA \leq \pi J$ auch $h_1 \leq 2A/J$. Dabei bedeuten L den Umfang, A die Fläche von D und J das polare Flächenträgheitsmoment bezüglich des Schwerpunktes der Kurve C . Bei allen diesen Ungleichungen steht das Gleichheitszeichen genau dann, wenn C ein Kreis ist. Bei gegebenem L fällt also h_1 für den Kreis am größten aus. Die Voraussetzung, daß C analytisch ist, kann etwas gemildert werden (stückweise analytisch, dafür aber Zusatzvoraussetzungen); für $h_1 \leq 2A/J$ genügt es, daß C stückweise glatt ist. Bei der allgemeinen Randbedingung $\partial \Phi / \partial n = j p(s) \Phi$ auf C (gegebene positive stetige Funktion p der Bogenlänge s auf C) gilt für den entsprechenden Eigenwert \hat{h}_1 jetzt $\hat{h}_1 \leq 2\pi \sqrt{\int_C p(s) ds}$.

L. Collatz.

Netanyahu, E.: On the singularities of solutions of differential equations of the elliptic type. J. rat. Mech. Analysis 3, 755—761 (1954).

Es werden partielle Differentialgleichungen vom elliptischen Typus $Au + A_x u_x + B u_y + C u = 0$ betrachtet. Die reellen Veränderlichen x und y werden zu komplexen Werten fortgesetzt, A , B und C seien nach der Fortsetzung ganze Funktionen (von zwei komplexen Veränderlichen). Es wird gezeigt, daß Teilfolgen $\{D_{m,n}\}$, n fest, $m = 0, 1, 2, \dots$, der Potenzreihenentwicklung einer reellen Lösung $U(z, z^*) = \sum_{m,n=0}^{\infty} D_{mn} z^m \bar{z}^n$, ($z = x + i y$, $\bar{z}^* = x - i y$, $D_{mn} = D_{nm}$) Lage und Charakter der Singularitäten von $U(z, z^*)$ bis auf höchstens endlich viele bestimmen. Es werden ferner Entwicklungen um verschiedene Punkte betrachtet. Die Resultate sind unabhängig von den Koeffizienten A , B , und C . Der Beweis benutzt Methoden von S. Bergman, insbesondere den Bergmanschen Integraloperator, der jeder Lösung eine holomorphe Funktion von einer komplexen Veränderlichen und jeder holomorphen Funktion eine Lösung der partiellen Differentialgleichung zuordnet.

H. J. Bremermann.

Henrici, Peter: Über die Funktionen von Gegenbauer. Arch. der Math. 5, 92—98 (1954).

Im Anschluß an die in dies. Zbl. 52, 330 besprochene Arbeit wird noch das System von Bipolarkoordinaten betrachtet, für welches bei $k = 0$ eine Lösung der Differentialgleichung durch Separation der Variablen gewonnen werden kann. Hier lassen sich die Normallösungen durch Gegenbauersche Funktionen ausdrücken und daraus für diese einige Funktionalrelationen gewinnen.

H. Hornich.

Ertel, Hans: Ein Theorem über die Feldstärke in Potentialfeldern. S.-Ber. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin, math.-naturw. Kl. 1954, Nr. 2, 11 S.

Sei $\Delta \Phi = -2\omega^2$ oder 0, ω konstant, Δ der Laplace-Operator,

$$F = |\text{grad } \Phi| = \sqrt{(\partial \Phi / \partial x_1)^2 + (\partial \Phi / \partial x_2)^2 + (\partial \Phi / \partial x_3)^2}.$$

In einem Punkte $P = (x_1, x_2, x_3)$ seien R_1 und R_2 die Krümmungsradien der „Hauptnormalschnitte“ der Äquipotentialfläche durch P und R_3 der Krümmungsradius der Kraftlinie durch P . Es wird bewiesen, daß $\Delta F F = R_1^{-2} + R_2^{-2} + R_3^{-2}$.

A. van Heemert.

Boggio, Tommaso: Sulla funzione potenziale di un doppio strato in un campo sferico o circolare. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 9, 229—235 (1954).

Cocchi, Giovanni: Campi potenziali attorno a schiere di cerchi. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 16, 42—47 (1954).

Auf der imaginären Achse einer komplexen z -Ebene sei in äquidistanten Schritten von der Größe 2π eine unendlich große Anzahl von Quellen der gleichen Ergiebigkeit m aufgereiht. Der Ursprung des Koordinatensystems befinde sich in einer derselben. Das komplexe Potential dieser Anordnung ist dann gegeben durch $j(z) = \frac{m}{2} \log \frac{1}{2} (1 - \text{Co}j z)$. Daraus wird das komplexe Potential im Außenraum einer in äquidistanten Schritten von der Größe 2π aufgereihten unendlichen Anzahl von näherungsweise kreisförmigen Figuren vom mittleren Radius r gewonnen, die sich auf konstantem Potential befinden; es ist gegeben durch

$$j(z) = \frac{m}{2} \log \frac{1}{2} (\text{Co}j a - \text{Co}j z), \text{ wobei } a \text{ durch } \text{Co}j a = \frac{1}{2} (\text{Co}j r + \cos r)$$

bestimmt ist.

Th. Seel.

Demidovič, B. P.: Ein einfacher Beweis des Mittelwertsatzes für harmonische Funktionen. Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 3, 213—214 (1954) [Russisch].

Let $u(x, y, z)$ be harmonic (i. e., a solution of $\Delta u = 0$) in a neighborhood R of the point (x_0, y_0, z_0) , and let S_ϱ denote the surface of a sphere of radius ϱ and center (x_0, y_0, z_0) lying inside R . The author proves the well-known mean value theorem $u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi\varrho^2} \iint_{S_\varrho} u(x, y, z) dS_\varrho$ by showing that the right side, considered as a function $J(\varrho)$ of ϱ , has derivative zero, so that $J(\varrho)$ must be a constant. By allowing $\varrho \rightarrow 0$, the value of the constant is found to be $u(x_0, y_0, z_0)$.

A. J. Lohwater.

Jenkins, James and Marston Morse: Curve families F^* locally the level curves of a pseudoharmonic function. Acta math. 91, 1—42 (1954).

Etude des familles de courbes indiquées dans le titre du Mémoire, pour le cas particulier où la surface de Riemann portant la famille F^* est la sphère deux fois pointée Σ^* , cas désigné par les AA. comme „typical case“ pour les surfaces non simplement connexes. — Afin d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une fonction pseudo-harmonique, uniforme ou multiforme, correspondant à une F^* donnée sur Σ^* , il est fait, ici, un examen approfondi de la structure de F^* et particulièrement de la manière dont F^* décompose Σ^* en régions canoniques de types divers: régions „primitives“, „anneaux“, régions „polaires“ et autres.

S. Stoilow.

Shapiro, Victor L.: Subharmonic functions of order r . Proc. Amer. math. Soc. 5, 539—546 (1954).

Verf. nennt eine Funktion $u(x, y)$ subharmonisch zur r -ten Ordnung, falls (a) u samt Ableitungen bis und mit der Ordnung $2(r-1)$ stetig und (b) $\Delta^{r-1} u$ subharmonisch ist. Es werden zwei verallgemeinerte iterierte Laplaceoperatoren definiert und zur Aufstellung hinreichender Bedingungen für diese Eigenschaft benützt. Die Arbeit schließt mit Anwendungen auf doppelte trigonometrische Reihen.

A. Huber.

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

Achiezer, N. I.: Über gewisse Paare von Integralgleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 98, 333—336 (1954) [Russisch].

Für das Gleichungssystem

$$\int_k^\infty S(\lambda) J_0(\lambda x) \lambda d\lambda = f(x) \quad (0 < x < 1),$$

$$\int_0^\infty S(\lambda) J_0(\lambda x) (\lambda^2 - k^2)^p \lambda d\lambda = 0 \quad (x > 1),$$

$k \geq 0$, $-1 < p < +1$, $p \neq 0$, wobei $S(\lambda)$ unbekannt ist, wird die Lösung $S(\lambda) = \int_0^1 h(t) (\sqrt{\lambda^2 - k^2})^{-p} J_{-p}(t \sqrt{\lambda^2 - k^2}) dt$ gegeben, wobei $h(t) = t^p \frac{d}{dt} \int_0^t f(x) \times \left(\sqrt{t^2 - x^2} \right)^{-p} J_{-p}(ik \sqrt{t^2 - x^2}) dx$ für $p > 0$ und ein etwas anderes $h(t)$ für $p < 0$ zu nehmen ist [J_{-p} Besselfunktion]. Analog wird auch das System $\int_k^\infty C(\lambda) J_\nu(\lambda x) d\lambda = f(x)$, $(0 < x < 1)$, $\int_0^\infty C(\lambda) J_\nu(\lambda x) d\lambda = 0$ ($x > 1$), mit unbekanntem $C(\lambda)$ behandelt.

K. Prachar.

Geronimus, Ja. L.: Über gewisse Integralgleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 98, 5—7 (1954) [Russisch].

a) Soient: (1) $\frac{1}{2\pi} \int_C p(s) \lg \frac{1}{r} ds = q(\sigma)$, l'équation intégrale d'inconnue $p(s)$

(densité du potential logarithmique, répandue le long de la courbe plane C de longueur l ; $q(\sigma)$ la valeur du potentiel sur C ; s, σ les coordonnées curvilignes des points $z, \zeta \in C$ et $r = |z - \zeta|$; D_α la classe des fonctions $f(s)$, continues sur C , et telles que pour $\omega(\delta; f) = \sup |f(s) - f(\sigma)|$, $s - \sigma \leq \delta$ l'on ait (condition de Dini-Lipschitz) $\omega(\delta; f) \leq A [\lg(a\delta)]^\alpha$, $\alpha > 0$, $a > 0$. Si $\theta(s) \in D_\alpha$, $\beta > 1$ [$\theta(s)$ = angle de la tangente à la courbe C au point s avec l'axe réel], alors la condition $p(s) \in D_\alpha$, $\alpha > 1$ est nécessaire et suffisante pour que, quel que soit $\sigma \in]0, l[$, l'on ait le droit de dériver (1) sous le signe somme par rapport à σ . Dans ces conditions l'A. montre que: a) si E est un ensemble de l'axe réel, alors l'équation intégrale

$$(2) \frac{1}{2\pi} \int_E p(x) \lg \frac{1}{|y-x|} dx = q(y), \quad y \in E, \quad (\text{où } q'(y) \text{ existe pour } y \in E \text{ et } q'(y) \in D_\alpha, \alpha > 2)$$

admet une solution $p(x) \in D_{\alpha-1}$ que l'on peut déterminer à l'aide de l'équation intégrale singulière $\frac{1}{2\pi} \int_E \frac{p(x) dx}{x-y} = q'(y)$, $y \in E$. — b) Pour $\varphi \in E_1 \subset$

$[0, 2\pi]$ et $e^{i\varphi} \in E$ (E contenu dans le cercle unité) l'équation intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_{E_1} p(\varphi) \lg \frac{1}{2|\sin \frac{1}{2}(\varphi - \theta)|} d\varphi = q(\theta), \quad \theta \in E_1$$

(si $q'(\theta)$ existe pour $\theta \in E_1$ et $q'(\theta) \in D_\alpha$, $\alpha > 2$) admet une solution $p(\varphi) \in D_{\alpha-1}$ que l'on peut déterminer à l'aide de l'équation intégrale singulière

$$\frac{1}{2\pi} \int_{E_1} p(\varphi) \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \theta}{2} d\varphi = q'(\theta), \quad \theta \in E_1.$$

4. L'A. résout ensuite le même problème dans l'hypothèse unique où $q(\sigma)$ est continue sur E .

S. Vasilache.

Lonseth, A. T.: Approximate solutions of Fredholm-type integral equations. Bull. Amer. math. Soc. 60, 415—430 (1954).

Übersichtliche Besprechung der wichtigsten bekannten Fehlerabschätzungen für die Gleichung $(I - K)x = y$ mit $\|K\| < 1$. (1) K durch K_1 ersetzt, z. B. An-

näherung des Kernes einer Integralgleichung durch „zerfallenden“. (2) y angenähert bekannt, wie z. B. bei Momentenmethode (Galerkin) oder bester Quadratmittelnäherung. (3) Fehlerabschätzung für die Neumannsche Iteration oder ähnliche hier vorgeschlagene schneller konvergierende Iterationsverfahren. — Der Gebrauch verschiedener Normen wird erläutert. Numerisches Beispiel: Die Integralgleichung für $x'' - x = 2$, $x(0) = x(1) = 0$.
D. Morgenstern.

Schmeidler, Werner und Dietrich Morgenstern: Zur Übertragung des Alternativsatzes der Fredholmschen Theorie auf algebraische Integralgleichungen. Arch. der Math. 5, 452—457 (1954).

Die Gleichung (*) $z^n(s) - \mathfrak{K}_n(y, y) - \sum_{\beta=0}^{n-1} \mathfrak{K}_\beta(y, y) = 0$ mit

$$\mathfrak{K}_\beta(z, y) = \sum_{\alpha + \alpha_1 + \dots + \alpha_p = \beta} z^\alpha(s) \int_0^1 \dots \int_0^1 K_{\alpha\alpha_1\dots\alpha_p}(s, t_1, \dots, t_p) y^{\alpha_1}(t_1) \dots y^{\alpha_p}(t_p) dt_1 \dots dt_p$$

($\beta = 0, \dots, n$; $0 \leq \alpha \leq \beta$ ganz; $K_{\alpha\alpha_1\dots\alpha_p}(s, t_1, \dots, t_p)$ reell und stetig; $K_{n0\dots0} = 0$) wird als algebraische Integralgleichung bezeichnet. Für diejenigen algebraischen Integralgleichungen, deren Kernfunktionen $K_{\alpha\alpha_1\dots\alpha_p}$ noch einer „Diskriminanten“ und einer „Realitätsbedingung“ genügen, vermutet der erstgen. Verf. in Erweiterung des bekannten Resultats für $n = 1$ (Fredholmscher Alternativsatz für lineare Integralgleichungen zweiter Art) den Satz: Es gelten die beiden, sich gegenseitig i. a. ausschließenden Möglichkeiten: I. Gleichung (*) hat eine (nicht notwendig reelle) stetige Lösung $y(s)$. II. Die homogene Gleichung $y^n(s) - \mathfrak{K}_n(y, y) = 0$ hat eine von Null verschiedene stetige Lösung. — Wie einfache Beispiele zeigen, braucht im Gegensatz zu $n = 1$ die Lösung von (*) im Falle I. für $n > 1$ weder reell noch eindeutig zu sein, überdies können auch noch unstetige Lösungen auftreten. Der Beweis des vermuteten Satzes gelang den Verff. einstweilen nur unter der Zusatzvoraussetzung, daß (im Falle I.) $\mu^n y^n(s) = \mathfrak{K}_n(\mu y, y) = 0$ für reelles μ eine Lösung $y(s) \equiv 0$ höchstens für $|\mu| < 1$ haben kann. Ebenfalls konnte noch nicht entschieden werden, ob für $n \neq 1$ die Fälle I. und II. sich wie für $n = 1$ gegenseitig ausschließen, oder nicht.
K. Nickel.

Schaefer, Helmut: Zur Theorie nichtlinearer Integralgleichungen. Math. Nachr. 11, 193—211 (1954).

Betrachtet werden Integralgleichungssysteme der Form

$$(1) \quad x_i(s) = \int K_i(s, t) f_i(t, x_1(t), \dots, x_r(t)) dt \quad (i = 1, \dots, r)$$

mit $r \geq 1$; die Integrationen werden über einen in sich kompakten, integrablen Bereich erstreckt, über die $K_i(s, t)$ werden die üblichen Voraussetzungen gemacht. Weiter werden folgende auch bei Niemytzki (dies. Zbl. 11, 26) eingeführte Voraussetzungen gemacht: H_1 : Für geeignetes $K > 0$ und $\int |x_i|^2 dt \leq K$ sei $\int |f_i(t, x_1, \dots, x_r)|^2 dt \leq K \alpha^2$ mit $\alpha^2 \geq \alpha_i^2 = \int \int K_i(s, t)^2 ds dt$; H_2 : Ist auch $\int y_i^2 dt \leq K$, so sei $\int |f_i(t, x_1, \dots, x_r) - f_i(t, y_1, \dots, y_r)|^2 dt \leq L^2 \max_i \int x_i - y_i^2 dt$; H_3 : Es sei $L \cdot \alpha < 1$. — Dann besitzt (1) ein eindeutig bestimmtes

Lösungssystem von r stetigen, mit einer Norm $\leq \sqrt{K}$ versehenen Funktionen, die durch sukzessive Approximation bestimmt werden können. — Für reelle Kerne einerlei Vorzeichens werden etwas gelockerte Voraussetzungen angegeben. Als Beispiel hierzu wird zunächst die Integralgleichung

$$x(s) = \int_{-\pi}^{\pi} K(s-t) f(t, x(t)) dt$$

gebracht mit in s und t mod 2π periodischem Kern $K(s-t) = K(t-s) \geq 0$; dann allgemeiner der Kern $K(s, t) \geq 0$. — Allgemeiner Fall: Benötigt wird nur die Voraussetzung H_2 . Jedes System von r stetigen, mit Normen $\leq \sqrt{K}$ versehenen Lösungen $x_i(s)$ von (1) läßt sich auffinden durch Bestimmung der (eindeutigen) Lösung eines auch den Voraussetzungen H_1 und H_3 genügenden Systems der gleichen Gestalt und Auflösung endlich vieler transzendenter Gleichungen. Dazu werden die Kerne durch sog. Polynomkerne hinreichend genau approximiert. Umgekehrt kann man auf diese Weise Lösungen von (1) erhalten. — Am Schluß analytischen f_i läßt sich die Methode unbestimmter Koeffizienten verwenden. — Am Schluß werden die Ergebnisse von Hamel [Math. Ann. 86, 1—13 (1922)] bez. des Duffingschen Problems in einheitlicher Weise hergeleitet.
R. Iglisch.

Kac, M.: Toeplitz matrices, translation kernels and a related problem in probability theory. Duke math. J. **21**, 501—509 (1954).

Recently G. Szegő proved an interesting identity concerning the Fourier series of a positive function (this Zbl. **48**, 42). This identity is reproved in somewhat generalized form and an analogue for integral equations with non-negative kernel established: Let $\varrho(x) \geq 0$ be even, $\int_{-\infty}^{\infty} \varrho(x) dx = 1$, $\int_{-\infty}^{\infty} x \varrho(x) dx < \infty$, and

let $F(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta x} \varrho(x) dx$ be absolutely integrable in $(-\infty, \infty)$. If $D_a(\lambda)$ is the

Fredholm determinant of the integral equation $\int_{-a}^a \varrho(x-y) q(y) dy = \lambda q(x)$, then, for small real λ ,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} D_a(\lambda) \left| \exp \left\{ \frac{a}{\pi} \int_0^{\infty} \log(1 - \lambda F(\eta)) d\eta \right\} \right| = \exp \left\{ \int_0^{\infty} x \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \log(1 - \lambda F(\eta)) e^{i\eta x} d\eta \right|^2 dx \right\}.$$

The main interest of the paper lies, however, in the elementary combinatorial way in which all this is proved. The crux is the following identity: Let a_1, a_2, \dots, a_n be real numbers and $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix}$ be any permutation. If $N(\sigma)$ is the number of non-negative terms in $a_{\sigma_1}, a_{\sigma_1} + a_{\sigma_2}, \dots, a_{\sigma_1} + \dots + a_{\sigma_n}$, then

$$\sum_{\sigma} \text{Max}(0, a_{\sigma_1}, a_{\sigma_1} + a_{\sigma_2}, \dots, a_{\sigma_1} + \dots + a_{\sigma_n}) = \sum_{\sigma} N(\sigma) a_{\sigma_1},$$

where the sum is extended over all permutations σ . This result is applied to obtain an equally elementary identity for a random variable distribution, which, in turn, by re-interpretation leads to the analytical identities quoted. The paper is somewhat sketchy in form, and much seems to be due to the collaboration of K. L. Chung, G. A. Hunt, and F. J. Dyson, who provided the elegant proof for the crucial lemma.

W. W. Rogosinski.

Bass, Ludwig: Zur Theorie der Mahlvorgänge. Z. angew. Math. Phys. **5**, 283—292 (1954).

Die alle spezifischen Eigenschaften des gemahlten Materials und der Mahlvorrichtung charakterisierende Funktion $\varepsilon(\xi, x)$, welche die Masse der Körner im Größenintervall $(x, x + dx)$ angibt, die pro Zeiteinheit aus einer Einheitsmasse der Körner des Größenintervalls $(\xi, \xi + d\xi)$ entstehen, sei zeitunabhängig, stetig und für $\xi \leq x$ identisch gleich Null („reine Zerkleinerung“). Gesucht ist $M(x, t)$ — das Gewicht der Körner des Größenintervalls $(x, x + dx)$ zur Zeit t — bei bekannter Anfangsverteilung $M(x, 0)$. Eine Art Kontinuitätsbedingung liefert für $M(x, t)$ die partielle Integrodifferentialgleichung

$$(1) \quad \frac{\partial M(x, t)}{\partial t} + M(x, t) \int_0^x \varepsilon(x, \alpha) d\alpha = \int_0^{x_m} \varepsilon(\xi, x) M(\xi, t) d\xi$$

(x_m maximale Korngröße), die durch den Ansatz $M(x, t) = f(x, t) \exp \left[-t \int_0^x \varepsilon(x, \alpha) d\alpha \right]$

in eine Volterrasche Integralgleichung zweiter Art übergeführt und damit durch eine Neumannsche Reihe für $f(x, t)$ gelöst werden kann. Für $x \rightarrow x_m$ bzw. $x \rightarrow 0$ kann man durch Streichen des zweiten bzw. ersten Integrals in (1) direkt einfachere Näherungslösungen gewinnen, insbesondere für $x \rightarrow x_m$ die Formel $M(x, t) =$

$M(x, 0) \exp \left[-t \int_0^x \varepsilon(x, \alpha) d\alpha \right]$, deren Beziehung zu einer Formel von Rosin und Rammler [Koll. Z. **67**, 16 (1934)] diskutiert wird. In einer Zwischenbetrachtung wird ein numerisches Verfahren zur Lösung von (1) angegeben, das zur empirischen Bestimmung von $\varepsilon(\xi, x)$ benutzt werden kann.

J. Weissinger.

Stanković, Bogoljub: Sur une fonction du calcul opérationnel. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. **6**, 75—78 (1954).

L'A. s'occupe des solutions $f_\lambda(t)$ de l'équation intégrale $\int_0^\infty e^{-st} f_\lambda(t) dt = e^{-s\lambda}$ ($0 < \lambda < 1$). Il démontre que $f_\lambda(t) > 0$ pour $t > 0$ et établit certaines formules asymptotiques. (La note contient plusieurs fautes d'impression.)

J. Mikusiński.

Reid, William T.: A note on the Hamburger and Stieltjes moment problems. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 521—525 (1954).

If μ_n is a sequence of real numbers for which there exists a decreasing sequence $a_n > 0$ such that $\mu_0 \geq a_0$, $\mu_{2n} \geq a_n - (a_{n-1} - a_n)^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} \mu_{n+j}^2$, then the Hamburger moment problem (1) $\int_{-\infty}^\infty t^n d\lambda(t) = \mu_n$ has a solution $\lambda(t)$ with infinitely many points of increase. Furthermore if $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 0$, then (1) is indeterminate. —

If analogous conditions hold for μ_{2n+1} as well, then the Stieltjes moment problem has a solution with infinitely many points of increase, resp. is indeterminate. This generalizes results of Boas (see: Widder, The Laplace Transform, Princeton 1946, pp. 140—143).

J. Horváth.

Geronimus, Ya. L.: Polynomials orthogonal on a circle and their applications. Amer. math. Soc., Translat. Nr. **104**, 79 S. (1954) (= Zapiski Naučno-Issled. Inst. Mat. Mech. Char'kov. Mat. Obsč., IV. Ser. **19**, 35—120 (1948)).

A welcome translation into English now makes this important work of the distinguished Russian author widely accessible. It is a brief but comprehensive account of old and recent investigations centred around the finite (or infinite) trigonometrical moment problem $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} d\sigma(\theta)$, $0 \leq k \leq n$ (or all $k \geq 0$).

The complex numbers c_k are given and a bounded increasing $\sigma(\theta)$ is sought. In the finite case, $\sigma(\theta)$ is to have at least $n+1$ discontinuities, in the infinite case an infinity of discontinuities. The necessary and sufficient conditions are known in each case. If $c_{-k} = c_k$ and Δ_k is the determinant $|c_{i-j}|_{i,j=0}^k$, then $\Delta_k > 0$ for $0 \leq k \leq n$ (for all $k \geq 0$) is required; in the infinite case $d\sigma(\theta)$ is then uniquely determined. An equivalent condition is $a_k < 1$ for $0 \leq k \leq n-1$ (for all $k \geq 0$), where the parameters a_k are defined by $(-1)^k a_k = c_{i+j+1}^k / c_i^k \Delta_k$. In this theory the orthogonal polynomials $P_k(z) = z^k + \dots$, defined by

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_k(e^{i\theta}) \overline{P_l(e^{i\theta})} d\sigma(\theta) = 0 \quad (k \neq l), \quad = \Delta_k / \Delta_{k-1} \quad (k = l),$$

and certain polynomials associated with them, play a fundamental part. The now classical theory of this moment problem is fully developed and the more recent investigations on the distribution of the discontinuities of $\sigma(\theta)$ are covered. Of the many interesting applications we mention here the well known theory of regular functions $f(z)$ with $\Re(f(z)) > 0$ in $|z| < 1$ (Carathéodory), and with $|f(z)| < 1$ in $|z| < 1$ (I. Schur, Julia, and others). This is the first up-to-date account of this theory in the English language. An earlier book by N. Achieser and M. Krejn (On some questions of the theory of moments, Charkov 1938) is in Russian, and the monograph on orthogonal polynomials by G. Szegő (this Zbl. **23**, 215) covers the theory up to about 1939 and does not contain the important contributions of the present Russian school. The print of the translation is confusingly small (a and α are hardly distinguishable) and is somewhat marred by frequent misprints.

W. W. Rogosinski.

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Jerison, Meyer: A property of extreme points of compact convex sets. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 782—783 (1954).

Ist E ein reell linearer, lokal konvexer Hausdorff-Raum, $\{K_n\}$ eine Folge von kompakten konvexen Mengen, welche alle in einer kompakten konvexen Teilmenge von E enthalten sind, A_n die Menge der extremen Punkte von K_n , und $K = \limsup_n K_n$ und $A = \limsup_n A_n$, so ist K enthalten in der abgeschlossenen konvexen Hülle \hat{A} von A . Wenn überdies K konvex ist, so gilt $K = \hat{A}$.

G. Aumann.

Floyd, E. E. and V. L. Klee: A characterization of reflexivity by the lattice of closed subspaces. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 655—661 (1954).

Dans un espace normé E , un point p est „point de non support“ d'un ensemble convexe C dans E si $p \in C$ et si tout hyperplan d'appui fermé de C passant par p contient C . Utilisant de façon ingénieuse cette notion, les AA. généralisent d'abord un th. de Šmulian, en prouvant que si C est fermé et borné, et non faiblement compact, il y a une suite décroissante de variétés linéaires fermées de E , dont chacune rencontre E , mais dont l'intersection est vide. (Note du Réf.: la démonstration est valable pour tout espace localement convexe métrisable E . Les lignes 5—16 de la p. 657 seraient inutiles si les AA. utilisaient la théorie des filtres, et notamment le théorème des ultrafiltres.) Le résultat précédent donne aussitôt un critère de réflexivité pour les espaces normés. Utilisant ce critère, les AA. donnent un second critère de réflexivité faisant intervenir l'ensemble réticulé achevé \mathfrak{Q} des sous-espaces vectoriels fermés de E : lorsqu'on munit \mathfrak{Q} de la topologie définie par G. Birkhoff sur de tels ensembles, la condition que E est réflexif équivaut à celle que \mathfrak{Q} est un espace de Hausdorff.

J. Dieudonné.

Williamson, J. H.: On topologising the field $C(t)$. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 729—734 (1954).

Es werden die möglichen Topologien des Körpers $C(t)$ aller rationalen Funktionen in t mit Koeffizienten aus dem Körper C der komplexen Zahlen untersucht: Nämlich solche Topologien der Menge $C(t)$, hinsichtlich derer Addition, Multiplikation und Inversenbildung stetig sind und die in C als Relativraum die dort vorhandene Absolutbetrag-Topologie induzieren. Verf. konstruiert zunächst zwei Beispiele. Das erste wird durch die Konvergenz hinsichtlich des reellen Lebesgueschen Maßes gewonnen. Das zweite Beispiel liefert eine Topologie, hinsichtlich derer $C(t)$ lokal-konvex ist. Es wird mittels der Laurent-Entwicklung im Nullpunkt konstruiert. Sodann betrachtet Verf. die Topologien des linearen Raumes $C(t)$ über C und zeigt, daß eine solche Topologie in einem bestimmten Sinn weder zu fein noch zu grob sein darf, wenn die Multiplikation in $C(t)$ stetig sein soll. Insbesondere wird bewiesen, daß in der feinsten (lokal-konvexen) Topologie des linearen Raumes $C(t)$ die Multiplikation von $C(t)$ nicht mehr stetig ist.

H.-J. Kowalsky.

Evgrafov, M. A.: Eigenschaften vollständiger Systeme in Räumen analytischer Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **98**, 717—718 (1954) [Russisch].

L'espace étudié $\mathfrak{A}[\Phi, D]$ est celui des fonctions entières représentables sous la forme
$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \Phi(z^*) f(\zeta) d\zeta$$
 où Φ est une fonction entière donnée et f une fonction quelconque régulière hors de D ; la notion de convergence adoptée pour les F correspond pour les f à la convergence uniforme à l'intérieur du complémentaire de D .

G. Bourion.

Wermer, John: Algebras with two generators. Amer. J. Math. **76**, 853—859 (1954).

Recherche de conditions pour que la sous-algèbre fermée $[q, y]$ engendrée par

deux fonctions q, ψ et la constante 1 dans l'algèbre de Banach C des fonctions numériques complexes continues sur le cercle $|\lambda| = 1$ soit C elle-même. Après la détermination explicite de toutes les sous-algèbres $[\lambda^2, \psi]$ où λ^2 et ψ séparent les points de $|\lambda| = 1$, l'A. montre que la condition: „Il n'existe aucune variété analytique complexe limitée par la courbe $z_1 = q(\lambda), z_2 = \psi(\lambda), z_3 = 1$, dans R^4 “ est toujours nécessaire pour que l'on ait $[q, \psi] = C$, et est suffisante si q est univalente sur $|\lambda| = 1$. Elle est aussi suffisante pour $[\lambda^2, \psi]$ si λ^2 et ψ séparent les points de $|\lambda| = 1$. L'A. conjecture qu'elle est suffisante dans tous les cas. *A. Revuz.*

Golomb, Michael: A note on linear vector spaces of mappings with positive Jacobians. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 536—538 (1954).

Généralisant un récent résultat de McLaughlin et Titus (ce Zbl. **55**, 310), l'A. démontre le théorème suivant: soit \tilde{X} un espace vectoriel réel formé de transformations continûment différentiables $f = (u, v)$ d'un ensemble ouvert D du plan R^2 dans R^2 , tel que le jacobien de f soit $\neq 0$ dans D sauf lorsque son rang est 0, et qu'il y ait dans \tilde{X} deux transformations $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ telles que $D(v_1, v_2), D(x, y) \neq 0$ pour tout $(x, y) \in D$. Dans ces conditions, \tilde{X} est formé des solutions d'un unique système différentiel $u_x - a_{11}v_x - a_{12}v_y = 0, u_y - a_{21}v_x - a_{22}v_y = 0$ tel que $a_{12} > 0, a_{21} > 0$ et $(a_{11} + a_{22})^2 < 4 a_{12} a_{21}$ en tout point de D . *J. Dieudonné.*

Reiter, Hans: Über L^1 -Räume auf Gruppen. I. Monatsh. Math. **58**, 74—76 (1954).

G : groupe localement compact non abélien, de module $\Delta(\sigma)$, g : sous-groupe fermé de module $\delta(\sigma)$, G/g : espace homogène, dont on suppose qu'il possède une mesure invariante [donc $\Delta(\sigma) = \delta(\sigma)$ sur g], K : sous-espace fermé de $L_1(G)$ engendré par les fonctions de la forme $k(x) = \tau(x\sigma)\delta(\sigma) - f(x)$. L'A. établit que $L_1(G/g)$ est algébriquement isomorphe à $L_1(G)K$ et que cette isomorphie est une isométrie (avec choix convenable du coefficient de la mesure sur G/g). Si g est un sous-groupe invariant, l'isomorphie est valable pour $L_1(G/g)$ et $L_1(G)K$ en tant qu'algèbres de Banach. (Généralisation de résultats obtenus dans le cas abélien: H. J. Reiter, ce Zbl. **48**, 92.) *A. Revuz.*

Reiter, Hans: Über L^1 -Räume auf Gruppen. II. Monatsh. Math. **58**, 172—180 (1954).

Deuxième partie d'un article (voir rapport précédant) généralisant les résultats du travail, ce Zbl. **48**, 92. G : groupe localement compact; g : sous-groupe abélien fermé. On suppose l'existence d'une mesure invariante sur G/g . T applique $L^1(G)$ dans $L^1(G/g)$ par $f' = T f$ si $f'(x') = \int_G f(x\xi) d\xi$ ($x' \in G/g$ est la classe de $x \in G$).

$(f)_0^g$ = sous-espace vectoriel de $L^1(G)$ engendré par $\sum_{n=1}^N b_n f(x\sigma_n)$ avec N entier positif variable, b_n nombres complexes tels que $\sum_{n=1}^N b_n = 0$, et $\sigma_n \in g$. Théorème I:

dist. $\{f, (f)_0^g\} = \|f'\|_1$. $(I)^g$: sous-espace vectoriel fermé de $L^1(G)$ qui avec toute fonction $k(x)$ contient $k(x\sigma)$, $\forall \sigma \in g$. $(I)_0^g$ = réunion des $(f)_0^g$ pour $f \in (I)^g$. Théorème II: 1. $(I)_0^g$ est l'ensemble des fonctions $f \in (I)^g$ pour lesquelles $f' = 0$; 2. $(I)^g / (I)_0^g$ est algébriquement isomorphe et isométrique à $T(I)^g$. *A. Revuz.*

Hewitt, Edwin and Isidore Hirschman jr.: A maximum problem in harmonic analysis. Amer. J. Math. **76**, 839—852 (1954).

G : groupe abélien localement compact; G^* : groupe dual; (x, y) : valeur en $x \in G$ de $y \in G^*$; $f \in L^p(G)$; f^* : transformée de Fourier de f . On a $\|f^*\|_{p'} \leq \|f\|_p$ avec $1/p + 1/p' = 1$. Théorème: Pour $1 < p < 2$, la condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait l'égalité $\|f^*\|_{p'} = \|f\|_p$ est que f soit de la forme $\chi(x, y) q_A(x)$ ou une translatée d'une telle fonction (χ nombre complexe, q_A fonction caractéristique d'un sous-groupe compact et ouvert A de G). *A. Revuz.*

Ehrenpreis, Leon: Solution of some problems of division. I. Division by a polynomial of derivation. Amer. J. Math. **76**, 883—903 (1954).

Unter einem „Differentiationspolynom“ P wird ein lineares Aggregat von Potenzen des Differentialoperators (eventuell nach mehreren Variablen) mit konstanten Koeffizienten verstanden. Das Hauptziel der Arbeit besteht in dem Beweis, daß es zu jeder Distribution S von endlicher Ordnung eine Distribution T von endlicher Ordnung gibt derart, daß $P T = S$ ist, d. h. daß die Division (im Sinne der Faltungsmultiplikation) durch ein Differentiationspolynom stets möglich ist. Für $S = \delta =$ Diracsches Maß bedeutet dies, daß jede lineare partielle Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten eine „Elementarlösung“ hat. Der Beweis wird mittels Fourier-Transformation geführt: Der Raum der Fourier-Transformierten des Schwartzschen Raumes \mathcal{D} heiße \mathbf{D} . Der duale Raum zu \mathcal{D} (der Raum der Distributionen) heiße \mathcal{D}' , der duale Raum zu \mathbf{D} heiße \mathbf{D}' . Dann definiert die Fourier-Transformation in natürlicher Weise einen topologischen Isomorphismus von \mathcal{D}' auf \mathbf{D}' . Auf diese Art wird die Fourier-Transformierte jeder Distribution als ein Element von \mathbf{D}' definiert. Da die Fourier-Transformation die Multiplikation mit einem Differentiationspolynom auf die Multiplikation mit einem gewöhnlichen Polynom in der Variablen abbildet, ist das Problem auf die Division durch ein solches Polynom reduziert. — Das Resultat wird auf Systeme von partiellen Differentialgleichungen ausgedehnt.

G. Doetsch.

Schwartz, Laurent: Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions. C. r. Acad. Sci., Paris **239**, 847—848 (1954).

Das sog. „multiplikative Produkt“ der Schwartzschen Distributionen ist bekanntlich nicht assoziativ: Für drei Distributionen R, S, T können alle in $R \cdot (S \cdot T)$ und in $(R \cdot S) \cdot T$ vorkommenden Produkte existieren, ohne daß beide Ausdrücke übereinstimmen. Verf. hat in seiner „Théorie des Distributions“ I. (dies. Zbl. **37**, 73) p. 119 dafür das Beispiel v. p. $(1/x) = (\log |x|)$, x, δ gegeben. Insbesondere kann also ein das multiplikative Produkt verallgemeinerndes universelles Produkt der Distributionen oder allgemeinerer Größen, wie es für die physikalischen Anwendungen angestrebt wird, nicht assoziativ sein. In der vorliegenden Note zeigt Verf. nun, daß die Nichtassoziativität eines solchen Produktes schon aus der Produktregel der Differentiation folgt; er beweist nämlich den allgemeinen Satz: Hat man in einem reellen Vektorraum E , der den Raum F aller stetigen reellen Funktionen einer reellen Veränderlichen als Teilraum enthält, erstens eine stets ausführbare assoziative Multiplikation, die auf F mit der üblichen Multiplikation übereinstimmt und allgemein die Funktion 1 als Einselement besitzt, und zweitens eine lineare Ableitung, die für eine stetig differenzierbare Funktion mit der üblichen Ableitung übereinstimmt und allgemein der Produktregel genügt, dann kann es in E kein Element $\delta \neq 0$ mit $x \cdot \delta = 0$ geben. Zum Beweise braucht man sich, analog zum obigen Beispiel, in E nur ein Links inverses der Funktion x zu verschaffen; ein solches wird aber auf Grund der Voraussetzungen durch die zweite Ableitung der Funktion $x \log(|x| - 1)$ gegeben. — Für nicht-assoziative Multiplikationen vgl. die Arbeit des Ref., Math. Ann. **128**, 420—452 (1955).

H. König.

Deprit, André: Distributions de L. Schwartz et intégrales de Cauchy. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **40**, 910—913 (1954).

In seiner „Théorie des Distributions“ I (dies. Zbl. **37**, 73), p. 43—45 deutet L. Schwartz die klassischen Integralsätze als Ausdruck für die Abweichung, die zwischen den distributionstheoretischen und den gewöhnlichen Ableitungen hinreichend oft differenzierbarer Funktionen mit flächenhaft verteilten Unstetigkeiten besteht. Eine entsprechende Betrachtung führt Verf. im Anschluß an L. Schwartz (a. a. O. S. 48—50, vgl. die dortigen Bezeichnungen) für analytische Funktionen in der komplexen Ebene durch; dabei spielen die Cauchyschen Integralformeln eine analoge Rolle. — Es sei S ein abgeschlossener beschränkter Bereich der komplexen Ebene, begrenzt durch eine reguläre geschlossene Kurve C , und $f(z)$ eine in S stetige, im Innern von S reguläre und außerhalb von S verschwindende Funktion. Die

Distributionen $\int_C f(\zeta) \text{ v. p. } \frac{1}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$ ($n \geq 0$, ganzzahlig) werden durch

$$\left\langle \int_C f(\zeta) \text{ v. p. } \frac{1}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \varphi(z) \right\rangle = \int_C f(\zeta) \left\langle \text{v. p. } \frac{1}{(\zeta - z)^{n+1}}, \varphi(z) \right\rangle d\zeta$$

für $\varphi(z) \in D$ erklärt, und $\partial \bar{\partial} z = \frac{1}{2}(\partial \bar{\partial} x - i \partial \bar{\partial} y)$ bedeute die im distributions-theoretischen Sinne genommene Ableitung. Dann werden die Formeln

$$\frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial z^n} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

bewiesen, deren Restriktionen auf das Innere von S die üblichen Cauchyschen Integralformeln ergeben.

H. König.

Lafleur, Charles: Sur l'emploi de la fonction de Dirac et de ses dérivées et le théorème des résidues de Cauchy. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **40**, 701—704 (1954).

Durch Approximation der Dirac-Distribution δ mit den Funktionen

$$a/\pi(x^2 + a^2) = 1/2\pi i(x - ia) - 1/2\pi i(x + ia)$$

für $a \rightarrow +0$ wird plausibel gemacht, daß man die distributionstheoretischen Faltungen $\delta * F$, $\delta' * F$, ... mit einer analytischen Funktion F in gewissem Sinne als Grenzfall der Cauchyschen Integralformeln auffassen kann. H. König.

Malgrange, Bernard: Équations aux dérivées partielles à coefficients constants.

2. Équations avec second membre. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 196—198 (1954).

Bezeichnungen wie in Teil I (dies. Zbl. **52**, 342). Definitionen: U sei eine Distribution,

Lösung der Gleichung vom Faltungstypus: $T * U = \delta$. \mathcal{E} ist der Raum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen, \mathcal{E}' der duale Raum von \mathcal{E} (Distributionen mit kompaktem Träger). \mathcal{D} (resp. \mathcal{D}') ist der Raum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen (resp. s -mal stetig differenzierbaren Funktionen) mit kompaktem Träger. \mathcal{D}' der duale Raum von \mathcal{D} und \mathcal{D}'' der duale Raum von \mathcal{D}' , d. h. der Raum der Distributionen von endlicher Ordnung s . $\mathcal{D}_F = \bigcup_{s=1,2,\dots} \mathcal{D}''$.

D sei der partielle Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten. Der Verf. beweist durch sehr gewandte Handhabung der Theorie der Distributionen und der Theorie der lokal konvexen Räume die folgenden drei Sätze: 1. Die Abbildung $\varphi \rightarrow T * \varphi$ ist ein topologischer Homomorphismus von \mathcal{E} auf \mathcal{E} . 2. $T * \mathcal{D}_F' = \mathcal{D}_F'$. 3. Es sei T ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten vom elliptischen Typus im Sinne von L. Schwartz (d. h. jede Lösung von $T * U = V$ ist beliebig oft differenzierbar in jedem offenen Bereich, in welchem V beliebig oft differenzierbar ist). Dann ist $T * \mathcal{D}' = \mathcal{D}'$. T besitzt in diesem Falle eine Parametrix \tilde{w} ($T * \tilde{w} = \delta + q$, für $D \in \mathcal{E}'$). — Als Korrolare erhält man die wichtigen Sätze: ad 1.: Die Gleichung $D\Psi = \varphi$ hat für $\varphi \in C^\infty$ eine beliebig oft differenzierbare Lösung (für einen beliebigen Typus). ad 2.: Wenn W eine endliche Summe von Ableitungen stetiger Funktionen ist, dann besitzt die Gleichung $D S = W$ eine Lösung von derselben Klasse. ad 3.: Wenn D vom elliptischen Typus im Sinne von Schwartz ist und F eine Distribution, dann existiert eine solche Distribution S , daß $DS = F$.

K. Maurin.

Krasnosel'skij, M. A.: Über die Stabilität der kritischen Werte gerader Funktionale auf der Sphäre. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **97**, 957—959 (1954) [Russisch].

Es werden interessante Sätze über Existenz und Stabilität der (unendlich vielen) kritischen Werte der Funktionale auf der Einheitssphäre im Hilbertschen Raume angekündigt. Es soll hervorgehoben werden, daß es dem Verf. im Unterschied zu den klassischen Untersuchungen von Lusternik (dies. Zbl. **24**, 213) gelang, die Geradheit des Funktional teilweise fallen zu lassen. Definitionen: S sei die Einheitssphäre des Hilbertschen Raumes \mathfrak{H} , mit dem Skalarprodukt (φ, ψ) . $\|\varphi\|^2 = (\varphi, \varphi)$. $S = \{\varphi \in \mathfrak{H} : \|\varphi\| = 1\}$. S_k sei die k -dimensionale Sphäre. Der kritische Wert des Funktional F auf S heißt die Zahl $F(q)$, wobei: $(\text{grad } F(q), \varphi) = 0$ für $\varphi \in S_k$. F_0 bezeichnet im folgenden ein gerades $(F(-\varphi) = F(\varphi))$, schwachstetiges Funktional. Es sei in der Einheitskugel $T = \{\varphi : \|\varphi\| \leq 1\}$ F_0 schwachstetiges Funktional. Es sei $F(\varphi) > 0$ für $\|\varphi\| = 1$, außerdem $\text{grad } F_0(\varphi) \neq 0$ für diejenigen $\varphi \in T$, für die $F_0(\varphi) > 0$ ist. $R_a = \{\varphi : F_0(\varphi) = a; \varphi \in S, 0 < a < \sup_{\varphi \in S} F_0(\varphi)\}$. Es werden (ohne

Beweis) die folgenden drei Sätze ausgesprochen: 1. Es sei \mathfrak{M}_k die Klasse der Abbilder von S_k in S bei allen stetigen ungeraden Transformationen B :

$$\mathfrak{M}_k = \{E \subset S : E = B(S_k); B \text{-stetig}, B(-\varphi) = -B(\varphi)\};$$

$c_k = \sup_{E \in \mathfrak{M}_k} \left[\min_{\varphi \in E} F_0(\varphi) \right]$, $k = 1, 2, \dots$; dann sind die c_k kritische Werte von F_0

auf S . Es gibt unendlich viele verschiedene c_k . 2. In jeder Menge R_a gibt es nicht-zusammenziehbare Untermengen \mathfrak{M}_a . Die Funktion $d(a) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{E \in \mathfrak{M}_a} \{ \inf_{\varphi \in E} F_0(\varphi) \}$ hat einen unendlichen Wertevorrat. Alle $d(a)$ sind kritische Werte von F_0 auf S . Die $d(a)$ sind stabil in dem Sinne, daß das Funktional $F = F_0 + G$ auf S mindestens einen solchen kritischen Wert c besitzt, daß $c - d(a) < \varepsilon$ für $\varepsilon > 0$, sobald (*) $(\sup_{\varphi \in S} \|\text{grad } G(\varphi)\| + \sup_{\varphi \in S} |G(\varphi)|) < \delta(\varepsilon)$; $\delta > 0$. (**) G soll dabei gleichmäßig differenzierbar, schwachstetig in T sein. Aus 2 folgt: 3. (Hauptsatz) Für jedes ganze $N > 0$ gibt es ein $g > 0$, so daß jedes Funktional $F \stackrel{\text{def}}{=} F_0 + G$ mindestens N verschiedene kritische Werte auf S hat, sobald (*) und (**) gelten.

K. Maurin.

Umegaki, Hisaharu: Note on irreducible decomposition of a positive linear functional. Kodai math. Sem. Reports 1954, 25—32 (1954).

Généralisation de trois articles antérieurs [ce Zbl. 48. 349; 51. 91 Japanese J. Math. 22, 27—50 (1952)]. Soit α une D^* -algèbre, avec une „identité approximative“ (e_α). Soient G un groupe d'automorphismes de α , τ une semi-trace sur α invariante par G . Ces données définissent: 1. une double représentation $x \rightarrow x^a$, $x \rightarrow x^b$ de α dans un espace hilbertien \mathfrak{H} ; soient W^a et W^b les anneaux d'opérateurs engendrés par les x^a et les x^b ; 2. une représentation unitaire de G dans \mathfrak{H} , qui engendre un anneau d'opérateurs W_G . Si les e_α sont dans le centre de α et invariants par G , il existe une application de W^a sur $W^b = W^a \cap W^b = W'_G$ qui généralise l'application connue lorsque G se réduit à l'identité. Par une méthode de „Reduction theory“, l'A. en déduit que, si α est séparable, τ est intégrale, sur le spectre de W^b , de traces sur α qui sont presque partout G -ergodiques, c'est-à-dire qui ne sont pas combinaisons convexes de 2 traces G -invariantes et linéairement indépendantes.

J. Dixmier.

Sunouchi, Haruo: A characterization of the maximal ideal in a factor of the case (Π_∞) . Kodai math. Sem. Reports 1954, 7 (1954).

L'A. caractérise de façon inexacte l'idéal bilatère maximum d'un facteur de classe Π_∞ . (L'erreur se trouve à la fin: „Here there exists the inverse $B^{-1} \in M \dots$ “).

J. Dixmier.

Gillman, L., M. Henriksen and M. Jerison: On a theorem of Gelfand and Kolmogoroff concerning maximal ideals in rings of continuous functions. Proc. Amer. math. Soc. 5, 447—455 (1954).

Sei X ein vollständig regulärer topologischer Raum, $\mathfrak{C}(X, R)$ die Algebra aller reellen stetigen Funktionen auf X , βX die bekannte Stone-Čech-Erweiterung von X , $Z(f) = \{x \mid x \in X, f(x) = 0\}$ für $f \in \mathfrak{C}(X, R)$. Die Verff. geben einen Beweis des Satzes von Gelfand und Kolmogorov (dies. Zbl. 21, 411): \mathfrak{M} von $\mathfrak{C}(X, R)$ ist ein maximales Ideal dann und nur dann, wenn ein Punkt $p \in \beta X$ existiert mit der Eigenschaft, daß $\mathfrak{M} = \{f \mid p \in Z(f)\}$. Dieser Satz wird dann für den Beweis der folgenden Sätze benutzt. 1. Der Raum βX (die Erweiterung von X , gegeben vom Ref., dies. Zbl. 32, 286) ist der Durchschnitt aller Q -Räume Y , $X \subset Y \subset \beta X$. 2. Jedes Ideal \mathfrak{N} von $\mathfrak{C}(X, R)$, abgeschlossen in der m -Topologie [eine Umgebung einer Funktion f besteht aus allen g mit der Eigenschaft, daß $|f(x) - g(x)| < \pi(x)$, wo $\pi(x) > 0$ für alle $x \in X$], ist ein Durchschnitt von maximalen Idealen. 3. Ein verbesserter Beweis wird gegeben für Satz 45 der Abhandlung des Ref. (loc. cit.).

E. Hewitt.

Isbell, J. R.: More on the continuity of the real roots of an algebraic equation. Proc. Amer. math. Soc. 5, 439 (1954).

Terminologie und Symbole wie im vorgehenden Referat. Sei \mathfrak{M} ein maximales Ideal in $\mathfrak{C}(X, R)$. Dann ist $\mathfrak{C}(X, R) / \mathfrak{M}$ ein reell-abgeschlossener Körper. Siehe auch Henriksen u. Isbell (dies. Zbl. 51, 340) und Hewitt (dies. Zbl. 32, 286).

E. Hewitt.

Helgason, S.: The derived algebra of a Banach algebra. Proc. nat. Acad. Sci. USA **40**, 994—995 (1954).

Let A be a commutative Banach algebra. It is known that A can be homomorphically represented by an algebra \hat{A} of continuous complex valued functions vanishing at infinity on the locally compact Hausdorff space \mathfrak{M} of regular maximal ideals of A taken with a suitable topology. If the representation is an algebraic isomorphism of A onto \hat{A} , A is called semi-simple. A is self-adjoint if \hat{A} is closed under complex conjugation. The norm of $\hat{x} \in \hat{A}$ is defined as $\|\hat{x}\|_\infty = \sup_{M \in \mathfrak{M}} |\hat{x}(M)|$.

Let $\|x\|_0 = \sup_{y \in A, \|y\| \leq 1} |\langle x, y \rangle|$. The set of elements $x \in A$ for which $\|x\|_0$ is finite is called the derived algebra of the algebra A . The author announces (without proof) certain results concerning the derived algebra A_0 . These may be summarised as follows: 1. If A is semi-simple, so is A_0 . 2. If \mathfrak{M}_0 is the space of regular maximal ideals of A_0 , there is a homeomorphism of \mathfrak{M}_0 into \mathfrak{M} and the image set is open in \mathfrak{M} . This result remains true if \mathfrak{M}_0 and \mathfrak{M} are taken with hull-kernel topologies. 3. The class I_0 of homomorphisms h_0 of A_0 on to the complex numbers can be identified with \mathfrak{M}_0 . Let A_0 be the derived algebra of a commutative self-adjoint Banach algebra with identity element. Then to each complex continuous linear functional F on A_0 , corresponds a complex Radon measure μ_F on $J_0 = \mathfrak{M}_0$ such that for $x, y \in A$, $F(xy) = \int_A h_0(xy) d\mu_F(h_0)$. — The author considers two specific examples. One is the group algebra of the circle group, $A = L^1(0, 2\pi)$. Here the derived algebra A_0 has the properties (i) $A_0 \subset L^2(0, 2\pi)$ and (ii) if (a_n) are the Fourier coefficients of a function of A , and $b_n \leq a_n$, then there is a function in A with Fourier coefficients b_n . — The second example is the space of uniformly almost periodic functions. Here the derived algebra consists of those functions having an absolutely convergent Fourier series.

V. Ganapathy Iyer.

Ogasawara, Tōzō: Finite-dimensionality of certain Banach algebras. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A **17**, 359—364 (1954).

Théorème: soit A une $*$ -algèbre de Banach telle que: 1. $k \|x\|_1^2 \leq \|xx^*\|$ (k , constante > 0) pour tout x normal de A ; 2. $xx^* = 0$ entraîne $x = 0$ pour x quelconque. Alors, si l'espace de Banach A est réflexif, ou semi-complet pour la topologie faible, ou de bidual séparable, A est de dimension finie. (L'A. observe que les sous- $*$ -algèbres commutatives maximales de A possèdent les propriétés supposées vraies pour A ; grâce à la représentation fonctionnelle de ces sous-algèbres, on voit qu'elles sont de dimension finie; le reste de la démonstration est purement algébrique.) Application: soient B l'algèbre des opérateurs continus d'un espace hilbertien, et $T \in B$; l'application $A \rightarrow TA$ de B dans B est faiblement compacte si et seulement si T est compact.

J. Dixmier.

Rosenberg, Alex: Finite-dimensional simple subalgebras of the ring of all continuous linear transformations. Math. Z. **61**, 150—159 (1954).

Soient M un espace vectoriel à gauche, N un espace vectoriel à droite sur un même corps D (commutatif ou non), en dualité par une forme bilinéaire séparante (x, x') ; soit $A = L(M, N)$ l'anneau des endomorphismes continus de M pour la topologie faible $\sigma(M, N)$. L'A. inaugure dans ce travail une „théorie de Galois“ pour les sous-algèbres de A (sur le centre Φ de D), généralisant celle développée par le Réf. pour le cas où $N = M^*$ (dual algébrique de M) (ce Zbl. **41**, 163). Soit E_c l'anneau des endomorphismes du groupe abélien M , continus pour $\sigma(M, N)$; l'A. détermine d'abord le centralisateur C dans E_c d'un sous-anneau B de E_c tel que B soit un anneau d'Artin simple, contienne D_L (corps des homothéties de M) et ait sur D_L une base finie (à gauche) formée de transformations semi-linéaires (continues) de M . Il montre que, dans ces conditions, C est de la forme $L(Q, R)$, où Q

et R sont deux espaces vectoriels en dualité sur un certain corps; en outre, l'indice de B sur D_L est égal aux hauteurs à gauche et à droite de A sur C , et B est le centralisateur de C dans E_c . Ce résultat peut se préciser lorsque $D = \Phi$ est algébriquement clos, et admet dans ce cas une réciproque convenablement précisée. En outre, dans le même cas particulier, on a aussi un analogue du th. de Skolem-Noether: si \bar{B} est un second anneau ayant les mêmes propriétés que B (B et \bar{B} étant contenus dans A), et s'il existe un Φ -isomorphisme de B sur \bar{B} , cet isomorphisme peut s'étendre à un automorphisme intérieur de A si les centralisateurs de B et \bar{B} dans A sont Φ -isomorphes. Cela conduit, comme l'indique l'A., au problème suivant sur les espaces de Banach complexes: existe-t-il un tel espace E admettant deux décompositions $E_1 \oplus E_2$, $F_1 \oplus F_2$ en sommes directes topologiques, telles que E_1 et E_2 soient isomorphes, F_1 et F_2 isomorphes, mais E_1 et F_1 non isomorphes? Enfin, l'A. prouve que l'isomorphisme de B sur \bar{B} peut s'étendre en un automorphisme intérieur de A lorsque (D étant quelconque) M et N ont chacun une base dénombrable sur D .

J. Dieudonné.

Wolfson, Kenneth G.: Some remarks on ν -transitive rings and linear compactness. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 617—619 (1954).

Soient A un espace vectoriel sur un corps (commutatif ou non) F , $E(F, A)$ un sous-anneau de l'anneau des endomorphismes de A , contenant les endomorphismes de rang fini. L'A. dit que $E(F, A)$ est ν -transitif si pour toute famille (a_α) d'éléments linéairement indépendants de A , de puissance $\leq \aleph_\nu$, et toute famille (b_α) d'éléments de A ayant même ensemble d'indices, il existe $u \in E(F, A)$ tel que $u(a_\alpha) = b_\alpha$ pour tout α . Il caractérise intrinsèquement ces anneaux K par les deux propriétés suivantes: 1. Le socle n'est pas réduit à 0 et est contenu dans tout idéal bilatère non nul de K ; 2. Soit L l'ensemble des idéaux à gauche de K qui sont annulateurs à gauche de parties de K , W l'ensemble des idéaux de L qui sont intersections finies d'idéaux maximaux appartenant à L : si Q est un ensemble de classes $a_\alpha + I_\alpha$, où $I_\alpha \in W$, tel que toute intersection finie d'éléments de Q soit non vide, alors tout ensemble d'éléments de Q de puissance $\leq \aleph_\nu$ a une intersection non vide. Comme conséquences de ce théorème, l'A. prouve qu'un anneau primitif ayant des idéaux à gauche minimaux et qui est linéairement compact (pour une topologie compatible avec sa structure d'anneau) est l'anneau de tous les endomorphismes d'un espace vectoriel; une algèbre de Banach primitive et linéairement compacte est nécessairement de dimension finie.

J. Dieudonné.

Zelinsky, Daniel: Every linear transformation is a sum of nonsingular ones. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 627—630 (1954).

Soient M, N deux espaces vectoriels de même dimension (finie ou non) sur un corps (commutatif ou non), et soit α une application linéaire de M dans N . L'A. démontre qu'il existe deux isomorphismes β, γ de M sur N tels que $\alpha = \beta + \gamma$, à l'exception du cas trivial où M et N sont de dimension 1 sur le corps à 2 éléments. La démonstration est fort ingénieuse et repose sur la remarque que l'application identique de M sur lui-même est toujours somme de deux automorphismes de M , sauf dans le cas exceptionnel indiqué.

J. Dieudonné.

Altman, M.: The Fredholm theory of linear equations in locally convex linear topological spaces. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III **2**, 267—269 (1954).

Der Verf. bemerkt, daß die von Leżański (dies. Zbl. **52**, 126) gegebene Definition der Determinante und der Unterdeterminanten einer linearen Gleichung $\varphi + T\varphi = q_0$ auf den Fall gewisser vollstetiger, linearer Operationen T in topologischen, linearen, lokal konvexen Räumen verallgemeinert werden kann, so daß die Hauptsätze der Fredholmschen Theorie weiter gültig sind. Die Voraussetzungen des Verf. über die Operation T sind ähnlich den ursprünglichen Voraussetzungen von Leżański.

R. Sikorski.

Egerváry, E.: On the contractive linear transformations of n -dimensional vector space. Acta Sci. math. **15**, 178—182 (1954).

The reviewer has proved (this Zbl. **52**, 122, 123) that, for every contraction T of a Hilbert space \mathfrak{H} (i. e. for every linear transformation T with $\|T\| \leq 1$), there exists a unitary transformation U in a Hilbert space $H \supseteq \mathfrak{H}$ such that the

equation (*) $T^r = P U^r$ holds in \mathfrak{H} for all integers $r \geq 1$; P denotes here the orthogonal projection in H on the subspace \mathfrak{H} . In the present paper it is required only that the equation (*) holds for $r = 1, 2, \dots, k$ where k is a given number, moreover it is supposed that \mathfrak{H} is finite-dimensional, $\mathfrak{H} = R_n$. Starting with some geometrical considerations, the author shows that, in this case, U may be chosen as an $R_{(k+1)n}$, and U^r is explicitly given in form of a $(k+1) \times (k+1)$ matrix whose elements are linear transformations of R_n .

B. Sz.-Nagy.

● Achieser, N. I. und I. M. Glasmann: *Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum*. (Mathematische Lehrbücher und Monographien, 1. Abt. Band IV.) Berlin: Akademie-Verlag 1954. 369 S. DM 28,—.

Vgl. die Besprechung des russischen Originals, dies. Zbl. 41, 229.

Krejn, S. G.: *Über eine unbestimmte Gleichung im Hilbertschen Raum und ihre Anwendung in der Potentialtheorie*. Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 3 (61), 149—153 (1954) [Russisch].

Es sei \mathfrak{H} der (abstrakte) Hilbertsche Raum, A ein linearer Operator in \mathfrak{H} , A^* der Adjungierte von A , I die Identität, θ der Nullvektor, $U(A) = \{x \in \mathfrak{H} : Ax = \theta\}$, $R(A)$ der Wertevorrat von A . Der Verf. beweist den folgenden Satz: Für die Lösbarkeit der unbestimmten Gleichung (1) $(I - K)x + My = h$ (x, y Unbekannte), wobei K vollstetig, M beschränkt ist (beide linear), für jedes $h \in \mathfrak{H}$, ist notwendig und hinreichend, daß $U(I - K^*) \cap U(M^*) = \theta$. Die Lösung von (1) ist eindeutig, wenn $x \in R(I - K^*)$, $y \in M^*U(I - K^*)$. Mit Hilfe des obigen Satzes wird der Existenznachweis erbracht für die Lösung der Randwertaufgabe: $\Delta u + k^2 u = 0$, $u|_{\partial\Omega} = h$, für den Außenraum von $\Omega_3 \subset E_3$.

K. Maurin.

Livšic, M. S.: *Über eine inverse Aufgabe der Theorie der Operatoren. I, II*. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 97, 399—402, 589—592 (1954) [Russisch].

I. Das folgende Problem wird betrachtet, das mit der Relativitätstheorie zusammenhängt: Es seien H_0, B beschränkte selbstadjungierte Transformationen des Hilbertschen Raumes \mathfrak{H} ; es wird vorausgesetzt, daß für jedes $p > 0$ die Transformation $H_p = H_0 + c p B$ den einzigen Eigenwert $E_p = -c \mid m^2 c^2 - p^2$ besitzt (m und c sind gegebene positive Konstanten). In der vorliegenden Note wird noch vorausgesetzt, daß B gleich der orthogonalen Projektion \mathfrak{Z} auf eine eindimensionale Mannigfaltigkeit ist: $\mathfrak{Z} \mathfrak{f} = (f, \varphi_0) \varphi_0$, $\|\varphi_0\| = 1$; der durch die Vektoren $\{H_p^n \varphi_0\}$ ($n = 0, 1, \dots$) aufgespannte Unterraum sei mit \mathfrak{H}_0 bezeichnet. Es wird der folgende Satz bewiesen: \mathfrak{H}_0 ist unendlichdimensional, reduziert H_p , und es gibt in \mathfrak{H}_0 ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ in bezug auf welches H_0 die Matrix $m^2 c^2 \mathfrak{Z}$ hat, wobei $\mathfrak{Z} = (c_{ij})$ mit $i, j = 1, 2, \dots$, $c_{21} = c_{21} = \frac{1}{2}$, $c_{r,r+1} = c_{r+1,r} = \frac{1}{2}$ für $r = 2, 3, \dots$, $c_{ij} = 0$ sonst (sog. Tschebyscheffsche Matrix) ist. In $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_0$ kann H_0 gleich einer beliebigen beschränkten selbstadjungierten Transformation C sein, welche keinen Eigenwert besitzt. — Umgekehrt, alle Transformationen H_p , die eine derartige Struktur haben, besitzen die Eigenschaft, daß $H_p = H_0 + c p \mathfrak{Z}$ für $p > 0$ den einzigen Eigenwert E_p hat, das kontinuierliche Spektrum von H_p erfüllt aber die Strecke $[-m^2 c^2, m^2 c^2]$. Fordert man, daß H_p ein einfaches Spektrum besitzt, so ist notwendig $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}$, also ist dann H_0 bis auf eine unitäre Transformation bestimmt. — II. Das Problem der I. Mitteilung wird nun in der allgemeineren Form aufgeworfen, daß auch von der Transformation B außer Vollstetigkeit und Selbstadjungiertheit nichts vorausgesetzt wird. Es ergibt sich, daß der Hilbertsche Raum \mathfrak{H} dann durch paarweise orthogonale Unterräume \mathfrak{H}^ω ($\omega \in \Omega$), \mathfrak{H}_1 aufgespannt wird: $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \sum_{\omega \in \Omega} \mathfrak{H}^\omega$; diese Unterräume reduzieren alle die Transformationen $H_p = H_0 + c p B$; in \mathfrak{H}_1 ist H_p gleich einer von p unabhängigen beschränkten selbstadjungierten Transformation C , die keine Eigenwerte besitzt; und in jedem Unterraum \mathfrak{H}^ω hat H_p in einer geeigneten orthogonalen Basis die Matrix $m^2 c^2 \mathfrak{Z} \pm c p \mathfrak{Z}$, wo \mathfrak{Z} die Tschebyscheffsche Matrix und $\mathfrak{Z}(b_{ij})$ mit $i, j = 1, 2, \dots$, $b_{11} = 1$, $b_{ij} = 0$ sonst.

B. Sz.-Nagy.

Brodskij, M. S.: *Ein Multiplikationssatz für die charakteristischen Matrixfunktionen linearer Operatoren*. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 97, 761—764 (1954) [Russisch].

Verf. verallgemeinert den Begriff der „charakteristischen Matrixfunktion“, der von M. S. Livšic eingeführt wurde [Mat. Sbornik, n. Ser. 34 (76), 145—199 (1954)]. A bedeute einen beschränkten linearen Operator des Hilbertschen Raumes \mathfrak{H} , für den $\text{Im } A = (A - A^*)/2i$ einen endlichdimensionalen Wertebereich besitzt. \mathfrak{U} sei ein endlichdimensionaler Unterraum

von \mathfrak{H} , der den Wertebereich von $\text{Im } A$ enthält. Es sei e_1, \dots, e_r ein orthonormiertes System von Eigenvektoren von $\text{Im } A$, welches \mathfrak{E} aufspannt; die entsprechenden Eigenwerte seien $\omega_1, \dots, \omega_r$. Gibt es unter den ω_i m positive, n negative und s verschwindende und sind p, q zwei positive Zahlen mit $p \geq m + s$, $q \geq n + s$, so bilde man die Matrix

$$W(\lambda) = I - i\Pi^*(c_{\alpha\beta}(\lambda))\Pi y \quad \text{mit} \quad c_{\alpha\beta}(\lambda) = ((A - \lambda I)^{-1}e_\alpha, e_\beta), y = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix},$$

und mit einer beliebigen konstanten Matrix Π , die r linear unabhängige Reihen und $p + q$ Spalten hat und der Bedingung $\Pi y \Pi^* = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_r)$ genügt. $W(\lambda)$ wird als „charakteristische Matrixfunktion“ für A bezeichnet. — Es sei nun H_0 ein Unterraum von H , und man setze $A_0 f = P_0 A J$ für $J \in H_0$, wobei P_0 die Projektion auf H_0 bedeutet; ferner sei $\mathfrak{E}_0 = P_0 \mathfrak{E}$. Dann ist $(\text{Im } A_0) \mathfrak{H}_0 \subseteq \mathfrak{E}_0$. Ist $e_1^{(0)}, \dots, e_{r_0}^{(0)}$ ein orthonormiertes System von Eigenvektoren von $\text{Im } A_0$ in \mathfrak{E}_0 , die \mathfrak{E}_0 aufspannen, so setze man $W_0(\lambda) = I - i\Pi_0^*(c_{\alpha\beta}^{(0)}(\lambda))\Pi_0 y$ mit $c_{\alpha\beta}^{(0)}(\lambda) = ((A_0 - \lambda I)^{-1}e_\alpha^{(0)}, e_\beta^{(0)})$, $\Pi_0 = (u_{\alpha\beta})\Pi$, $u_{\alpha\beta} = (e_\alpha^{(0)}, e_\beta)$. $W_0(\lambda)$ ist eine charakteristische Matrixfunktion für A_0 , sie wird als „Projektion“ von $W(\lambda)$ auf \mathfrak{H}_0 bezeichnet. Satz 1: Ist $H = H_1 \oplus H_2$, wobei H_1 invariant gegenüber A ist, so ist $W(\lambda)$ gleich dem Produkt seiner Projektionen auf \mathfrak{H}_1 und \mathfrak{H}_2 . — Satz 2: Sind $W_k(\lambda)$ ($k = 1, 2$) die charakteristischen Matrixfunktionen der Operatoren A_1 in H_1 , A_2 in H_2 (mit $y_1 = y_2$), so gibt es in $H = H_1 \oplus H_2$ einen Operator A mit der charakteristischen Matrixfunktion $W(\lambda) = W_1(\lambda)W_2(\lambda)$, so daß $A f = A_1 f$ für $f \in \mathfrak{H}_1$ und $P_2 A f = A_2 f$ für $f \in \mathfrak{H}_2$ gilt, wobei P_2 die Projektion auf \mathfrak{H}_2 bedeutet.

B. Sz.-Nagy.

Gavurin, M. K.: Über Abschätzungen für die Eigenwerte und Eigenvektoren eines gestörten Operators. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 96, 1093—1095 (1954) [Russisch].

Es sei A_0 ein nicht notwendig beschränkter Operator des Hilbertschen Raumes \mathfrak{H} mit dem einfachen Eigenwert λ_0 und dem zugehörigen normierten Eigenvektor q_0 ; $\bar{\lambda}_0$ sei ein ebenfalls einfacher Eigenwert von A_0^* mit dem Eigenvektor p_0 . Ferner wird vorausgesetzt, daß $A_0 - \lambda_0 I$ in $\mathfrak{H}_{p_0} = \mathfrak{H} \ominus (p_0)$ betrachtet, einen in $\mathfrak{H}_{p_0} = \mathfrak{H} \ominus (p_0)$ definierten beschränkten Inversen R besitzt und daß $\gamma_0 = |(q_0, p_0)| > 0$ gilt. Ist dann B ein beschränkter Operator mit $\|B\| \|R\| \leq \frac{1}{2} [1 - \sqrt{1 - \gamma_0^2}]$, so werden Abschätzungen für die Störung von q_0 , λ_0 , bzw. von p_0 , $\bar{\lambda}_0$ angegeben, wenn man von A_0 zum gestörten Operator $A = A_0 + B$ übergeht. Ist z. B. q der gestörte Eigenvektor von A mit $(q, q_0) = 1$, so gilt $\|q - q_0\| \leq \gamma_0 / (1 + \sqrt{1 - \gamma_0^2})$. — Die Beweise sind nicht ausgeführt. [Aus der schon ziemlich ausgedehnten Literatur über Störungstheorie der Operatoren möge in diesem Zusammenhang auf die folgenden Arbeiten hingewiesen werden, wo sogar Operatoren in einem Banachschen Raume behandelt werden: B. Sz.-Nagy, dies. Zbl. 45, 216; F. Wolf, dies. Zbl. 46, 124; T. Katô, dies. Zbl. 48, 354.] B. Sz.-Nagy.

Vajnberg, M. M.: Über einige Eigenschaften der quadratischen Integralfornen in Räumen L^q ($q \leq 2$). Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 3, 236—238 (1954) [Russisch].

Soient: B un ensemble de mesure finie de l'espace euclidien à 8 dimensions; $K(x, y)$ un noyau réel et symétrique, défini sur $B \times B$; A l'opérateur intégral $Au = \int_B K(x, y) u(y) dy$, $I(u)$ la forme quadratique $I(u) = \int_B \int_B K(x, y) u(y) u(x) dx dy$, $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ($\lambda_i \leq \lambda_{i+1}$) et $(q_i(x))_{i \in \mathbb{N}}$ les valeurs et fonctions propres de l'opérateur A considéré comme appartenant à L^2 . En supposant que l'opérateur A actionne d'une manière complètement continu de L^q dans L^p ($q \leq 2$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$) et en prenant

$$A_n u = \int_B \left(\sum_{k=1}^n \frac{q_k(x) q_k(y)}{\lambda_k} \right) u(y) dy, \quad I_n(u) = \int_B u(x) A_n u dx, \quad u \in L^q,$$

l'A. énonce sous forme de théorèmes (mais sans démonstration) un certain nombre de propriétés de la forme quadratique $I(u)$. Ainsi: a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_D |I(u) - I_n(u)| = 0$ où D est la boule $\|u\| \leq r$ de l'espace L^q , et $u \in D$. b) $I u = \int_B K(x, y) g(u(y), y) dy$ étant l'opérateur de Hammerstein, avec $g(u, x)$ fonction continue de $u \in]-\infty, +\infty[$, et mesurable dans B par rapport à x , alors si l'opérateur positif et adjoint de A est dans L^2 et actionne d'une manière continue de L^q dans L^p ($1 \leq q \leq 2$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$) et $|g(u, x)| \leq a(x) + b|u|^{p-1}$, $a(x) \in L^q$,

$b > 0$, dans ces conditions Γ possède au moins un ensemble dénombrable de fonctions propres $\in L^p$, de norme décroissante dans L^p , dont on peut extraire une suite d'éléments de norme tendant vers zéro. — D'autres propriétés sont énoncées dans les Théorèmes 4, 5, et 6. *S. Vasilache.*

Hartman, Philip and Aurel Wintner: The spectra of Toeplitz's matrices. Amer. J. Math. **76**, 867—882 (1954).

Ist $f(q) \in L^1(-\pi, \pi)$, $f(q) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{in\varphi}$, so heißt $\mathfrak{T} = (f_{n-m})$ ($n, m = 0, 1, 2, \dots$) die zu $f(q)$ gehörende Toeplitzsche Matrix (\mathfrak{T} -Matrix). Ist $f(q) \in L^2$, $x^+(q) \in L^2$, $x^+(q) \sim \sum_{n=0}^{\infty} x_n e^{in\varphi}$ (d. h. $x^+(q)$ innere Funktion), $x^+ = (x_0, x_1, x_2, \dots)$, so ist

$\mathfrak{T} x^+ = y^+$ äquivalent mit $f(q) x^+(q) = y(q)$ ($\in L^1$), $y(q) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n e^{in\varphi}$,

$y^+ = (y_0, y_1, y_2, \dots)$. Ist $f(q)$ reell, so \mathfrak{T} hermitesch; in diesem Falle ist \mathfrak{T} genau dann beschränkt, wenn $f(q)$ (wesentlich) beschränkt ist. — I. Beschränkte \mathfrak{T} -Matrizen: $f(q)$ sei reell, meßbar und (wesentlich) beschränkt; m, M seien (wesentliche) untere und obere Grenze von $f(q)$. Dann ist das Spektrum von \mathfrak{T} das abgeschlossene Intervall $[m, M]$; ist $f(q)$ nicht konstant ($m < M$), so ist das Punktspektrum von \mathfrak{T} leer. — II. Riemanns Problem: Sei $f(q)$ reell, meßbar und (wesentlich) beschränkt; dann

sind notwendig für die Existenz einer Lösung $x^+(q) \in L^2$, $x^+(q) \sim \sum_{n=0}^{\infty} x_n e^{in\varphi}$

von (*) $f(q) x^+(q) = 1 - y^-(q)$ [$y^-(q) \in L^2$, $y^-(q) \sim \sum_{n=-1}^{\infty} y_{-n} e^{in\varphi}$] die beiden

Bedingungen (a) $f(q)$ hat konstantes Vorzeichen, (b) $1/f(q) \in L^1$. — Sei $f(q) \in L^1$. Dann sind (a), (b) für die Lösbarkeit von (*) durch eine innere Funktion $x^+(q) \in L^2$ hinreichend [es ist dann $y^-(q) \in L^2$]. — III. Gegenbeispiel: Sei $f(q) \in L^2$ und reell. Dann ist es möglich, daß $\lambda = 0$ zum Punktspektrum von \mathfrak{T} gehört, und ferner, daß (*) eine Lösung $x^+(q) \in L^2$ besitzt, ohne daß (a) gilt. — IV. Unbeschränkte \mathfrak{T} -Matrizen: Sei $f(q) \in L^2$ und reell. 1. Die für beschränktes f gemachten drei Aussagen (I. und die erste Aussage von II.) gelten, falls \mathfrak{T} selbstadjungiert ist. 2. \mathfrak{T} ist selbstadjungiert, falls $f(q)$ halbbeschränkt ist. 3. (auch gültig, falls \mathfrak{T} nicht selbstadjungiert ist). Seien $m (\leq -\infty)$ und $M (< +\infty)$ (wesentliche) untere und obere Schranke von $f(q)$, $m < \mu < M$, J die Einheitsmatrix, so besitzt $\mathfrak{T} - \mu J$ keine beschränkte Inverse. — Anhang: Die \mathfrak{T} -Matrix einer beliebigen (auch nicht reellen) Funktion $f(q) \in L^2$ ist genau dann beschränkt, wenn $f(q)$ (wesentlich) beschränkt ist.

F. W. Schäfke.

Aronszajn, N. and K. T. Smith: Invariant subspaces of completely continuous operators. Ann. of Math., II. Ser. **60**, 345—350 (1954).

Ergebnis: Jeder lineare vollstetige Operator in einem Banachschen Raum besitzt nichttriviale invariante Unterräume. Der lange Beweis wird auf der letzten Seite für den Fall Hilbertscher Räume vereinfacht.

D. Morgenstern.

Wermer, John: Invariant subspaces of bounded operators. 12. Skand. Mat.-Kongr., Lund 1953, 314—316 (1954).

Let T be a bounded linear operator in a Banach space B that has its spectrum $\sigma(T)$ lying on the unit circle, and let $R_\lambda = (\lambda I - T)^{-1}$. T is said to be of type α if $\|T^n\| = \exp(|n| \varepsilon(n))$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ with $\varepsilon(n) = O(\log^{-\alpha} |n|)$. With $x \in B$, $s(x)$ denotes the set of points p on the unit circle such that the functions $R_\lambda x$ for $|\lambda| < 1$ and for $|\lambda| > 1$ do not continue each other analytically across any open arc containing p . (Given a closed subset A of $\sigma(T)$, C_A denotes the subspace of B consisting of those x such that $s(x) \cap A = \emptyset$). The author has proved (this Zbl. **47**, 358) that if T is of type α , $\alpha > 1$, then C_A is closed for each A , and C_A is non-trivial if $A \neq \sigma(T)$ and contains the intersection of $\sigma(T)$ with some open arc. It is now proved that these results are not available when $\alpha = 1$. In fact an operator T_0 is constructed, of type 1, such that $\sigma(T_0)$ is the whole unit circle but C_A is everywhere

dense unless Λ is a finite set. It is further proved that if T is of type λ ($\lambda > 1$) and if $\sigma(T)$ contains more than one point, then T commutes with an operator having a non-zero null-space. This theorem also breaks down when $\lambda = 1$. *F. F. Bonsall*.

Krasnosel'skij, M. A.: Einige Aufgaben der nicht-linearen Analysis. Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 3 (61), 57—114 (1954) [Russisch].

C'est un article expositif dans lequel l'A. examine, sans démonstrations, les méthodes de résolution effective (par approximations successives) et les théorèmes d'existence basés sur diverses variantes du principe du point fixe pour les équations nonlinéaires dans les espaces de Banach. En préalable, le premier chapitre est consacré à la discussion des opérateurs (surtout intégrals) concrets et des espaces plus indiqués pour leur étude. On y insiste sur les espaces d'Orlicz. Parmi les recherches plus récentes, citées, remarquons celles de E. H. Rothe, E. S. Tzitanadzé, l'A., M. M. Vajnberg. L'exposé de l'A. est très systématique et constitue une source précieuse d'information. *G. Marinescu*.

Ważewski, T.: Une modification du théorème de l'Hôpital liée au problème du prolongement des intégrales des équations différentielles. Ann. Polon. math. 1, 1—12 (1954).

The author proves first some lemmas on localization of values of real functions, the following of which is typical: Let $\lambda(x)$ and $\eta(x) > 0$ be continuous functions in an interval $\Delta = (a, b)$, and let $\lambda(\xi) \leq 0$; if $x \neq \xi$, $0 < \lambda(x) < \eta(x)$ implies $\text{sign}(x - \xi) D_+ \lambda(x) \leq 0$ except a denumerable set, then $\lambda(x) \leq 0$. The following theorem of de l'Hôpital type is proved. Let $F(x)$ be a Banach-space-valued function, continuous in Δ , $g(x)$ a continuous and strictly monotone function in Δ , let $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow b} \|F(x)\| = 0$; suppose the derivatives at the right $g'_+(x) \neq 0$ and $F'_+(x)$ exist except a denumerable set D . If $x_n \in \Delta - D$, $x_n \rightarrow b$, $F(x_n) \rightarrow 0$ implies $\lim_{n \rightarrow \infty} [F'_+(x_n)/g'_+(x_n)] = k$, then $\lim_{x \rightarrow b} [F(x)/g(x)] = k$, $\lim_{x \rightarrow b} F(x) = 0$, and $\lim_{x \rightarrow b} [F'_+(x)/g'_+(x)] = k$. As application the following theorem on differential equations is proved. Consider the differential equation $y' = G(t, y)$ where $G(t, y)$ is continuous and $y = y(t)$ is a Banach-space-valued function of the real variable t ; if an integral, $\varphi(t)$, of this equation, defined in (a, b) is condensed at b , i. e. there exist $t_n \rightarrow b$ such that $\varphi(t_n) \rightarrow k$, then $\lim_{t \rightarrow b} \varphi(t) = k$ moreover, the differential equation is satisfied also at $t = b$. *A. Alexiewicz*.

Chodźaev, L. S.: Das Cauchysche Problem für eine lineare parabolische Gleichung im Funktionalraum. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 99, 31—33 (1954) [Russisch].

On considère l'opérateur différentiel $L = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^{2p} L_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}, t \right)$ où $t \in R_t$ (temps) et $x \in R^n$, et $L_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}, t \right) = \sum_{i,k} a_{ik}(t) D^{ik}$, $k = (k_1, \dots, k_r)$, $k = \sum k_i$. On suppose cet opérateur parabolique, au sens de Petrowskij [cf. Bjull. Moskovsk. gosudarst. Univ., Sekc. A 1, Nr. 7 (1933)]. L'A. considère l'espace S_t des fonctions l fois continuellement différentiables à support compact dans $R^n \times R_t$, et l'espace dual S_t^* de S_t , espace des fonctionnelles de Soboleff [cf. Mat. Sbornik 42, No 2 (1935)]. [Note du récen seur: il y a intérêt à remplacer l'espace S_t par l'espace D des fonctions indéfiniment différentiables à support compact, muni de la topologie de Schwartz (ce Zbl. 37, 73; 42, 114) et S_t^* par l'espace D' des distributions. On obtient ainsi une théorie plus générale et plus simple.] Le problème de Cauchy relatif à L , posé dans S_t^* , est le suivant (en faisant passer la donnée de Cauchy au 2^{ème} membre): trouver u dans S_t^* , nulle pour $t < 0$, solution de $Lu = \varphi$, φ étant donnée dans S_t^* , nulle pour $t < 0$ (Lu est pris au sens de Soboleff et Schwartz). L'A. annonce les résultats suivants: On considère le sous-espace de S_t^* formé des distributions u nulles pour $t < 0$, telles que, pour tout φ dans S_t , on ait $|\langle u, \varphi(x - x_0, t) \rangle| \leq c_1 \exp(c(\varphi) |x_0|^{(2p, (2p-1))})$, $c_1 > 0$, $c(\varphi) = \text{constante}$ dépendant de φ . Alors: a) Dans ce sous-espace, le problème de Cauchy admet au plus une solution. b) Si φ est dans ce sous-espace, le problème de Cauchy admet une solution (unique) dans ce sous-espace. c) Le noyau qui résout le problème peut être obtenu par transformation de Fourier en x (formule (9) de l'A.). — L'A. montre sur un exemple que ceci résout des problèmes n'entrant pas dans le cadre des transformées de Fourier généralisées de Gelfand et Šilov (ce Zbl. 52, 116). *J. L. Lions*.

● Dalton, John P.: Symbolic operators. Johannesburg: Witwatersrand University Press 1954. XVI, 194 p. £ 1.10 s.

Daß sich der Operatorenkalkül von Heaviside, soweit er sich auf gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten bezieht, auch ohne Zuhilfenahme der Laplace-Transformation rein algebraisch rechtfertigen läßt, ist lange bekannt und in neuerer Zeit von J. Mikusiński (dies. Zbl. 38, 278) besonders deutlich dargetan worden; in letzterer Theorie wird der Kalkül durch Einführung eines geeigneten Konvergenzbegriffs sogar auf partielle Differentialgleichungen anwendbar. Verf. des vorliegenden Buches stellt sich in elementarerer Weise die Aufgabe, die Heavisidesche Technik zu erklären und ihre Richtigkeit für gewöhnliche Differentialgleichungen und eine enge Klasse von partiellen Differentialgleichungen zu beweisen. Die bekannte Schwierigkeit, daß der Heavisidekalkül nur für verschwindende Anfangsbedingungen gilt, vermeidet er dadurch, daß er neben

dem Operator $\frac{d}{dt} = D$ den Operator $\int_0^t (.) dt = Q$ einführt und die Umkehrung Q^{-1} streng von D unterscheidet, während bei Heaviside D und Q^{-1} identisch sind.

Auf eine gewöhnliche Differentialgleichung $F(D) x(t) = \sum_{r=0}^n a_r D^{n-r} x(t) = f(t)$ wird zunächst n -mal die Operation Q angewendet, wodurch die Ableitungen verschwinden und die Anfangsbedingungen eintreten: $\sum_{r=0}^n a_r Q^r x = \sum_{s=0}^{n-1} Q^s \gamma_s + Q^n f$

(γ_s = gewisse Kombination der Anfangswerte). Ist $F(\lambda) = \prod_{r=1}^n (\lambda - \lambda_r)$, so ist

$\sum_{r=0}^n a_r \lambda^r = \prod_{r=1}^n (1 - \lambda_r \lambda)$, also lautet die neue Gleichung: $\prod_{r=1}^n (1 - \lambda_r Q) x =$

$\sum_{s=0}^{n-1} Q^s \gamma_s + Q^n f$. Definiert man die Operatoren $\omega_r = (1 - \lambda_r Q)^{-1}$ (leicht explizit bestimmbar) und $\Omega_r = Q \omega_r$, so ergibt sich als Lösung der Differentialgleichung

mit den vorgeschriebenen Anfangsbedingungen: $x(t) = \omega_1 \cdots \omega_n \sum_{s=0}^{n-1} Q^s \gamma_s +$

$\Omega_1 \cdots \Omega_n f(t)$. Durch Grenzübergang läßt sich der Kalkül auf gewisse Typen von partiellen Differentialgleichungen übertragen. In einem besonderen Teil des Buches wird der Operator nichtganzer Ordnung behandelt und seine Verwendbarkeit an Beispielen aufgezeigt.

G. Doetsch.

Jataev, M.: Einige kritische Fälle der Stabilität der Lösungen von Differentialgleichungen in normierten Räumen. Izvestija Akad. Nauk Kazach. SSR Nr. 129, Ser. Astron. Fiz. Mat. Mech., Razd. Mat. Mech. 3 (7), 3-40 (1954) [Russisch].

Let x, y be vectors in a Banach space and consider the system (1): $\dot{y} = \Phi(t, x, y)$, $\dot{x} = F(t, x, y)$; assume F, Φ continuous and satisfying Lipschitz conditions with respect to x, y , $F(t, 0, 0) = \Phi(t, 0, 0) = 0$. The solution $y = 0$ of $\dot{y} = \Phi$ is said to be stable (asymptotically stable) for any sufficiently small x if given $\epsilon > 0$ there is a $\varrho = \varrho(\epsilon, t_0) > 0$ such that $\|y(t_0)\| \leq \varrho, \|z(t_0)\| \leq \varrho, \|z(t)\| < \epsilon$ for $t \geq t_0$ imply that the solution $y(t)$ of $\dot{y} = \Phi(t, z(t), y)$ satisfies $\|y(t)\| < \epsilon$ for $t \geq t_0$ (and furthermore $y \rightarrow 0$); similar definitions interchanging x and y . Theorem 1: if the solution $y = 0$ of $\dot{y} = \Phi$ is stable (asymptotically stable) for sufficiently small y , then the solution $x = y = 0$ of (1) is stable (asymptotically stable). Theorem 2: if $P = P(t, x) \neq 0$, $N(t, y) = L(t, x, y)$ where P is linear, $N(t, y) = o(\|y\|)$, $L(t, x, y) = O(\|x\| + \|y\|)$; if any solution of $\dot{x} = P$ satisfies $\|x(t)\| \leq B \|x(t_0)\| \exp[-\alpha(t - t_0)]$ for $t \geq t_0$; if the solution $y = 0$ of $\dot{y} = \Phi$ is stable (asymptotically stable) for sufficiently small x , then the solution $x = y = 0$ of (1) is stable (asymptotically stable). Theorem 3: if the first two assumptions of Theorem 2 are satisfied and furthermore: $N = 0$; $\Phi = Q(t, y) + R(t, x) + S(t, x) + M(t, x, y)$, Q and R linear, $\|R\| \leq k \|x\|$, $S = M = 0$ for $x = y = 0$, $\|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)\| \leq A u^{1-\delta} \|u\|$, where f is any one of the functions L, M, S and $u = \sup\{\|x_1\|, \|y_1\|, \|x_2\|, \|y_2\|\}$, $1/u = \sup\{\|x_1 - x_2\|, \|y_1 - y_2\|\}$, $A > 0, \delta > 0$; if g is any one of the functions L or S, M and $x_i(s), y_i(s)$ are functions of a real parameter s having bounded derivatives, the derivative f_s of $f(t, x_i(s), y_i(s))$ exists and satisfies $\|f_s[t, x_1(s), y_1(s)] - f_s[t, x_2(s), y_2(s)]\| \leq A u^\delta (u \|u\| + u' \|u\|)$, where $u',$

$\Delta u'$ have similar definitions as $u, \Delta u$ but relative to x_1', y_1', x_2', y_2' ; if any solution of $\dot{z} = Q(t, z)$ satisfies $\|z(t)\| \leq \|z(t_0)\| \cdot g(t_0 - t)$ for $t_0 < t < 0$, where g is a polynomial; then the stability character of the solution $x = y = 0$ of (1) is the same as for (2):

$$\dot{y} = Q(t, y) + M[t, x, y + z(t, x)] - M[t, x, z(t, x)]; \quad \dot{x} = P(t, x) + L[t, x, y + z(t, x)],$$

where z is a certain function satisfying $\|z(t, x)\| \leq C(\|x\|)$.

J. L. Massera.

Hosszú, Miklos: On the functional equation of transitivity. *Acta Sci. math.* **15**, 203—208 (1954).

Nach den Arbeiten von A. R. Schweitzer [Bull. Amer. math. Soc. **18**, 160—161, 299—302 (1912); **24**, 371 (1918)], M. Ward [Trans. Amer. math. Soc. **32**, 520—526 (1930)] und P. Lorenzen (dies. Zbl. **22**, 206) gibt Verf. eine noch allgemeinere Behandlung der Funktionalgleichung (1) $F[F(x, t), F(y, t)] = F(x, y)$ und behandelt auch die Verallgemeinerung (2) $F_1[F_2(x, t), F_3(y, t)] = F_4(x, y)$. — Die Arbeit zerfällt in drei Teile. Der erste ist rein algebraisch (nur Kürzbarkeitsbedingungen), der zweite benützt elementar analytische (Stetigkeits- und Monotonie-) und der dritte auch stärkere analytische (Differenzierbarkeits-) Voraussetzungen. Es werden die folgenden Sätze bewiesen: 1. Ist in einer beliebigen Menge (1) erfüllt und $F(x, y)$ eine links-kürzbare Operation [d. h. $F(x, y_1) = F(x, y_2)$ nur, falls $y_1 = y_2$], so gibt es ein rechtsseitiges Einheitsselement e : $F(x, e) = x$, und F ist involutorisch: $F(x, x) = e$, ferner bildet diese Menge unter der inversen Operation $x = z \circ y$ von $z = F(x, y)$ eine Gruppe. 2. Für reelle Zahlen ist die allgemeinste stetige und streng monotone Lösung von (1) $F(x, y) = f^{-1}[f(x) - f(y)]$ mit beliebigem stetigen, streng monotonen f , dessen Inverse f^{-1} ist. 3. Das allgemeinste streng monotone und stetig derivierbare Lösungssystem von (2) ist $F_i(x, y) = f_i[g_i(x) - h_i(y)]$, wo die Beziehungen $f_1 = f_4, g_2 = g_4, g_3 = h_4, h_2 = h_3, f_2 = g_1^{-1}, f_3 = h_1^{-1}$ gelten.

J. Aczél.

Heinhold, J.: Zur Lösung gewisser Funktionalgleichungen. *Arch. der Math.* **5**, 414—422 (1954).

Soit l'équation fonctionnelle $f h f h \dots h f = g h g h \dots h g$ avec n fonctions f dans le premier membre et m fonctions g dans le second. Cette équation est résolue graphiquement par rapport à f sous les hypothèses: (i) $g(x)$ et $h^{-1}(x)$ sont continues et croissantes dans $-\infty < x < \infty$ et (ii) on a toujours $g(x) > h^{-1}(x)$. La considération analogue de la même équation est mentionnée, en considérant les f et g comme les connues et la h comme l'inconnue.

M. Hukuhara.

Ishiguro, Kazuo: Sur le problème de l'équation fonctionnelle. *Tôhoku math. J.*, II. Ser. **6**, 1—4 (1954).

Verf. behauptet, daß die allgemeinste meßbare Lösung von

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{mes} \{x | \theta(x + \varepsilon) \neq \eta(\varepsilon) + \theta(x)\} = 0$$

linear $|\theta(x) = a x + b|$ auf einer Menge von positivem Maß ist. Das Verständnis des Beweises, der durch Zurückführung auf $\theta(x + \varepsilon) = \theta(x) + \eta(\varepsilon)$ und $\eta(x + \varepsilon) = \eta(x) + \eta(\varepsilon)$ geschieht, wird durch mehrere Druckfehler und sprachliche Schwierigkeiten erschwert. Als Bemerkung wird eine von Shigeki Yano stammende Vereinfachung vorgeführt. Es mögen auch andere Vereinfachungen möglich sein.

J. Aczél.

Praktische Analysis:

Millington, G.: A note on the solution of the sextic equation. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **7**, 357—366 (1954).

Die reelle Gleichung $z^6 + a z^4 + b z^3 + c z^2 + d z + e = 0$ wird in zwei reelle bzw. konjugiert komplexe Gleichungen

$$(z^3 + \alpha z^2 + \beta_1 z + \gamma_1)(z^3 + \alpha z^2 + \beta_2 z + \gamma_2) = 0$$

zerlegt, die dann nach bekannten Methoden zu lösen sind. Der Ansatz $\gamma_{1,2} = (l \pm m)/2$, aus dem $\beta_{1,2} = (a + \alpha^2)/2 \pm (l - b)/2 \alpha$ folgt, liefert die drei Glei-

chungen (1) $l^2 = 4e + m^2$, (2) $x^3 + x(a + 2dl) - m(1 + bl) = 0$, (3) $m = (1/x)[((a + x^2/2)^2 - (l + \beta/2)x^2) - e]$, die iterativ, ausgehend von einem Schätzwert für m , durch Berechnung von l nach (1), von x aus (2) und eines verbesserten m aus (3) gelöst werden: die Lösung von (2) erfolgt dabei zweckmäßig nach der Newtonschen Methode, wobei i. a. bereits der erste Schritt hinreichend genau ist. Numerische Erfahrungen und allgemeine Betrachtungen zeigen die rasche Konvergenz des Verfahrens.

J. Weissinger.

Varoli, Giuseppe: Alcune osservazioni sul metodo di iterazione per la risoluzione approssimata delle equazioni. *Periodico Mat.*, IV, Ser. **32**, 70–76 (1954).

Ergänzende bzw. kritische Bemerkungen elementarer Art zu einer Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **39**, 125) bzw. zu Arbeiten anderer Autoren, ohne Bezugnahme auf die nichtitalienische oder nicht-finanzmathematische Literatur über das Iterationsverfahren.

J. Weissinger.

Dubrovskij, V. M.: Über die Iterationsmethode. *Uspechi mat. Nauk* **9**, Nr. 3 (61), 127–133 (1954) [Russisch].

The author establishes necessary and sufficient conditions for the convergence of the iteration method applied to the equation $x = f(x)$, where $f(x)$ is continuous in a certain interval of the x -axis, over which the graph of $f(x)$ cuts the line $y = x$ at least once. If $f(x)$ is monotonic increasing the iteration will always tend to a root $\alpha = f(x)$ over which the graph of $f(x)$ crosses the line $y = x$ from above. If $f(x)$ is monotonic decreasing, then the iteration is not convergent if and only if the graph of $f(x)$ possesses a pair of points symmetric with respect to this line. These facts become plausible from graphs. The results may be combined and thus be extended to non-monotonic continuous functions $f(x)$. [Reviewer's remark: These and similar results have also been obtained by W. A. Coppel in his (unpublished) thesis, Melbourne 1950.] The paper concludes with a short review of investigations by S. P. Pul'kin [Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **6**, 71–108 (1942); this Zbl. **40**, 21] and N. M. Gersevanov [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **31**, 835–836 (1941); **39**, 227–230 (1943); this Zbl. **41**, 70] with similar aims, where, however, assumptions are made concerning the differentiability of $f(x)$.

H. Schwerdtfeger.

Bodewig, E.: A practical refutation of the iteration method for the algebraic eigenproblem. *Math. Tables Aids Comput.* **8**, 237–240 (1954).

Verf. weist auf die Nachteile der Iterationsmethode zur Bestimmung der Eigenwerte von Matrizen hin und gibt ein Beispiel einer aus kleinen ganzen Zahlen gebildeten vierreihigen symmetrischen Matrix, bei welcher das Verfahren erstaunlich schlecht konvergiert.

H. Wielandt.

Lukaszewicz, J. and H. Steinhaus: On determining the „Centre of copper“ of a telephone network. *Zastosowania Mat.* **1**, 299–306, russische und engl. Zusammenfassgn. 307 (1954) [Polnisch].

The authors solve the problem of determining the optimal location of a telephone exchange, i. e. determining a point Q such that the sum of the distances r_i between the point Q and given points P_i (in which the distribution cabinets are placed), multiplied by positive numbers c_i (proportional to the cost of a unit of cable length), attains the minimum. The sought minimum of the function $\Phi(Q) = \sum c_i r_i$ can be determined by means of dynamical analogy. The function $-\Phi(Q)$ is the potential of the dynamical system presented. If the points P_i do not lie on a straight line, then the surface $z = \Phi(Q)$ is convex downwards and there exists exactly one minimum of the function $\Phi(Q)$. From the convexity of the potential results a new method of determining approximately the minimum of the function, namely by bounding with polygons the domain in which the sought minimum is to be found, as well as a method of estimating the minimum value of the function. Iteration constitutes a third method of determining the minimum of the function $\Phi(Q)$.

Autoreferat.

Blanc, Charles: Sur les formules d'intégration approchée d'équations différentielles. *Arch. der Math.* **5**, 301–308 (1954).

Um zu objektiven Wertmaßstäben für die Güte numerischer Verfahren zur Integration der gewöhnlichen Differentialgleichung $dX/dt = f(X, t)$, $X(t_0) = X_0$

zu kommen, berechnet Verf. die Varianz (im statistischen Sinn) des bei einem Verfahrensschritt gemachten Fehlers Y . Unter der Voraussetzung $EX(t) = 0$,

$EX(t)X(t+h) = r(h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda h} s(\lambda) d\lambda$ gilt für ein beliebiges lineares Funktional

LX einer Zufallsfunktion $X(t)$ $E(LX)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s(\lambda) |L e^{i\lambda t}|^2 d\lambda$. Indem der Fehler

Y als lineares Funktional der exakten Lösung aufgefaßt und die plausible Annahme $s(\lambda) = a^2/2\omega$ bzw. $s(\lambda) = 0$ für $|\lambda| \leq \omega$ bzw. $|\lambda| > \omega$ gemacht wird, läßt sich EY^2 berechnen. Für die Verfahren von Runge-Kutta und von Milne wird die Rechnung bis zu numerischen Resultaten im Bereich $0.1 \leq \omega h \leq 5$, $-0.2 \leq Ah \leq 0.2$ durchgeführt ($A = \int_0^1 \xi f(\xi) d\xi$); EY^2 hängt nur von den zwei Parametern ωh und Ah („Schrittkennzahl“) ab. Nach den Zahlenergebnissen wird EY^2 beim Milneschen Verfahren nur wenig durch Ah beeinflusst, während es beim Verfahren von Runge-Kutta mit $|Ah|$ stark anwächst. (Vgl. dies. Zbl. 48, 100.)

J. Weissinger.

Blanc, Ch.: Etude stochastique de l'erreur pour les formules d'intégration numérique d'équations différentielles. Verhdl. Schweizer. naturforsch. Ges. 133. Versammlung in Lugano 1953, 66 (1954).

Babkin, B. N.: Angenäherte Integration von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung nach der Methode von S. A. Čaplygin. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 18, 477—484 (1954) [Russisch].

In der Arbeit wird ein Verfahren zur Konstruktion oberer und unterer Näherungen für die Lösung eines Systems von Differentialgleichungen $y' = f(x, y, z)$, $z' = \varphi(x, y, z)$, $y(x_0) = y_0$, $z(x_0) = z_0$ angegeben. Während in einem Satz von Čaplygin Voraussetzungen über die Monotonie der Funktion f in bezug auf z und der Funktion φ in bezug auf y gemacht werden mußten, sind solche Einschränkungen bei dem Verfahren des Verf. nicht mehr nötig. Die Grundlage für die Konstruktion und die Konvergenz der Näherungen bildet ein Satz über Differentialungleichungen. Das Verfahren ist auch auf Systeme von mehr als zwei Differentialgleichungen erster Ordnung anwendbar.

W. Schulz.

Laasonen, Pentti: Über die Näherungslösungen der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. 12. Skand. Mat.-Kongr., Lund 1953, 176—182 (1954).

Das angegebene Verfahren bezweckt, auch die höheren Eigenwerte von $y'' + (\lambda - q(x))y = 0$ unter erträglichem Rechenaufwand mit praktisch brauchbarer Genauigkeit näherungsweise zu ermitteln. Hierzu wird die Gleichung in der Form $(y_1 p)' + p y = -p' y' p^2$, $p = |\lambda - q|$, geschrieben und die rechte Seite gleich null gesetzt. Die Näherungen λ_n^* , die man dann erhält, weichen von den exakten Eigenwerten λ_n um $|\lambda_n - \lambda_n^*| = O(\lambda_n^{-1}) = O(n^{-2})$ ab, und dieselbe Abschätzung gilt für die Abweichung der zu λ_n^* gehörigen Näherungsfunktion von der zu λ_n gehörenden Eigenfunktion. In dem angegebenen Beispiel $y'' + \{\lambda - \frac{3}{8}(1 - 3x^4)^2\}y = 0$, $y(0) = y'(1) + 6y(1) = 0$ ist $\Delta\lambda_2 = 10^{-2}$, $\Delta\lambda_3 = 4 \cdot 10^{-4}$ und $\Delta\lambda_4 < 10^{-4}$, während der kleinste Eigenwert nicht approximiert wird.

E. Kreyzig.

Adachi, Ryuzo: On the numerical solution of the second order differential equation under some conditions. Kumamoto J. Sci., Ser. A. 1, Nr. 3, 14—33 (1954).

Die gestellte Aufgabe lautet folgendermaßen: Gesucht wird eine Lösungskurve $y(x)$ einer gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung $y'' = f(x, y, y')$, die zwei vorgegebene Kurven $y_i(x, y) = 0$ ($i = 1, 2$) so schneidet, daß in den Schnittpunkten X_i, Y_i zwischen diesen Koordinaten und den Tangentenrichtungen $P_i (= y'$ für $x = X_i, y = Y_i$) bestimmte Bedingungen $g_i(X_i, Y_i, P_i) = 0$ bestehen. Von einer geeignet gewählten Kurve $y_1(x)$ ausgehend wird durch jeweiliges Einsetzen in die Differentialgleichung und die vier Bedingungsgleichungen eine Funktionenfolge $y_n(x)$ konstruiert, bis sich die Lösungen nicht mehr ändern. Die Schwierigkeit be-

steht in der Auflösung der vier Bedingungsgleichungen nach den auftretenden Integrationskonstanten. Daher beschränkt sich der Verf. auf sechs einfachere Sonderfälle, die im einzelnen diskutiert werden. Einige Beispiele werden ausführlich (mit Zahlentabellen) durchgerechnet. Auch die nachfolgende Betrachtung über den Konvergenzbereich bei diesem Iterationsverfahren wird in den Einzelfällen durchgeführt.

H. Molitz.

Adachi, Ryuzo: On the numerical solution of the simultaneous differential equations under some conditions. I. Kumamoto J. Sci., Ser. A 1, Nr. 4, 28—30 (1954).

Diese Arbeit, die noch fortgesetzt werden soll, stellt eine Erweiterung der oben referierten Arbeit des gleichen Verf. auf drei gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung dar, deren Lösungen $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$ drei vorgegebene Kurven unter bestimmten Bedingungen schneiden sollen. Auch hier wird das analoge Iterationsverfahren auf einfache Fälle beschränkt.

H. Molitz.

Bilharz, Herbert und Stefan Schottlaender: Periodische Lösungen einer gegebenen Bewegung. Arch. der Math. 5, 479—491 (1954).

Angabe eines analytischen Rechenverfahrens zur Auffindung der periodischen Lösungen für Regelvorgänge mit Sättigung (gemischt aus linear-nichtlinear), die bisher im wesentlichen mit graphischen Verfahren behandelt wurden. Nach Diskussion der Differentialgleichung der stetigen Regelung mit I -Regler wird gezeigt, daß die Anfangswerte x_0 , x'_0 des Regelvorganges in der Phasenebene (x, x') innerhalb einer Ellipse liegen müssen, falls der Vorgang sich ganz im linearen Gebiet abspielen soll. Periodische Lösungen für den gesättigten Zustand werden bestimmt und in der (x', x'') -Ebene aufgetragen. Für den allgemeinen Fall des linear-nichtlinearen Verhaltens werden in der Ebene der Reglerparameter Gebiete für die Anzahl der periodischen Lösungen angegeben.

W. Oppelt.

Daugavet, I. K.: Eine Anwendung der allgemeinen Theorie der Näherungsmethoden auf die Untersuchung der Konvergenz der Galerkinschen Methode für einige Randwertaufgaben der mathematischen Physik. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 98, 897—899 (1954) [Russisch].

Es sei B ein Gebiet des m -dimensionalen Raums mit genügend glattem Rand Γ und $T = (t_1, t_2, \dots, t_m)$ ein Punkt des Raums. Für die Aufgabe $\Delta x = \lambda a(T) x(T) = y(T)$ für $T \in B$ und $x(T) = 0$ für $T \in \Gamma$ wird eine Lösung von der Form

$$x_n = \sum_{k=0}^n \sum_{k_1 + \dots + k_m = k} c_k^{(k_1, \dots, k_m)} \Omega(T) t_1^{k_1} \dots t_m^{k_m}$$

gesucht, wobei $\Omega(T)$ auf Γ verschwindet und im Innern von B nicht verschwindet, $\text{grad } \Omega(T) \neq 0$ für $T \in \Gamma$ ist und $\Omega(T)$ in \bar{B} genügend oft differenzierbar ist. Verf. berichtet ohne ausführliche Beweise über die Ergebnisse seiner Leningrader Diplomarbeit, in der er für die obige Aufgabe Fragen der Konvergenz und gleichmäßigen Konvergenz behandelt.

W. Schulz.

Cornock, A. F.: The numerical solution of Poisson's and the bi-harmonic equations by matrices. Proc. Cambridge philos. Soc. 50, 524—535 (1954).

Die zu $v_{xx} + v_{yy} + f(x, y) v = g(x, y)$ und gegebenen Randwerten von v auf dem Rande eines Rechtecks mit den Seiten $(N+1)h$ und $(P+1)h$ (mit h als Gittermaschenweite, N, P ganzzahlig) gehörigen gewöhnlichen Differenzengleichungen lassen sich bei zeilenweiser Durchnummerierung der Unbekannten in übersichtlicher Matrizenform anschreiben und durch Vormultiplikation mit einer leicht berechenbaren Matrix auf eine neue Form mit einer fast dreieckförmigen Matrix bringen: diese enthält „links oben“ eine $N \times N$ -Matrix und sonst oberhalb der Hauptdiagonale nur Nullen. Man hat dann also nur ein Gleichungssystem mit N Unbekannten aufzulösen und die übrigen Unbekannten durch Einsetzen zu ermitteln. Ähnlich geht es bei der 3-dimensionalen Poissonschen Gleichung. Bei nicht-recht-

eckförmigen Bereichen ist die Methode auch durchführbar, wird aber verwickelter. Bei der Plattengleichung wird als Beispiel ein Rechteckbereich gewählt, bei anderen Bereichen wird die Methode mühsam. *L. Collatz.*

Mitchell, A. R.: Round-off errors in relaxational solutions of Poisson's equation. Appl. sci. Research, B. 3, 456—464 (1954).

Von der gewöhnlichen Differentialgleichung $q'' + kq = f$ ausgehend entwickelt Verf. ein Verfahren zur Bestimmung der Rundungsfehler, wie sie bei der näherungsweise Auflösung gewisser Differenzengleichungen durch Relaxation auftreten. Wird die ersterwähnte Differentialgleichung in üblicher Weise durch die Differenzengleichung (1) $[1/(\Delta x)^2] \{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}\} + kq_n = f_n$ ersetzt, und ist die n -te der Gleichungen dieses Systems bis auf R_n erfüllt, so genügen die Rundungsfehler ε_n der q_n dem System (2) $\varepsilon_{n+1} - \{2 - k[L_i(N+1)]^2\} \varepsilon_n + \varepsilon_{n-1} = R_n$, $n = 1, 2, \dots, N$. Nach D. E. Rutherford (dies. Zbl. 46, 10) kann die Lösung dieses Systems explizit angegeben werden. Ist $k < 0$, dann sind die ε_n beschränkt, ist $k > 0$, dann sind die ε_n im allgemeinen nicht beschränkt. — Dieses Ergebnis wird auf die erste Randwertaufgabe der elliptischen Differentialgleichung $\Delta u = f(x, y)$ übertragen. Wird die letztere unter Zugrundelegung eines rechteckigen Gebietes und eines rechteckigen Gitters durch eine entsprechende Differenzengleichung ersetzt, und sind die Reste R_{mn} dieser Gleichungen gleichmäßig beschränkt, so genügen die Rundungsfehler ε_{mn} einem System linearer Gleichungen, dessen Lösung ebenfalls in geschlossener Form angegeben werden kann. Es wird gezeigt, daß ε_{00} bei konstantem $\Delta x/\Delta y$ mit zunehmender Zahl der Gitterpunkte unbegrenzt wächst.

W. Quade.

Shenton, L. R.: Inequalities for the normal integral including a new continued fraction. Biometrika 41, 177—189 (1954).

The ratio $R(t) = \int_i^\infty \frac{\exp(-x^2/2) dx}{\exp(-t^2/2)}$ is approximated by the continued fraction

$$R(t) = t \left[1 + t^2 \left[-3 + 2t^2 \left[5 + 3t^2 \left[-7 + 4t^2 \left[+9 + \dots \right] \right] \right] \right] \right],$$

which converges rapidly. The accuracy of the approximation is discussed and compared with the accuracy of earlier used approximations.

H. Bergström.

Bühler, Hansruedi: Bestimmung der Übergangsfunktion eines Regelkreises aus dessen Frequenzgang. Z. angew. Math. Phys. 5, 420—425 (1954).

Bei der Zerlegung der Umkehrformel der Laplace-Transformation [in der modifizierten Form $F(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$] in Real- und Imaginärteil treten die

Integrale $\frac{2}{\pi} \int_0^\infty u(\lambda) \left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\} \lambda t d\lambda$ auf. Zu ihrer Auswertung wird die Funktion $u(\lambda)$

durch eine Summe von Funktionen $q_i(\lambda)$ approximiert, für die diese Integrale geschlossen gelöst werden können. Eine beigelegte Tabelle gibt zehn solche Funktionen mit ihren Lösungen an. Ein Beispiel soll die praktisch ausreichende Güte dieses Näherungsverfahrens zeigen.

H. Molitz.

Zbornik, Josef: Asymptotische Entwicklungen für Fresnelsche Integrale und verwandte Funktionen und ihre Anwendungsmöglichkeiten bei der Berechnung spezieller Raketenbahnen. Z. angew. Math. Phys. 5, 345—351 (1954).

Das Integral $\int_0^x e^{-t(k-i)} t^{-1/2} dt$ ($i^2 = -1$) soll für $0 \leq k \leq 1$ und $x \geq 10$ ausgewertet werden (Aufspaltung in Real- und Imaginärteil liefert für $k = 0$ die Fresnelschen Integrale). Durch fortlaufende partielle Integration wird eine asymptotische Entwicklung für große x gefunden. Eine Abschätzung des Restglieds zeigt,

daß man für $10 \leq x \leq 20$ mit 5, für $x > 20$ mit nur 3 Reihengliedern auskommt, wenn eine Genauigkeit von $\pm 2 \cdot 10^{-4}$ verlangt wird. *K. Nickel.*

Sgarbazzini, Carlo: Visione sintetica della „nomografia“. *Archimede* 6, 150—155 (1954).

Nikolaev, P. V.: Über die binäre Anamorphose von N -rationalen Gleichungen. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* 97, 601—604 (1954) [Russisch].

Verf. stellt Bedingungen auf für die Anamorphose der Funktion (1) $F(t, \tau) = F(t_1, \tau_1; t_2, \tau_2; t_3, \tau_3) = 0$ in der Form $\Phi(t, \tau) = [f_{11}(t, \tau_1) \cdot f_{12}(t, \tau_1) \cdot f_{13}(t, \tau_1)]$, wobei (2) $\Phi(t, \tau) = \Psi_3(t, \tau) F(t, \tau)$ und $\Psi_3(t, \tau) = \Psi_3(t_1, \tau_1; t_2, \tau_2)$ ist: Ist $F(t, \tau)$ eine N -rationale Funktion der Dimension 3 (s. Verf., dies. Zbl. 52, 356) in bezug auf (t_3, τ_3) , so läßt (1) dann und nur dann einen Faktor Ψ_3 zu, wenn der Rang der A -Matrizen $T^{(13)}$ und $T^{(23)}$ gleich 2 ist. Dieser Faktor Ψ_3 ist bestimmt bis auf ein Produkt $\Psi_1(t_1, \tau_1) \Psi_2(t_2, \tau_2)$. Gilt $F(t, \tau) = \sum_{k=1}^2 q_{3k} F_k = \sum_{i,j=1}^{r_1, r_2} \sum_{k=1}^2 q_{1i} q_{2j} q_{3k} a_{ijk}$, so läßt (1) dann und nur dann einen Faktor $\Psi_3(t, \tau)$ zu (der auch trivial sein kann), wenn die Hilfsgleichung $F(t, \tau) - \hat{f}(t, \tau) = 0$ der Dimension bez. (t_3, τ_3) ihn zuläßt; dabei ist $\hat{f}(t, \tau)$ von der Form $q_{33} F_3 = q_{33} \sum_{i,j=1}^{r_1, r_2} a_{ij3} q_{1i} q_{2j}$. Die a_{ijk} werden aus einem System linearer, homogener Gleichungen bestimmt. Daraus folgt, daß die binäre Gleichung vierter N -Ordnung (1) vom Typ $[2; 2; 3]$ im wesentlichen einen eindeutigen, einfachen A -Faktor, nämlich von der Gestalt $\Psi_3(t, \tau)$, zuläßt. Für die Überführung der gegebenen Funktion auf eine N -rationale Form $F(t, \tau) = \sum_{i,j,k=1}^{r_1, r_2, r_3} a_{ijk} f_{1i} f_{2j} f_{3k}$ wird ein Algorithmus angegeben. *R. Ludwig.*

Erismann, Theodor: Theorie und Anwendungen des echten Kugelgetriebes. *Z. angew. Math. Phys.* 5, 355—388 (1954).

Angeregt durch die Beschäftigung mit dem in den Amslerschen Instrumenten angewandten Kugelintegrermechanismus, behandelt Verf. diesen Mechanismus theoretisch. Er besteht aus einer einzigen nicht deformierbaren Kugel, die von mehreren Rollen so gehalten wird, daß eine jede die Kugel nur in einem Punkt so berührt, daß bei Bewegung der Mittelpunkt der Kugel seine Lage nicht ändert, der Abstand zwischen ihm und den Rollennachsen konstant bleibt und zwischen Kugel und Rollen keine Gleitbewegung auftritt. Die Rollen können entweder feste Rollen oder Steuerrollen, deren Drehachse um eine mit ihr homoplane Achse durch den Kugelmittelpunkt schwenkbar ist, oder auch Schlepprollen sein, deren Achse um eine durch den Kugelmittelpunkt gehende, mit ihr nicht homoplane Achse schwenkbar ist. Das Verhalten der Kugel und der einzelnen Rollenarten wird zunächst beim idealen Kugelgetriebe untersucht, bei dem das Material der Kugel und der Rollen unendlich hart ist, homoplane Rollen exakt homoplan und übertragbare Drehmomente stets größer als tatsächlich auftretende sind. Sodann wird das technische Kugelgetriebe behandelt, bei dem die drei oben angeführten Bedingungen nur angenähert erfüllt sind. Diese Überlegungen haben den Zweck, Kriterien für die Güte der Näherung zu finden und Richtlinien für die optimale Ausnützung zu gewinnen. Die aufgestellten Theorien werden nun auf eine große Zahl von wirklich konstruierten Apparaten angewendet, wie den Kugelintegrator von Hele-Shaw und den von Amster, den Schlepprollendifferentiators usw., und es wird deren Wirkungsweise in Rechengetrieben, Schwingungsfiltern, Nachlaufsteuerungen, stufenlos regulierbaren Leistungsgetrieben usw. behandelt. Ferner werden darüber hinausgehende Anwendungsmöglichkeiten besprochen. *Fr.-A. Willers.*

Lowe, J. R.: The A. D. E. photo-electric integrator. *Nature* 173, 1222—1223 (1954).

Maxfield, J. E.: A useful technique in programming for analog computers. *Math. Tables Aids Comput.* 8, 233—234 (1954).

In Integrieranlagen, die keine besonderen Funktionsgeber enthalten, bereitet die Lösung komplizierterer Differentialgleichungen $\hat{f}(y, y', y'', \dots, x) = 0$ oft Schwierigkeiten, besonders wenn gebrochene Exponenten vorkommen. Parametrische Transformationen, z. B. $x = e^t$, können erhebliche Vereinfachung bringen. Die Aufzeichnung der Lösungskurve erfolgt dann über e^t , nicht t . *Ambros Speiser.*

Dahlquist, Germund: Die Monte-Carlo-Methode. Nordisk mat. Tidskrift 2, 27—43 (1954) [Schwedisch].

Wilkinson, J. H.: The calculation of the latent roots and vectors of matrices on the Pilot model of the A. C. E. Proc. Cambridge philos. Soc. 50, 536—566 (1954).

Verf. erörtert die wichtigsten iterativen Verfahren zur Bestimmung der Eigenwerte von Matrizen höherer Reihenzahl im Hinblick auf ihre Eignung für Hochgeschwindigkeitsrechenmaschinen. Besonders eingehend untersucht er die Frage der Gestaltung der Rechenprogramme für solche Maschinen, die nur über einen kleinen Hochgeschwindigkeitsspeicher verfügen. *H. Wielandt.*

● **Tafeln des Integral-Sinus und -Cosinus.** (Akad. Nauk SSSR. Inst. točnoj Mech. i vyčislit. Techn. Mat. Tabl.) Moskau: Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR 1954. 473 S. R. 43,75 [Russisch].

Die vorliegenden Tafeln enthalten die Werte der Funktionen $\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$,

$\text{Ci}(x) = - \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt$ für $0 \leq x \leq 100$. Die Schrittlänge ist: 0,0001 für $0 \leq x \leq 2$,

0,001 für $2 \leq x \leq 10$, 0,005 für $10 \leq x \leq 100$. Für $x = 0$ hat $\text{Ci}(x)$ eine logarithmische Singularität, und es sind auch die Werte von $\text{Ci}(x) - \ln x$ für $0 \leq x \leq 0,0099$ mit der Schrittlänge 0,0001 tabelliert. Die Werte sind mit einem Fehler von höchstens $6 \cdot 10^{-8}$ berechnet. Es finden sich auch Hinweise auf die Interpolation mit Angaben über die zu erreichende Genauigkeit und einige Hilfstafeln für die Interpolation. *K. Prachar.*

● **Karpov, K. A.:** Tafeln der Funktionen $w(z) = e^{-z^2} \int_0^z e^{x^2} dx$ im Komplexen.

– Beiheft dazu: **Tafeln der Koeffizienten der Lagrangeschen Interpolationsformel.** Moskau: Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR 1954. 536, 79 S. R. 61,— [Russisch].

Das 536 Seiten starke Tafelwerk enthält die Werte der obigen Funktion $w(z) = u(\varrho, \theta) + i v(\varrho, \theta)$ (ϱ, θ -Polarkoordinaten). Die Werte von Realteil u und Imaginärteil v sind auf 5 Dezimalen genau berechnet, und zwar für die Werte der Variablen ϱ, θ aus dem Bereich $0 \leq \theta \leq \pi/4$, $0 \leq \varrho \leq 5$, sowie bei reellem z für $0 \leq \varrho \leq 10$. Die Schrittlängen $1/\varrho$ für ϱ sind so gewählt, daß sie eine lineare Interpolation zulassen (z. B. $1/\varrho = 0,001$ in $\theta = 2,5^\circ$, $0 \leq \varrho \leq 2$ und $1/\varrho = 0,01$ in $\theta = 2,5^\circ$, $2 \leq \varrho \leq 5$). Die Schrittlängen für θ sind ebenfalls verschieden, je nachdem, welchem Bereich ϱ und θ angehören. Um eine entsprechende Genauigkeit bei der Interpolation nach θ (bei festem ϱ) zu erhalten, muß die Lagrangesche Interpolationsformel herangezogen werden, wobei zwischen 4 oder 5 Tafelwerten zu interpolieren ist. Ein Zusatzheft gibt sechsstellige Werte der Koeffizienten in dieser Interpolationsformel bei Schrittlängen von 0,001 der Länge der Grundschritte. Der Tafel ist eine Reliefskizze der Flächen $u(\varrho, \theta)$ und $v(\varrho, \theta)$ beigegeben.

K. Prachar.

● **Lotkin, M. and M. E. Young:** Table of binomial coefficients. Exact values. (Ballistic Research Laboratories Memo. Report No. 762.) Aberdeen Proving Ground 1954. 49 p. Mimeograph.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

● **Fisz, Marek:** Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe 1954. 374 S. zł. 31,50 [Polnisch]. This book is an university textbook on probability theory and mathematical statistics for

graduate students. It consists of two parts: probability calculus (pp. 5—184) and mathematical statistics (pp. 185—353). The book is supplied with many examples and exercises, statistical tables, bibliography and index. The first part of the book presents probability theory based on Kolmogorov's system of axioms. In chapter I, after introducing fundamental notions such as random event, certain and impossible event etc., the author presents axioms of probability calculus. We find the notion of conditional probability and Bayes theorem in this chapter also. (Chapter II is devoted to random variables (one- and multi-dimensional) and their distribution functions. Chapter III gives a survey of principal parameters of distribution functions. Chapter IV deals with characteristic functions. Chapter V is devoted to fundamental distribution functions such as binomial, Polya, Poisson, normal etc. Chapter VI deals with local and integral limit theorems and with weak and strong law of large numbers. Chapter VII, the first one of the second part of the book, is devoted to exact distributions of statistics such as χ^2 , t , z etc. Chapter VIII deals with asymptotic distributions, and special attention is paid to the distributions of order statistics. Chapter IX is devoted to the theory of parametrical and non-parametrical tests of significance, and chapter X deals with the theory of point- and interval-estimation. Chapter XI is devoted to schemes and methods of sampling, and chapter XII deals with analysis of variance. At the end, chapter XIII is devoted to the general theory of tests and chapter XIV deals with the foundations of Wald sequential analysis. — This brief survey of the content of the book points out, that it presents the main problems of probability calculus and mathematical statistics. A merit of the author is that he wrote his book with great clarity and, in the same time, without any concession at the cost of rigour. It must be stressed, that the author gave strict definitions of such notions which often are not strictly defined (e. g. random sample, statistic etc.). There are not many textbooks on probability calculus and especially on mathematical statistics written for students of mathematics. This fact and the merits of the book about which we told, make that Fisž's book is a valuable position in textbook literature.

W. Sudowski.

Segal, I. E.: Abstract probability spaces and a theorem of Kolmogoroff. Amer. J. Math. 76, 721—732 (1954).

Der Verf. verwendet als mathematisches Modell für die Wahrscheinlichkeitsrechnung an Stelle des sonst üblichen Merkmalraumes mit der Wahrscheinlichkeit als Maß (Wahrscheinlichkeitsraum) die Algebra \mathfrak{R} der beschränkten zufälligen Variablen mit dem Erwartungswert E als linearem Funktional, axiomatisch folgendermaßen definiert: \mathfrak{R} ist eine kommutative Algebra mit einer Einheit e über dem Körper der reellen Zahlen; E ist ein lineares Funktional über \mathfrak{R} mit $E(e) = 1$, $E(a^2) \geq 0$ und $E(a^2) = 0$ nur für $a = 0$; zu jedem $a \in \mathfrak{R}$ existiert eine Zahl μ , so daß $E(a^2 b^2) \leq \mu E(b^2)$ für jedes $b \in \mathfrak{R}$. Jede solche „Wahrscheinlichkeitsalgebra“ läßt sich eindeutig durch eine Algebra \mathfrak{R}' von beschränkten zufälligen Variablen im üblichen Sinne über einem Wahrscheinlichkeitsraum und durch den üblichen Erwartungswert darstellen, so daß das System der meßbaren Mengen den kleinsten Booleschen σ -Ring enthält, der die Urbilder Borelscher Zahlenmengen vermöge der Funktionen aus \mathfrak{R}' enthält. Als Anwendung wird der Kolmogoroffsche Satz über die Existenz eines Wahrscheinlichkeitsraumes \mathfrak{P} und einer Schar von zufälligen Variablen X_i (mit beliebigem Indexbereich) über \mathfrak{P} , so daß jedes System X_{i_1}, \dots, X_{i_n} die vorgegebene mehrfache Verteilung m_{i_1, \dots, i_n} hat, von reellwertigen auf verallgemeinerte zufällige Variable übertragen. Eine solche verallgemeinerte zufällige Variable X_i ist (der Betrachtung der Umkehrung eindeutiger im Merkmalraum erklärter Funktionen entsprechend) definiert als Homomorphie, die Einheit erhaltende Abbildung eines (ebenfalls von vornherein gegebenen) Booleschen σ -Ringes \mathfrak{B}_i in den Maßring von \mathfrak{P} , und die mehrfache Verteilung von X_{i_1}, \dots, X_{i_n} soll die Wahrscheinlichkeit (in \mathfrak{P}) von $\bigcap_{i=1}^n X_{i_i}(b_i)$ als Funktion der b_i in \mathfrak{B}_{i_i} bedeuten. Die Funktionen m_{i_1, \dots, i_n} sind dementsprechend in $\mathfrak{B}_{i_1} \cdot \dots \cdot \mathfrak{B}_{i_n}$ erklärt. — Den Abschluß bilden Bemerkungen über zufällige Variable mit Werten in linearen Räumen und über weitere Anwendungsmöglichkeiten.

K. Krickeberg.

Matschinski, Matthias: Sur les moyennes-tenseurs et sur leur application. C. r. Acad. Sci., Paris 239, 1457—1459 (1954).

Lukacs, Eugene and Edgar P. King: A property of the normal distribution. *Ann. math. Statistics* **25**, 389—394 (1954).

Es wird der folgende Satz bewiesen: Wenn X_1, X_2, \dots, X_n n unabhängig (aber nicht notwendig identisch) verteilte Zufallsvariablen sind, und das n -te Moment für jedes X_i existiert, so gibt es dann und nur dann zwei stochastisch unabhängige Linearformen $Y_1 = \sum_{s=1}^n a_s X_s$ und $Y_2 = \sum_{s=1}^n b_s X_s$, wenn A) jede Zufallsvariable, die in beiden Linearformen einen nicht verschwindenden Koeffizienten hat, normalverteilt ist; B) $\sum_{s=1}^n a_s b_s \sigma_s^2 = 0$ ist, wobei $\sigma_s^2 = \text{Varianz von } X_s$. Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von S. Bernstein [Sur une propriété caractéristique de la loi de Gauss, *Trans. Leningrad Polytechnic Institute* (1941)] und wurde, wie Verf. in einem Anhang bemerkt, in den letzten Jahren von verschiedenen Autoren (G. Darrois, B. V. Gnedenko, M. Loève) bewiesen. Im Beweis der Verf. wird eine Funktionalgleichung für die charakteristischen Funktionen gewonnen, aus dieser n Differentialgleichungen für die Kumulanten-erzeugenden Funktionen und schließlich die explizite Form der charakteristischen Funktion. Mit Hilfe eines Satzes von J. Marcinkiewicz (dies. Zbl. 19, 317) folgt die Notwendigkeit der Bedingung A), die übrigen Teile des Beweises folgen dann unmittelbar.

M. P. Geppert-O. Ludwig.

Lord, R. D.: The use of the Hankel transforms in statistics. II. Methods of computation. *Biometrika* **41**, 344—350 (1954).

Der Verf. hat 1954 gezeigt (dies. Zbl. 55, 122), daß für eine sphärische Verteilung s -dimensionaler stochastischer Vektoren X die folgenden Gleichungen für die charakteristische Funktion $\Phi(\varrho)$ und die Wahrscheinlichkeit $P(r) dr: r < |X| < v + dv$ gelten:

$$\Phi(\varrho) = \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) 2^{s/2-1} \int_0^\infty (v \varrho)^{-s/2+1} J_{s/2-1}(v \varrho) P(v) dv,$$

$$P(v) = 2^{-s/2+1} \left\{ \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \right\}^{-1} \int_0^\infty (v \varrho)^{s/2} J_{s/2-1}(v \varrho) \Phi(\varrho) d\varrho.$$

Der Verf. zeigt, wie $P(r)$ in Fourier-Bessel-Reihen entwickelt werden kann, wenn $P(r) = 0$ für $r \geq R$. Dazu bespricht er die Entwicklung von $P(r)$ und der Verteilungsfunktion $F(v)$ nach Laguerreschen Polynomen.

W. Saxer.

Zorua Teral, Procopio: Die Superposition von Zufallsvariablen und ihre Anwendungen. *Trabajos Estadist.* **5**, 3—65 (1954) [Spanisch].

Betrachtung einiger Probleme betreffend die Zuordnungen zwischen Zufallsvariablen mittels der entsprechenden Verteilungsfunktionen. Ihre Lösungsmöglichkeiten werden vom Verf. besprochen. Ein konkreter Aspekt dieser Probleme ist die Zerlegung einer Zufallsvariablen mit bekannter charakteristischer Funktion in die Summe von zwei Zufallsvariablen, die der Verf. durch die Benutzung der charakteristischen Funktion erreicht. Es werden auch einige Eigenschaften dargestellt, die sich durch Anwendung des Grenzüberganges auf Funktionen von Zufallsvariablen ergeben und die zu schon bekannten Folgerungen führen. *J. M^a. Orts.*

Ghurye, S. G.: Random functions satisfying certain linear relations. *Ann. math. Statistics* **25**, 543—554 (1954).

Consider a real-valued random vector function $X(t)$, defined and continuous in probability for all $t \geq t_0$. Suppose also that there exists a real-valued $p \times p$ matrix function $A(h)$ defined and continuous for $h \geq 0$ such that if $Y(n; h) = X(t_0 + nh) - A(h)X[t_0 + (n-1)h]$, then for any $h > 0$ and any integer N , the functions $X(t_0)$, $Y(1; h)$, \dots , $Y(N; h)$ are mutually independent. The author investigates the existence and the probability law of such $X(t)$.

S. Vajda.

Stanoyevitch, Tcheaslav: Sur une généralisation d'une inégalité de M. Kolmogoroff. C. r. Acad. Sci., Paris **239**, 854—856 (1954).

Nach einer scheinbar allgemeineren Schreibung der Kolmogoroffschen Ungleichung wird folgende Behauptung aufgestellt, die in manchen Fällen das starke Gesetz der großen Zahlen für unabhängige X_k mit Streuungen σ_k^2 und Erwartungswert Null verallgemeinert:

$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k = O(\varepsilon_n)$ mit Wahrsch. 1, falls $\sum \frac{\sigma_k^2}{n^2 \varepsilon_n^2} < \infty$,

ε_n monoton gegen Null, $\varepsilon_n < \frac{1}{2} \varepsilon_{n-1}$. (Im klassischen Fall $\varepsilon_n = 1$ steht allerdings o statt O .)

D. Morgenstern.

Kampé de Fériet, Joseph: Transformations de Reynolds opérant dans un ensemble de fonctions mesurables non négatives. C. r. Acad. Sci., Paris **239**, 787—789 (1954).

L'A. étudie les transformations de Reynolds opérant dans l'ensemble \mathfrak{M} des fonctions $f(x)$ à valeur réelles non négatives, définies sur un ensemble X , et mesurables par rapport à une σ -algèbre \mathfrak{F} de parties de X . Il montre que ces transformations sont complètement définies par la connaissance de TC_E , où C_E est la fonction caractéristique de $E \in \mathfrak{F}$. Il donne une condition nécessaire et suffisante pour que TC_E définisse une transformation de Reynolds sur \mathfrak{M} . Cette condition équivaut à la suivante: soit $\lambda_x(E) = TC_E$. Pour tout x fixé, λ_x définit sur \mathfrak{F} une mesure de probabilité, telle que $\lambda_x(E \cap F) = \lambda_x(E) \lambda_x(F)$, $E \in \mathfrak{F}$, $F \in \mathfrak{F}_T$, où \mathfrak{F}_T est la σ -algèbre des F tels que $TC_F = C_F$.

J. Bass.

Kampé de Fériet, Joseph: Construction des transformations de Reynolds régulières. C. r. Acad. Sci., Paris **239**, 934—936 (1954).

L'A., continuant l'étude des opérations T qu'il appelle transformations de Reynolds, montre comment on peut construire toutes les T régulières (c'est-à-dire telles que toute intersection d'ensembles T -idempotents soit un ensemble T -idempotent), opérant sur l'ensemble des fonctions $f(x)$ mesurables non négatives. Il définit la structure des mesures de probabilité λ_x telles que $Tf = \int_x f(y) d\lambda_x$ et donne deux exemples.

J. Bass.

Arbault, Jean: Sur les transformations de Reynolds quasi régulières. C. r. Acad. Sci., Paris **239**, 949—951 (1954).

Zolotarev, V. M.: Über eine Aufgabe aus der Theorie der verzweigten zufälligen Prozesse. Uspechi mat. Nauk **9**, Nr. 2, 147—156 (1954) [Russisch].

Der Autor betrachtet ein altersunabhängiges System, wie es z. B. bei Harris, dies. Zbl. **45**, 77 behandelt wird. Es sei v_t die Anzahl der Teilchen zur Zeit t und $\eta = \sup_{t \geq 0} v_t$. Es wird die bedingte Verteilungsfunktion $F_k(x)$ von η untersucht unter der Hypothese, daß der Prozeß degeneriert, d. h. die Teilchen „aussterben“, und mit k Teilchen startet. Es sei $b_1 = - \sum_{i=1}^{\infty} b_i$ (in dies. Zbl. l. c. muß es

$r = 0, 2, 3, \dots$ statt $r = 1, 2, \dots$ heißen) und $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i$. Mit q bezeichnen wir die kleinste nicht negative Wurzel von $f(z)$. Es gilt $F_k(n) = u_{n-k} q^k u_n$, wobei u_i durch $\sum_{i=0}^{\infty} u_i z^i = \frac{b_0}{f(z)}$ (in $|z| < q$) definiert ist. Wenn $f'(1) = m \neq 0$ ist, dann hat man $k \leq E(\eta) \leq -k b_0 q m$. Falls $m = 0$, dann ist $E(\eta) = \infty$. Zieht man noch die größte positive Wurzel von $f(z)$ in Betracht, dann ergibt sich für $n \rightarrow \infty$ eine asymptotische Abschätzung von $1 - F_k(n)$, welche wieder die Fallunterscheidung $m \neq 0$ und $m = 0$ erfordert.

L. Schmetterer.

Dantzig, D. van and C. Scheffer: On arbitrary hereditary time-discrete stochastic processes considered as stationary Markov chains, and the corresponding general form of Wald's fundamental identity. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* **57**, 377—388 (1954).

The object of the present paper is to prove that an arbitrary time-discrete stochastic process over a sequence of arbitrary sets is equivalent to a stationary Markov chain in the corresponding set of all finite paths. In a previous paper one of the authors' proved a generalization of Wald's fundamental identity to stationary Markov chains with discrete time parameter in arbitrary sets and partial generalization of the same to arbitrary time-discrete stochastic processes. The present paper removes a restriction on the generality. (Extract from the authors' introduction.) *S. Vajda.*

Domb, C.: On multiple returns in the random-walk problem. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **50**, 586—591 (1954).

By the use of contour integrals of generating functions the author calculates the probability of return to the starting point after n steps in a random walk on a lattice, when the probabilities of all directions are equal. Jumps of several lattice points with given probabilities are also considered. For large n approximate formulae are suggested. *S. Vajda.*

Lévy, Paul: Le mouvement brownien à $n = 2p + 1$ paramètres. *C. r. Acad. Sci., Paris* **239**, 1181—1183 (1954).

Bei der n -parametrischen Brownschen Bewegung werden für die Mittelwerte auf konzentrischen Kugeln im Parameterraum für $n = 3$ und $n = 5$ Formeln angegeben, bedingte Wahrscheinlichkeiten und fast sichere p -malige Differenzierbarkeit (bei geradem n würden in den Formeln elliptische Integrale auftreten). Hinweis auf $n = \infty$. Ohne Beweise. *D. Morgenstern.*

Kac, M.: Signal and noise problems. *Amer. math. Monthly* **61**, Nr. 7, Teil 2, 23—26 (1954).

Davies, R. O. and J. W. Leech: The statistics of scaled random events. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **50**, 575—580 (1954).

Unabhängig voneinander treten pro Zeiteinheit durchschnittlich r Ereignisse (z. B. radioaktive Emissionen) auf, so daß die Anzahl x der im Zeitintervall t eintreffenden Ereignisse Poisson-verteilt sei $P(x; t) = N^x \exp(-N)/x!$ mit $N = rt$. Wird nun jedes n -te Ereignis registriert, so ist die Anzahl r der im Intervall t registrierten Ereignisse nicht Poisson-verteilt, und der entsprechende stochastische Prozeß ist nicht vom Markoff-Typ. Verf. bestimmt die Verteilung von r und ihre Moment-Erzeugende und gewinnt daraus explizite Formeln für die ersten vier Momente. Nach experimenteller Bestätigung der Ereignisse an einem Beispiel behandelt Verf. das Problem als Spezialfall eines allgemeineren, das an A. R. G. Owen [*Proc. roy. Soc. London, Ser. B* **136**, 67—94 (1949)] und C. Domb (dies. Zbl. **38**, 92) anknüpft. *M. P. Geppert.*

Krishna Iyer, P. V. and M. N. Kapur: Probability distributions arising from points on a line. *Biometrika* **41**, 553—554 (1954).

Wishart, John: The factorial moments of the distribution of joins between line segments. *Biometrika* **41**, 555—556 (1954).

Mack, C.: The expected number of clumps when convex laminae are placed at random and with random orientation on a plane area. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **50**, 581—585 (1954).

The author states and proves formulae for the expected number of clumps, the number of single laminae and the uncovered area under the conditions given in the title. For background and definitions see Armitage, this Zbl. **35**, 92. *S. Vajda.*

Statistik:

● Pearson, E. S. and H. O. Hartley (edited by): *Biometrika tables for statisticians*. Vol. I. Cambridge: University Press 1954. XIV, 238 p.

Das zweibändige Tafelwerk, von dem bisher Band 1 vorliegt, stellt die schon lange geplante und längst fällige, modernisierte Ausgabe des bewährten, ebenfalls zweibändigen grundlegenden Tafelwerkes von K. Pearson (*Tables for statisticians and biometricians*, Cambridge 1914 und 1931) dar. Der Stoff ist auf die beiden Bände so aufgeteilt, daß der vorliegende Band 1 die allgemeinen und häufiger benötigten Tafeln umfaßt, während Band 2 spezialisiertere Tafeln enthalten soll. Von den 54 Tafeln in Band 1 sind 12 unverändert aus dem genannten älteren Tafelwerk abgedruckt, 26 bereits in Einzelarbeiten der Zeitschrift „*Biometrika*“ publiziert, und 16 teils anderen Publikationen entnommen, teils neu berechnet. Ein Anhang gibt genaue Auskunft über Herkunft und Berechner der einzelnen Tafeln. Die 97 Seiten umfassende Einleitung enthält für jede Tafel die mathematische Definition der tabulierten Funktion und Interpolationsvorschriften; ferner für die inhaltlich zusammengehörenden Tafeln jeweils einen Abriß der zugrunde liegenden Theorie und ihrer gegenseitigen Beziehungen, und eine Erklärung ihrer Verwendung, illustriert an Zahlenbeispielen. Inhalt: I. Tafeln der Normalverteilung; II. Tafeln der aus der Normalverteilung abgeleiteten Verteilungen (χ^2 -, t -, F -, B -Verteilung, Verteilung des Korrelationskoeffizienten); III. Für Stichproben aus normal verteilter Population Verteilung der durchschnittlichen Abweichung und der Spannweite, der Extremwerte einer Stichprobe, Bartlett-Test, Prüfung auf Normalverteilung; IV. Tafeln betreffend Poisson-, Binomial-, hypergeometrische Verteilung; V. Tafeln bezüglich Pearson-Kurven-Typ, Spearmans und Kendalls Rangkorrelation, Orthogonalpolynome; VI. Hilfstafeln: n^2 bis n^7 und deren Summen, $n!$, $\log n!$, $1/n!$, $1/\sqrt{n}$, $1/n$; $\Gamma(1-p)$, $\log \Gamma(1-p)$, $1-p^2$, $1/\sqrt{1-p^2}$, $1/(1-p^2)$, $p/(1-p)$, $1/p(1-p)$, $p^2/(1-p)^2$; $\log_e x$; $\binom{n}{i}$. Während die klassischen Pearson-Tafeln konsequent die

Wahrscheinlichkeits-Integrale $P = \int_{-\infty}^x f(x) dx$ der betreffenden Verteilung für gegebene x tabulierten, sind hier überall, dem Muster R. A. Fishers folgend, auch umgekehrt die für die Test-Praxis wichtigeren Tafeln berechnet, in welchen zu gegebenen P die zugehörigen „Prozent-Punkte“ abzulesen sind. Beim Behrens-Fisher-Problem ist zwecks Vermeidung des dem Fisher-Sukhatme-Test zugrunde liegenden Fiducialgedankens der auf dem Confidenzbegriff beruhende Welch-Aspin-Test (Tafel 11) wiedergegeben. — Das neue Tafelwerk füllt zweifellos eine für den Statistiker und Biometriker empfindliche Lücke aus; es ist zu begrüßen, daß die schon lange Zeit vergriffenen Tafeln K. Pearsons, unter Beschränkung auf das Wesentliche, somit dem Statistiker wieder zugänglich gemacht worden und darüber hinaus zum Kristallisationspunkt für weitere wichtige Tafeln geworden sind, die den heutigen Bedürfnissen des Stochastikers entsprechen.

M. P. Geppert.

Kamat, A. R.: Moments of the mean deviation. *Biometrika* **41**, 541—542 (1954).

Nelder, J. A.: The interpretation of negative components of variance. *Biometrika* **41**, 544—548 (1954).

Steinhaus, H.: A dispersiometer. *Zastosowania Mat.* **1**, 321—328, russische und engl. Zusammenfassgn. 328, 328—329 (1954) [Polnisch].

Verf. beschreibt ein Instrument, mit dessen Hilfe die Streuung einer Stichprobe nach der Berechnung des Mittelwertes und der Abweichungen — ohne weitere Rechnung — erhalten werden kann. Das Verfahren beruht auf dem wiederholten Gebrauch des Pythagoräischen Satzes und geschieht durch Skalenablesung, Nadel-

stiche und Schieben einer mit einer rechtwinkligen Rinne versehenen Platte auf einem Tische. Der Apparat kann mit für vier verschiedene Stichprobenzahlen gültigen Skalen versehen werden. *K. Sarkadi.*

Goodman, Leo A. and William H. Kruskal: Measures of association for cross classifications. *J. Amer. statist. Assoc.* **49**, 732—764 (1954).

Roy, Purnendu Mohon: On the method of inversion in the construction of partially balanced incomplete block designs from the corresponding B. I. B. designs. *Sankhyā* **14**, 39—52 (1954).

Various conditions are given under which the inversion of a balanced incomplete block design (b. i. b. d.) results in a partially b. i. b. d. and the parameters of the latter are expressed in terms of those of the former. *S. Vajda.*

Robbins, Herbert: A remark on the joint distribution of cumulative sums. *Ann. math. Statistics* **25**, 614—616 (1954).

Oderfeld, J.: Distribution of the product of rational powers of independent random variables. *Zastosowania Mat.* **1**, 307—319, russische und engl. Zusammenfassgn. 319, 320 (1954) [Polnisch].

Verf. zeigt an zwei numerischen Beispielen ($z = X^{2/3}$, $Z = X/Y$), wie man die Verteilungsfunktionen-Tabelle der Funktion einer zufälligen Veränderlichen, oder mehrerer unabhängiger zufälliger Veränderlicher konstruieren kann, wenn die Verteilung der Grundvariablen numerisch gegeben ist. Es wurde in beiden Fällen die Tabelle der Renard-Zahlen ($10^{i/80}$, wo i ganz) anstatt der Logarithmentafel benützt. Ferner wird auf die Verallgemeinerung der Methode für den Fall $Z = X/Y$, und auch allgemeiner für den Fall $Z = X^\alpha Y^\beta U^\gamma$ hingewiesen. *K. Sarkadi.*

Nicholson, W. L.: A computing formula for the power of the analysis of variance test. *Ann. math. Statistics* **25**, 607—610 (1954).

The author derives a formula containing a double sum for the power of the analysis of variance test, when the denominator of F has an even number of degrees of freedom, $2b$ say. He also gives an approximate expression, and its uniform bound of error. The special cases $b = 1(1)5$ are evaluated in detail. *S. Vajda.*

King, E. P.: Optimum grouping in one-criterion variance components analysis. *J. Amer. statist. Assoc.* **49**, 637—639 (1954).

Jambunathan, M. V.: Some properties of beta and gamma distributions. *Ann. math. Statistics* **25**, 401—405 (1954).

Für die Γ -, B_1 - und B_2 -Verteilung: $(1/\Gamma(a)) e^{-x} x^{a-1}$, $0 \leq x < \infty$; $(1/B(a, b)) x^{a-1} (1-x)^{b-1}$, $0 \leq x \leq 1$; $x^{a-1} B(a, b) (1+x)^{a+b}$, $0 \leq x < \infty$; symbolisch $\gamma(a)$; $\beta_1(a, b)$; $\beta_2(a, b)$, werden mehrere bekannte Sätze und der neue Satz angegeben: Ist $u = (1+y)(1+x)$ β_1 -verteilt mit $(b-d, d)$, y β_2 -verteilt mit (a, b) und sind u und y unabhängig, so ist x β_2 -verteilt mit $(a+d, b-d)$. Diese Sätze werden angewandt zur Herleitung der Verteilung des „studentisierten“ D^2 [R. C. Bose und S. N. Roy, *Sankhyā* **4**, 19—38 (1938)] unter der Nullhypothese H_0 (Gleichheit entsprechender Populationsmittelwerte), welches im Falle zweier Stichproben aus p -dimensional normal verteilten Gesamtheiten dem $t^2 \cdot [(n_1 + n_2)/n_1 \cdot n_2]$ des Studentischen Mittelwertvergleiches entspricht. $(D_p)^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p s^{ij} d_i d_j$, wobei (s^{ij}) die inverse Matrix zu (s_{ij}) und $d_i = \bar{x}_i^{(1)} - \bar{x}_i^{(2)}$,

$$s_{ij} = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} \left\{ \sum_{r=1}^{n_1} (x_{ir}^{(1)} - \bar{x}_i^{(1)}) (x_{jr}^{(1)} - \bar{x}_j^{(1)}) + \sum_{r=1}^{n_2} (x_{ir}^{(2)} - \bar{x}_i^{(2)}) (x_{jr}^{(2)} - \bar{x}_j^{(2)}) \right\}$$

ist.) Unter H_0 ist $[n_1 n_2 (n_1 + n_2) (n - 2)] D_p^2 \beta_2$ -verteilt mit $(p, 2, (n - p - 1)/2)$.

M. P. Geppert-O. Ludwig.

Schäfer, Wilhelm: Das Mutungsproblem der Besetzungs-Verteilung. *Mitteil.-Bl. math. Statistik* **6**, 1—38 (1954).

In der Bakteriologie spielt bekanntlich eine wichtige Rolle die Wahrscheinlichkeit $w_{n,k}(s) =$

$c_{k,s} \cdot n! [(n-s)! n^k]$ dafür, daß k Kugeln, die zufallsmäßig n Fächern mit gleicher Besetzungswahrscheinlichkeit $1/n$ zugeteilt werden, in genau s verschiedene Fächer fallen, während die übrigen $n-s$ unbesetzt bleiben. Die in dieser Verteilung auftretenden, der Rekursionsformel $c_{k,s} = s \cdot c_{k-1,s} + c_{k-1,s-1}$ genügenden (u. a. auch bei der Umrechnung von gewöhnlichen in faktorielle Momente auftretenden) Stirling-Zahlen 2. Art tabuliert Verf. über die bereits vorliegenden exakten Tabellen von W. L. Stevens und R. A. Fisher und F. Yates (Statistical tables for biological agricultural and medical research, London 1938, Tafel 22) u. a. hinausgehend für $k = 1, 2, \dots, 100$ und $s = 1, 2, \dots, 32$ approximativ durch Angabe der ersten 6 Stellen. Während E. Krömholtz und W. Lorenz (Zentralbl. f. Bakteriol. 114, 138–153 (1929)) auf Grund der (unberechtigten) Annahme a priori gleich wahrscheinlicher k die Bayes-Wahrscheinlichkeit $w'_{k,s}(k) = w_{k,s}(s) \left(\sum_{k=1}^{\infty} w_{k,s}(s) \right)^{-1} = w_{k,s}(s) \cdot (n-s)/n$ für k bei gegebenem s ermitteln,

versucht Verf., diesen Ausdruck mittels seiner recht verwirrenden „Mutungs“-Begriffe zu begründen und zur Beurteilung des unbekannten k „Mutungsbereiche“ zu konstruieren. Die naheliegende und einwandfreie Pascalsche Deutung ist ihm entgangen. M. P. Geppert.

Abdel-Aty, S. H.: Approximate formulae for the percentage points and the probability integral of the non-central χ^2 distribution. Biometrika 41, 538–540 (1954).

Bartholomew, D. J.: Note on the use of Sherman's statistic as a test for randomness. Biometrika 41, 556–558 (1954).

Dixon, W. J.: Power under normality of several nonparametric tests. Ann. math. Statistics 25, 610–614 (1954).

Four non-parametric tests for the equality of means μ_i of two normal populations with equal variance are compared with the aid of tables for sample sizes 3, 4 and 5, various levels of significance, and $\delta = \mu_1 - \mu_2$, $\sigma = 0$ ($\frac{1}{2}$) 2 ($\frac{1}{2}$) 5. The tests are the „rank sum“, „median“, „maximum absolute deviation“ and „total number of runs“ tests. The author also tabulates „power efficiencies“, i. e. ratios of the sample size of the t -test to the sample size of the non-parametric test of equal power, for a given δ . S. Vajda.

Koroljuk, V. S.: Asymptotische Entwicklungen für die Verträglichkeitskriterien von A. N. Kolmogorov und N. V. Smirnov. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 95, 443–446 (1954) [Russisch].

$F(x)$ sei eine stetige Verteilungsfunktion, $S_n(x)$ und $T_m(x)$ die empirischen Verteilungsfunktionen einer Stichprobe vom Umfang n bzw. m aus einer nach $F(x)$ verteilten Grundgesamtheit. Die bekannten Sätze von Kolmogorov und Smirnov werden durch asymptotische Entwicklungen ergänzt, die in Sonderfällen schon Gnedenko, dies. Zbl. 46, 351 erhalten hat. Die — für aktuelle Untersuchungen der math. Statistik wichtigen — Ergebnisse lauten: Für $z = O((nm/N)^{1/6})$, $z > 0$, ganzes $p \leq 11$ und $N = m + n$ gilt:

$$1. W \left\{ \sqrt{\frac{nm}{N}} \sup_{-\infty < x < \infty} (T_m(x) - S_n(x)) < z \right\} = 1 - e^{-2z^2} \cdot \left[1 - \frac{nm}{N} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right) \frac{2z}{3} - \frac{m^2 + mn + n^2}{Nmn} \frac{2z^2}{3} \left(1 - \frac{2z^2}{3} \right) \right] + O \left[\left(\frac{m}{Nn} \right)^{3/2} z^p e^{-2z^2} \right].$$

$$2. W \left\{ \sqrt{\frac{nm}{N}} \sup_{-\infty < x < \infty} |T_m(x) - S_n(x)| < z \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 z^2} - \frac{m^2 + mn + n^2}{Nmn} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k^2 z^2}{3} \left(1 - \frac{2k^2 z^2}{3} \right) e^{-2k^2 z^2} + O \left[\left(\frac{m}{Nn} \right)^{3/2} z^p e^{-2z^2} \right].$$

Für $z = O[n^{1/6}]$ gilt:

$$3. W \left\{ \sqrt{n} \sup_{-\infty < x < \infty} (F(x) - S_n(x)) < z \right\} = 1 - e^{-2z^2} \left[1 - \frac{2z}{3\sqrt{n}} - \frac{2z^2}{3n} \left(1 - \frac{2z^2}{3} \right) \right] + O \left[\frac{z^p}{n^{3/2}} e^{-2z^2} \right].$$

$$4. W \left\{ \sqrt{n} \sup_{-\infty < x < \infty} |F(x) - S_n(x)| < z \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 z^2} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k^2 z^2}{3} \left(1 - \frac{2k^2 z^2}{3} \right) e^{-2k^2 z^2} + O \left(\frac{z^p}{n^{3/2}} e^{-2z^2} \right).$$

L. Schmetterer.

Bechhofer, Robert E. and Milton Sobel: A single-sample multiple decision procedure for ranking variances of normal populations. Ann. math. Statistics **25**, 273—289 (1954).

In einer früheren Arbeit (R. E. Bechhofer, dies. Zbl. **55**, 130) hatte einer der Verff. darauf hingewiesen, daß in vielen Fällen ein Test, der es gestattet, Entscheidungen über die Rangordnungen der Mittelwerte von normal verteilten Variablen zu treffen, der experimentellen Situation besser gerecht wird als der Homogenitätstest der Varianzanalyse, und die Theorie solcher Tests entwickelt. In der vorliegenden Arbeit werden analoge Tests für die Varianzen behandelt, die unter Umständen den Zielen des Experimentators besser angepaßt sind als der Bartlett-Test. Es seien X_{ij} unabhängig mit Mittelwert μ_i und σ_i normal verteilte Zufallsvariablen ($i = 1, \dots, k$; $j = 1, \dots, N_i$) mit μ_i bekannt, σ_i unbekannt. Die σ_i seien dem Range nach geordnet $\sigma_{[1]} \leq \sigma_{[2]} \leq \dots \leq \sigma_{[k]}$. Auf Grund einer Stichprobe von $N = \sum_{i=1}^k N_i$ unabhängigen

Beobachtungen sollen statistische Entscheidungen bezüglich der Rangordnung der σ_i getroffen werden; z. B. soll die „beste“ Gesamtheit, d. h. die mit $\sigma_{[1]}$ gewählt werden. Allgemeiner werden die folgenden Fälle betrachtet: I. Es sollen k Gesamtheiten in zwei Gruppen eingeteilt werden, die t besten und die $k - t$ schlechtesten, wobei innerhalb der Gruppen keine Rangordnung vorgenommen wird; II. Es sollen k Gesamtheiten in $t - 1$ eingeteilt werden, die t „besten“ geordnet, die $k - t$ schlechtesten ungeordnet. Die Wahrscheinlichkeiten dafür, die richtigen Rangentscheidungen zu treffen, werden durch Integralausdrücke gegeben, die sich in speziellen Fällen exakt auswerten lassen, und für große Stichproben werden gute Näherungen angegeben. Tafeln dieser Wahrscheinlichkeiten sind beigelegt für die fünf Spezialfälle: 1. $k = 2$, $t = 1$, $\theta_{2,1} = \theta$ ($\theta_{i,j} = \sigma_{[i]}^2 / \sigma_{[j]}^2$); 2. $k = 3$, $t = 1$, $\theta_{3,1} = \theta_{2,1} = \theta$; 3. $k = 3$, $t = 2$, Fall I, $\theta_{3,1} = \theta_{3,2} = \theta$; 4. $k = 3$, $t = 2$, Fall II, $\theta_{3,2} = \theta_{2,1} = \theta$; 5. $k = 4$, $t = 1$, Fall I, $\theta_{4,1} = \theta_{3,1} = \theta_{2,1} = \theta$. Hier ist $n_1 = n_2 = \dots = n_k = n$ vorausgesetzt, wobei n_i die Anzahl der Freiheitsgrade bei der Schätzung von σ_i ist.

M. P. Geppert-O. Ludwig.

Bechhofer, Robert E., Charles W. Dunnett and Milton Sobel: A two-sample multiple decision procedure for ranking means of normal populations with a common unknown variance. Biometrika **41**, 170—176 (1954).

Über k unabhängig voneinander normal verteilte Ausgangsgesamtheiten π_i ($i = 1, \dots, k$) mit unbekannten Mittelwerten μ_i und Varianzen $\sigma_i^2 = a_i \sigma^2$, aber bekannten a_i , soll auf Grund von Stichproben mit vorgegebener Irrtumswahrscheinlichkeit $1 - P$ entschieden werden, entweder (I) welches π_i das größte μ_i hat, oder (II) die Rangordnung der π_i nach der Größe von μ_i . Dieses mehrfache Entscheidungsproblem (für I existieren k , für II $k!$ mögliche Entscheidungen) lösen Verff. auf Grund eines Zwei-Stichproben-Verfahrens, bei welchem jedem π_i in der 1. Stichprobe $a_i N_0$ Elemente entnommen werden, während die 2. Probe in Abhängigkeit vom Resultat der ersten bestückt wird. Die Rangordnung der k Vereinigungsproben nach ihren Gesamtmittelwerten wird dann auf die unbekannten μ_i übertragen. Für $k = 2$ und $k = 3$ ist die für beliebige k angegebene formale Lösung auch rechnerisch zu bewältigen durch Benutzung von Tabellen der Student-Verteilung bzw. von Tabellen, die R. E. Bechhofer (dies. Zbl. **55**, 130) für das Ein-Stichproben-Verfahren zur Lösung des einfacheren Problems mit bekannten σ_i^2 berechnet hat. M. P. Geppert.

Méric, Jean: Étude de la formule de Walker donnant la fonction „O. C.“ du test binomial de Wald. C. r. Acad. Sci., Paris **239**, 1117—1119 (1954).

Walker [J. Roy. statist. Soc., Ser. B **12**, 301—307 (1950)] has derived the operating characteristic of a likelihood ratio sequential scheme for random sampling from infinite binomial populations. By a change of variables, the present author puts Walker's formula into a form which he says is more convenient for numerical calculations.

S. Vajda.

Walter, Edward: Über die Ausnutzung der Irrtumswahrscheinlichkeit. Mitteil.-Bl. math. Statistik **6**, 170—179 (1954).

Bei vielen Tests benutzt man Prüfmaße, die nur endlich vieler Werte fähig sind. Um auch bei solchen Tests das vorgegebene Signifikanzniveau α voll auszunutzen, schlägt Verf. vor, den Test, der ursprünglich lautete: H_0 verwerfen, wenn $y < y_0$; H_0 zulassen, wenn $y \geq y_0$, und der die zu kleine Irrtumswahrscheinlichkeit

$\alpha' < \alpha$ hat, dadurch zu verbessern, daß im Falle des Auftretens von $y = y_0$ ein zweites Prüfmaß y' benutzt wird. Es wird dann H_0 verworfen, wenn $y < y_0$ oder $y = y_0$ und $y' < y'_0$ ist. Dieser modifizierte Test hat die Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha' = \alpha_1 < \alpha$; ev. kann man das Verfahren fortsetzen. Dies wird für den Vorzeichen-test von R. A. Fisher zur Prüfung der Symmetrie bez. Null durchgeführt. Die Potenz (power) des Tests wird durch die Modifikation wesentlich gesteigert. Die kritischen Werte (y_0, y'_0, y''_0, \dots) des ein- und zweiseitigen modifizierten Vorzeichen-tests sind für $n \leq 25$ tabuliert.

M. P. Geppert-O. Ludwig.

Jaekel, K.: Statistische Prüfverteilungen endlicher Spannweite. Z. angew. Math. Mech. 34, 190—191 (1954).

Raj, Des: Truncated sampling from distributions admitting sufficient statistics. Sankhyā 14, 169—174 (1954).

Sundrum, R. M.: On the relation between estimating efficiency and the power of tests. Biometrika 41, 542—544 (1954).

Chowdhury, S. B.: The most powerful unbiased critical regions and the shortest unbiased confidence intervals associated with the distribution of classical D^2 -statistic. Sankhyā 14, 71—80 (1954).

Kamat, A. R.: Distribution theory of two estimates for standard deviation based on second variate differences. Biometrika 41, 3—11 (1954).

Distribution theory for $\sum (J^2 x_i)^2$ and $\sum J^2 x_i$ when the sample x_1, \dots, x_n is drawn from a normal parent population. Cf. this Zbl. 52, 155. G. Elfving.

Aitchison, J. and J. A. C. Brown: An estimation problem in quantitative assay. Biometrika 41, 338—343 (1954).

• Gumbel, E. J.: Statistical theory of extreme values and some practical applications. (National Bureau of Standards Appl. Math. Ser. 33.) Washington: Government Printing Office 1954. 51 p., 10 tables, 38 fig. 40 cents.

In vier Vorträgen umreißt Verf. die stochastische Theorie der Extremwerte in Stichproben und gewährt Einblick in die mannigfaltigen Anwendungen derselben auf praktische Probleme. Vortrag 1 befaßt sich einleitend mit den zum Verständnis des Folgenden notwendigen allgemeinen Grundsätzen und mit der Geschichte des Problemkreises und gibt eine Übersicht über die wichtigsten Anwendungsgebiete (Fluten, Ebben, Meteorologie, Orkane, Zerreißfestigkeit, Qualitätskontrolle, Extremalter, Aussterbezeit von Bakterienkulturen, Radioaktivität, u. a.). In Vortrag 2 untersucht Verf. die Eigenschaften der Verteilung

$$w(n, m, N, x) = \binom{n}{m} m \binom{N}{x} \left[(N + n) \binom{N + n - 1}{m + x - 1} \right] \quad (x = 0, 1, \dots, N),$$

d. h. die [sich aus der bekannten Verteilung des m -ten Stufwertes (order-statistic) einer Stichprobe durch Integration herleitende] Wahrscheinlichkeit dafür, daß in einer zweiten, N -gliedrigen Stichprobe der m -te größte Wert einer ersten, n -gliedrigen Stichprobe von genau x Werten überschritten werde. Ferner werden hier die Begriffe der Wiederkehr-Periode, $T(x) = [1 - F(x)]^{-1}$, und der „erwarteten Extreme“ u_n, u_1 , definiert durch $F(u_n) = 1 - 1/n$, $F(u_1) = 1/n$, entwickelt, wobei $F(x)$ die kumulative Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen x bedeutet. Sodann werden die bei Verwendung von auf Grund eines bekannten $F(x)$ konstruierten Wahrscheinlichkeitsnetzen auftretenden Schwierigkeiten erörtert, die Verf. dadurch löst, daß er den n aufsteigenden Beobachtungen einer Stichprobe, x_m ($m = 1, 2, \dots, n$), als Kumulativhäufigkeiten $m(n+1)$ (Erwartungswert des m -ten größten Stichprobenwertes) zuordnet; die Ausgleichung durch eine Gerade erfolgt nach der Methode der kleinsten Quadrate. In Vortrag 3 werden die exakten Verteilungen des Stichproben-Maximums x_n und -Minimums x_1 angegeben und sodann deren asymptotische Verteilungen untersucht mit Hilfe der Populations-Parameter $\alpha_n = n f(u_n)$, $\alpha_1 = n f(u_1)$ (mit $f(x) = dF(x)/dx$). Hierbei werden, je nachdem, ob α_n mit steigendem n konstant bleibt, monoton wächst oder fällt, drei Typen von Anfangs-

Verteilungen $F(x)$ unterschieden: 1. exponentieller Typ [z. B. $F(x) = 1 - e^{-x}$, Normal-, χ^2 -Verteilung, u. a.], 2. Cauchy-Typ, 3. endlich begrenzte Verteilungen. Für jeden Typ wird die asymptotische Verteilung $\Phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(x_n)$ von x_n bzw.

die von x_1 bestimmt. Für Typ 1 wird das Problem der Schätzung von u_n, x_n bzw. u_1, x_1 behandelt, ferner der Gedankengang auf den m -ten größten und m -ten kleinsten Wert der Stichprobe ausgedehnt. Anschließend wird die Anwendung geeigneter, auf Grund von $\Phi(x)$ konstruierter Wahrscheinlichkeitsnetze auf die N Maximalwerte x_n von N je n -gliedrigen Stichproben besprochen. Vortrag 4 befaßt sich ausführlich mit den eingangs erwähnten Anwendungen. Es folgt ein sehr umfangreiches Literaturverzeichnis, das u. a. eine stattliche Reihe einschlägiger eigener Arbeiten des Verf. enthält.

M. P. Geppert.

Freudenthal, A. M. and E. J. Gumbel: Minimum life in fatigue. *J. Amer. statist. Assoc.* **49**, 575—597 (1954).

Lieblein, Julius: Two early papers on the relation between extreme values and tensile strength. *Biometrika* **41**, 559—560 (1954).

Graf, Ulrich und Rolf Wartmann: Die Extremwertkarte bei der laufenden Fabrikationskontrolle. *Mittel.-Bl. math. Statistik* **6**, 121—139 (1954).

Verf. betrachten einige der wichtigsten Typen von Kontrollkarten, die sich zur Überwachung der Gleichmäßigkeit einer Serienfabrikation bewährt haben. Besonders wird die x_{\max} -, x_{\min} -Karte (J. M. Howell, dies. Zbl. **36**, 96) beschrieben. Die sog. Stichprobenkarte ist eine Weiterentwicklung der alten x_{\max} -, x_{\min} -Karte. Während diese die 3σ -Grenze zugrunde legte, obwohl die Verteilung von x_{\max} bei normal verteiltem x keine Normalverteilung ist, werden die Grenzen bei der Stichprobenkarte auf Grund der exakten Verteilung von x_{\max} festgelegt. Für die Stichprobenkarte wird die Potenzfunktion (power) untersucht für Abwandern des Mittelwertes, Zunehmen der Streuung und in Abhängigkeit vom erzeugten Ausschuß.

M. P. Geppert-O. Ludwig.

Masuyama, Motosaburo: On the problem of screening defective articles during production. *Sankhyā* **14**, 67—70 (1954).

Drobot, S. and M. Warmus: Dimensional analysis in sampling inspection of merchandise. *Zastosowania Mat.* **2**, 1—31 und russische und engl. Zusammenfassg. 31—32, 32—33 (1954) [Polnisch].

Gichman, I. I.: Markovsche Prozesse in Aufgaben der mathematischen Statistik. *Ukrain. mat. Žurn.* **6**, 28—36 (1954) [Russisch].

Verf. beabsichtigt, den engen Zusammenhang zwischen den Problemen der mathematischen Statistik einerseits und der Theorie der Markoff-Prozesse bzw. -Ketten andererseits zu illustrieren und zu zeigen, wie der Apparat der letzteren als mächtiges analytisches Instrument in der ersteren eingesetzt werden kann. Insbesondere bespricht er in der Theorie nichtparametrischer (verteilungsfreier) Verfahren bekannte Sätze über die Grenzverteilung der Kolmogoroff-Smirnoff-Kriterien, solche von Pietrowski, Kolmogoroff, Chintschin, Doob, Feller u. a. über die Grenzwahrscheinlichkeit von Ungleichungen für die Glieder von Markoff-Ketten, asymptotische Eigenschaften der Verteilung ähnlicher Ausdrücke bei Klassenbildung und Schichtung; sodann für den diskreten bzw. kontinuierlichen Fall Sätze über die Grenzverteilung einer Summe gegenseitig unabhängiger, der gleichen Verteilung folgender Summanden mit endlichen Momenten 2-ten Grades. Es folgt Ausdehnung auf den parametrischen Fall von Parameter-behafteten Verteilungen bestimmter Form $F(x, \theta)$ (vgl. I. I. Gichman, dies. Zbl. **52**, 143, 153). Weitere Abschnitte befassen sich, ausgehend von den von K. L. Chung und G. A. Hunt (dies. Zbl. **32**, 417) und K. L. Chung (dies. Zbl. **36**, 83) untersuchten Grenzverteilungen der Anzahl der Schnittpunkte einer stochastischen Funktion $\eta(t)$ mit einer Achsenparallelen $\eta = a$, mit verwandten Fragen bei Markoff-Prozessen und Markoff-Ketten.

M. P. Geppert.

Ghosh, M. N.: Asymptotic distribution of serial statistics and applications to problems of nonparametric tests of hypotheses. *Ann. math. Statistics* **25**, 218–251 (1954).

Bilden x_1, \dots, x_n eine Folge gegenseitig unabhängiger, der gleichen kontinuierlichen Verteilung $F(x)$ folgender Zufallsvariablen, so sind Reihen-Maßzahlen (serial statistics) definiert durch die Gleichung $S(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_{i+k-1})$, ($x_{n+j} = x_j$ für $j > 0$), wobei die f_i nur von $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}$, d. h. von den Beziehungen zwischen benachbarten Beobachtungen abhängen. Beispiele von Reihen-Maßzahlen sind Reihenkorrelation (serial correlation) [A. Wald und J. Wolfowitz, *Ann. math. Statistics* **14**, 378–388 (1943)] und „Abschnitte monoton auf- bzw. absteigender Werte“ (runs up and down) [J. Wolfowitz, *Ann. math. Statistics* **15**, 163–172 (1944)]. Verf. zeigt, daß die nicht-parametrische Verteilungsfunktion einer Reihen-Maßzahl, d. h. die bedingte Verteilung bei festen Stichprobenwerten, wenn nur Permutationen der Stichprobenwerte betrachtet werden, und die nichtparametrische Simultan-Verteilung mehrerer Reihen-Maßzahlen unter gewissen Bedingungen, unter denen sich stets die gleichmäßige Beschränktheit der absoluten Momente der f_i befindet, gegen ein- bzw. mehrdimensionale Normalverteilungen streben. Anwendungen auf Tests der Zufälligkeit einer Folge und ein stochastisch asymptotischer Ausdruck für die Potenz-Funktion (power function) werden gegeben, wenn die Alternativ-Hypothese ein Markoff-Prozess ist.

M. P. Geppert-O. Ludwig.

Marriott, F. H. C. and J. A. Pope.: Bias in the estimation of autocorrelations. *Biometrika* **41**, 390–402 (1954).

The authors select one of the existing definitions for the k -th serial correlation coefficient (i) when the mean is known and (ii) when it is unknown, and derive formulae for the first and second moment in samples from the moving average series $x_t = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$ and from the Markoff series $x_t = \rho x_{t-1} + \varepsilon_t$ ($|\rho| < 1$). The results are compared with a sampling investigation on artificial series, exhibited in a number of tables.

S. Vajda.

Kendall, M. G.: Note on bias in the estimation of autocorrelation. *Biometrika* **41**, 403–404 (1954).

Some more general results than those in the paper reviewed above were obtained by the author et al. and are given in this paper. They concern the expectations of serial correlation coefficients in a variety of processes and give biases to order n^{-1} .

S. Vajda.

Mittmann, Otfried M. J.: Betrachtungen zur Analyse empirischer Funktionen. *Z. angew. Math. Mech.* **34**, 37–43 (1954).

Verf. entwickelt ein Verfahren, die einer Beobachtungsreihe y_i innewohnende Gesetzmäßigkeit zu klären, ohne zunächst Hypothesen über den Funktionstyp der systematischen Komponente $E(y_i)$ zu machen. Er nimmt an, daß $y_i = E(y_i) + z_i$ gilt, wobei z_i eine normal verteilte Zufallsveränderliche ist. Über Selbstkorrelationsbetrachtungen gelangt er zu der These „daß die Grundvorstellung von der Zusammensetzbarkeit einer empirischen Funktion aus einer reinen Zufallsvariablen und einer durchgehenden systematischen Komponente als zu eng gefaßt angesehen werden muß“. An die Stelle der Vorstellung vom Wirken des Zufalls an unendlich vielen Stellen setzt er die Vorstellungen einer positiven Korrelation zwischen benachbarten Funktionswerten, anders gesagt einer „Erhaltungstendenz“, und von nur streckenweise geltenden systematischen Komponenten. Die Konsequenzen solcher Vorstellungen scheinen weittragend zu sein und einer eingehenden Diskussion zu bedürfen. Verf. erörtert die Durchführung seiner Gedanken mittels Entwicklung der empirischen Funktion nach den Funktionen eines frei gewählten vollständigen Funktionensystems.

P. Lorenz.

Sapogov, N. A.: Über die gegenseitige Lage der Regressionslinien. Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 3, 187—192 (1954) [Russisch].

Verf. gibt einen neuen, einfacheren Beweis für den folgenden Satz von O. V. Sarmanov (dies. Zbl. 30, 313): Es sei $\{X, Y\}$ eine zweidimensionale zufällige Veränderliche; es wird die Existenz von $M(X)$ und $M(Y)$ vorausgesetzt, ferner, daß $\inf M(|Y| | X = x) > 0$, $\inf M(|X| | Y = y) > 0$. Dann können die folgenden

Ungleichungen im Fall $x \geq A$, $y \geq B$: $|M(Y | X = x)| \geq c' |x|^\alpha$, $|M(X | Y = y)| \geq c'' |y|^\beta$, $\alpha, \beta > 1$, wo c' , c'' , A , B , α , β positive Zahlen sind, nicht gleichzeitig bestehen. Verf. zeigt, daß die bei Sarmanov angeführte Bedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, y)}{\varphi(x) \psi(y)} dx dy < \infty$$

zum Bestehen des Satzes nicht nötig ist. [$f(x, y)$ ist die Wahrscheinlichkeitslichtfunktion, $\varphi(x)$ und $\psi(y)$ sind die Randverteilungen.] Ferner wird — im Falle, daß die Varianzen von X und Y existieren — gezeigt, daß die beiden Ungleichungen $|M(Y | X = x)| \geq \Phi(|x|)$, $|M(X | Y = y)| \geq \Psi(|y|)$, wo $\Phi(x)$ eine monoton wachsende, konvexe, stetige Funktion ist, außerdem $\Phi(0) = 0$ und $\Psi(y)$ die inverse Funktion von $\Phi(x)$ ist, für alle Werte von x und y nicht gleichzeitig bestehen können.

K. Sarkadi.

Hill, I. D.: The distribution of the regression coefficient in samples from a non-normal population. Biometrika 41, 548—552 (1954).

Daniels, H. E.: A distribution-free test for regression parameters. Ann. math. Statistics 25, 499—513 (1954).

Let (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$ be observations from a bivariate population such that (*) $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$ with unknown α and β , and ε_i independently distributed residuals with $P(\varepsilon_i > 0) = P(\varepsilon_i < 0) = \frac{1}{2}$ for all i . The author derives a distribution-free test for $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$. Consider (*) with $\varepsilon_i = 0$ as equations of lines in the (α, β) plane. Assign a score m to each region into which the lines divide the plane, equal to the smallest number of lines to be crossed so as to reach one of the open (infinite) regions. Acceptance of the hypothesis depends on the score m for the region containing (α_0, β_0) . — The distribution of m is tabulated for $3 \leq n \leq 30$ and the power of the test is discussed. Comparisons are made with the test of Brown and Mood (this Zbl. 45, 99), and some generalizations suggested.

S. Vajda.

Jecklin, H. und P. Strickler: Wahrscheinlichkeitstheoretische Begründung mechanischer Ausgleichung und deren praktische Anwendung. Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath. 54, 125—161 (1954).

Ableitung von mechanischen Ausgleichsformeln, wobei die Grundfunktion nicht aus Parabeln, sondern aus Makeham-Funktionen besteht. Rechnerische Durchführung und Prüfung der Güte der Ausgleichung.

E. Zwinggi.

Steinhaus, H.: Shuffled numbers. Zastosowania Mat. 2, 34—44 und russische und engl. Zusammenfassg. 44—45 (1954) [Polnisch].

Biomathematik. Versicherungsmathematik. Finanzmathematik:

Komatu, Yûsaku: Alternative expressions for probability-generating functions concerning an inherited character after a panmixia. Kodai math. Sem. Reports 2, 43—54 (1954).

In previous papers the author has derived expressions for the distribution of genotypes under certain hereditary circumstances, by means of a method of generating functions. In the present paper an alternative method of generating functions is suggested and applied to various situations, previously discussed by the author.

H. Geiringer.

Adrian, Paul: Beziehungen zwischen den abhängigen und den unabhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten bei besonderen Annahmen über den Verlauf der Ausscheideintensitäten. Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath. 51, 117–123 (1954).

Darstellung der Beziehungen zwischen unabhängigen und abhängigen Wahrscheinlichkeiten (im Sinne von Karup), wenn eine Moivre'sche Absterbeordnung vorausgesetzt wird. *W. Saxer.*

Phillips, Williams: A basic curve of deaths. J. Inst. Actuaries 80, 289–325 (1954).

Ammeter, H.: La théorie collective du risque et l'assurance de choses. Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath. 54, 185–204 (1954).

Übersichtsreferat über das Wesen der kollektiven Risikotheorie und ihre Anwendung in der Sachversicherung. *E. Zwinggi.*

Vanlaer, G.: Méthodes et tables pour le calcul avec 15 chiffres du taux d'intérêt d'une annuité certaine. Bull. trimestr. Inst. Actuaire Français 65, 109–142 (1954).

Der Verf. gibt eine wesentliche Verbesserung der Methode von Achard für die Berechnung des Zinsfußes einer Zeitrente, wenn ihr Barwert für ein gegebenes n auf 15 Stellen genau bekannt ist. Wenn $q(x) = (1 - e^{-x})x$, haben die beiden Funktionen $(a_n + \lambda)(n + \lambda)$ und $q[(n + \lambda)j]q[(2\lambda - 1)j]$ für $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$ die gleichen Werte (j bedeutet den kontinuierlichen Zinsfuß). Benutzt man den Wert $\lambda = \frac{1}{2}$, so läßt sich R der folgenden Gleichung berechnen. $\frac{1}{2}[a_n/n + (a_n + 1)(n + 1)] = q(n - \frac{1}{2})j - R$. R wird für größere n sehr klein. Der Verf. gibt die nötigen Tabellen für $q(x)$ und Hilfswerte, um i berechnen zu können, wenn a_n bekannt. *W. Saxer.*

● **Peter, Hans:** Mathematische Strukturlehre des Wirtschaftskreislaufes. Göttingen: Otto Schwartz & Co. 1954. DM 34.—. VII, 230 S. 38 Abb.

Die Kreislaufvorstellung der Wirtschaft wird vom Verf. im Sinne des Kontenschemas der Buchhaltung aufgebaut: die hier auftretenden Einzelwirtschaften oder Gruppen von Einzelwirtschaften werden als „Pole“ des Kreislaufes bezeichnet. Teil I enthält die Diskussion von formalen Eigenschaften der allgemeinen n -poligen Schemata (Strukturen von Graphen und Gruppen), und die Grundzüge der Kreislauftheorie, mit besonderem Hinweis auf die von Quesnay und von Marx behandelten Schemata, für die eine geometrische Darstellung ausgearbeitet wird. Zum Ausgleich der Kreislaufmatrix werden Zeilenmultiplikatoren (anstatt Spaltenmultiplikatoren, wie v. Bortkiewicz) angewandt, und Gründe dafür werden angegeben. — Teil II gibt eine große Anzahl von Modellen (meistens mit $n = 3$, einige bis $n = 6$: Arbeiter, Unternehmer, Produktionsableitungen für Konsumgüter und Investitionsgüter, Bankensystem, Staat als Fiskus); es wird gezeigt, wie verschiedene Annahmen (betreffend z. B. Sparquote, Produktivitätsentwicklung usw.) zur Bestimmung der Entwicklung eines Modells führen. *B. de Finetti.*

Arrow, Kenneth J.: Import substitution in Leontief models. Econometrica 22, 481–492 (1954).

Verf. betrachtet ein von Chenery (1953) verallgemeinertes Leontief-Modell, bei welchem jede Ware entweder durch einen einzigen Produktionsprozeß im Inland hergestellt oder aus dem Ausland importiert wird. Unter einigen genau formulierten Voraussetzungen über Export-, Import- und maximale Export-, Preis-, Nachfrage- und heimische Ausstoß-Vektoren beweist Verf. die Eindeutigkeit des einer bestimmten Minimalforderung genügenden optimalen Programms und weitere Eigenschaften desselben. Mathematisch handelt es sich um Minimalisierung einer Linearform unter in Ungleichungen formulierten Nebenbedingungen. *M. P. Geppert.*

Muth, John F.: A note on balanced growth. Econometrica 22, 493–495 (1954).
Verf. setzt R. M. Solows und P. A. Samuelsons Untersuchung (dies. Zbl. 50, 368) des Gleichungssystems $X_i(t+1) = H^i[X_1(t), \dots, X_n(t)]$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

fort, indem er allgemeiner H^i als homogen vom Grade $m > 0$:

$$H^i [\lambda X_1(t), \dots, \lambda X_n(t)] = \lambda^m H^i [X_1(t), \dots, X_n(t)]$$

voraussetzt. Die Lösung ergibt sich in der Form $X_i(t) = V_i g(t)$ mit $g(t) = \lambda^{1/(1-m)} \gamma^{mt}$ für $m \neq 1$, $g(t) = x \lambda^t$ für $m = 1$ (ausgewogenes Wachstum). Der Beweis für Existenz der Lösung und Eindeutigkeit im Falle $m < 1$ verläuft analog demjenigen der genannten Autoren im Falle $m = 1$. *M. P. Geppert.*

Suits, Daniel B.: Dynamic growth under diminishing returns to scale. *Econometrica* **22**, 496–501 (1954).

Verf. greift die Untersuchungen von R. M. Solow und P. A. Samuelson (dies. Zbl. **50**, 368) auf und erweitert sie, indem er den Begriff der Homogenität verallgemeinert. Für jeden nicht negativen Vektor X und jeden Skalar $a \geq 0$ existiere ein $n = \Phi(a, X)$, so daß $H(aX) = a^n H(X)$; dann ist H homogen vom Grade höchstens $n' = \sup \Phi(a, X)$ und mindestens $n'' = \inf \Phi(a, X)$; $n' = n'' = n$ bedeutet „reguläre“, d. h. gewöhnliche Homogenität vom Grade n . Unter der weiteren auch von Solow und Samuelson vorausgesetzten Annahme strenger Monotonität [aus $X < Y$ folgt $H(X) < H(Y)$] beweist Verf. für den Fall $n' \leq 1$ eine Reihe von Sätzen über Existenz, Eindeutigkeit, Stabilität und Stationarität der Lösung von $X_{t+1} = H(X_t)$, die ausgewogenes Wachstum aufweist.

M. P. Geppert.

Neisser, Hans: Balanced growth under constant returns to scale: Some comments. *Econometrica* **22**, 502–503 (1954).

Gegen das von R. M. Solow und P. A. Samuelson (dies. Zbl. **50**, 368) aufgestellte und mit dem Ansatz $X_i = x V_i \lambda^t$ gelöste Gleichungssystem $X_i(t+1) = H^i[X_1(t), \dots, X_n(t)]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) erhebt Verf. den Einwand, daß es die zu untersuchende ökonomische Situation nicht richtig beschreibe. Der Ausstoß $X_j(t)$ der Industrie j zur Zeit t geht nicht in toto in die Produktion der Ware i zur Zeit $t+1$ ein, sondern verteilt sich additiv auf alle n Herstellungsprozesse. Verf. zeigt, daß die Lösung des dementsprechenden Gleichungssystems

$$Q_i = H^i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \text{mit} \quad X_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

durch den Ansatz $Q_i = h X_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), da mehr Unbekannte als Gleichungen vorliegen, an Stelle eines h -Wertes ein ganzes Intervall geeigneter h -Werte als Raten ausgewogenen Wachstums zuläßt.

M. P. Geppert.

Frisch, Ragnar: Linear expenditure functions. *Econometrica* **22**, 505–510 (1954).

Verf. knüpft an J. R. N. Stone (Economic Journal 1954) an und diskutiert ohne Verwendung von Vektor- und Matrix-Schreibweise ähnliche Probleme in etwas allgemeinerer, aber einfacherer Form. Ausgehend von der Annahme einer linearen Ausgabefunktion: $x_i p_i = c_i + \gamma_i y + \sum_{k=1}^m \beta_{ik} p_k$ ($i = 1, \dots, m$) mit y = Einkommen, p_i = Preis, x_i = gewünschte Menge des Gutes i , für welche die Engel- bzw. Cournot-Elastizitäten

$$E_i = \frac{\partial \log x_i}{\partial \log y} = \frac{\gamma_i y}{x_i p_i}, \quad e_{ik} = \frac{\partial \log x_i}{\partial \log p_k} = \frac{\beta_{ik} p_k}{x_i p_i} - \frac{\delta_{ik} p_k}{p_i}$$

mit $\delta_{ik} = 1$ für $i = k$, bzw. $= 0$ für $i \neq k$ lauten, leitet Verf. als notwendige und hinreichende Bedingungen für Homogenität der Nachfrage, d. h. $E_i + \sum_{k=1}^m e_{ik} = 0$, die Bedingung $c_1 = \dots = c_m = 0$ her bzw. für ein ausgewogenes Budget, d. h. $\sum_i x_i p_i = y$, die Bedingung $\sum c_i = 0$, $\sum \gamma_i = 1$, $\sum_i \beta_{ik} = 0$. Entsprechend wird eine zusätzliche notwendige und hinreichende Bedingung für „Ersatz-Symmetrie“,

d. h. für $E_i = \frac{e_i}{x_i} = E_j = \frac{e_j}{x_j}$ mit $x_j = x_j p_j \left/ \sum_{k=1}^m x_k p_k \right.$ gewonnen unter gewissen Annahmen über die Nachfragefunktionen. *M. P. Geppert.*

Huard de la Marre, R.: Relations entre le bénéfice global des entrepreneurs, le prix global de la production et les montants globaux des dépenses des diverses catégories de consommateurs. Bull. trimestr. Inst. Actuaries Français 65, 31–43 (1954).

Identische Beziehungen zwischen den im Titel erwähnten Gesamtbeträgen. Überfluß- und Not-Zeit werden vom Verf. charakterisiert, und Schlüsse über die wirtschaftliche Fragen ausgesprochen. *B. de Finetti.*

Lomax, K. S.: Business failures. Another example of the analysis of failure data. J. Amer. statist. Assoc. 49, 847–852 (1954).

Burger, E.: Spieltheoretische Behandlung eines Reklameproblems. (Variante eines Spielmodells von Gillman.) Mitteil.-Bl. math. Statistik 6, 39–52 (1954).

Es wird die von J. v. Neumann für endliche Strategiemengen entwickelte Methode zur Behandlung von Nullsummenspielen mit zwei Spielern auf die folgenden beiden Nullsummenspiele ausgedehnt: Spieler L, B; Strategien t_1 für L, t_2 für B, $0 \leq t_1, t_2 \leq 1$ Gewinnfunktion (für L)

$$(I) M(t_1, t_2) = \begin{cases} A(t_1), & t_1 \leq t_2; \\ (1 - A(t_2)) A(t_1), & t_2 < t_1 \end{cases} \quad (II) M(t_1, t_2) = \begin{cases} A(t_1), & t_1 < t_2 \\ (1 - A(t_2)) A(t_1), & t_2 \leq t_1 \end{cases}$$

$A(t)$ sei hierbei eine monotone und glatte reelle Funktion auf $0 \leq t \leq 1$. Verf. beweist für beide Spiele bei Ausdehnung auf gemischte Strategien die Existenz von Gleichgewichtspunkten und gibt Wert und optimale Strategien an. – Deutet man $A(t)$ als Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich eine Kunde auf ein gewisses Angebot zur Zeit t zum Kauf entschließt, so können die Spiele als Reklamewettstreit zweier Kaufleute L, M angesehen werden, bei dem L durch geeignete Reklame zum Zeitpunkt t_1 einen Käufer zum Kauf gewinnen will und B durch Gegenreklame zum Zeitpunkt t_2 dieses zu verhindern sucht. Dabei tritt (I) oder (II) ein, je nachdem man den Fall $t_1 = t_2$ zugunsten oder zuungunsten von L rechnet. – Wie Verf. bei der Korrektur bemerkt, ordnet sich das Problem einer allgemeineren Fragestellung unter, die inzwischen von J. M. Danskin und L. Gillman (dies. Zbl. 52, 146) beantwortet worden ist. *W. Gaschütz.*

Fels, Eberhard: Einige Bemerkungen zu Burgers Variante eines Spielmodells von Gillman. Mitteil.-Bl. math. Statistik 6, 53–55 (1954).

Wirtschaftswissenschaftlicher Kommentar zu der vorstehenden Arbeit von E. Burger, der die praktische Bedeutung der dort erzielten Ergebnisse analysiert. *W. Gaschütz.*

Beale, E. M. L.: An alternative method for linear programming. Proc. Cambridge philos. Soc. 50, 513–523 (1954).

The author presents his „method of leading variables“ for solving Linear Programming, i.e. minimizing a linear form subject to linear inequalities. The method is iterative and is proved to terminate in the required solution. A numerical example and a geometrical representation are given and the method is compared with Dantzig's Simplex Method and Lemke's Dual Simplex Method. – (The author's method is independent of the latter, but it can be shown that the two methods can proceed in parallel steps throughout. The advantages of the new method in large-scale automatic computation remain to be studied.) *S. Fajda.*

Geometrie.

Grundlagen. Nichteuklidische Geometrie:

Džavadov, M. A.: Die projektiven und nichteuklidischen Geometrien über den Matrizen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 97, 769–772 (1954) [Russisch].

The author studies the projective geometry of (m, n) -rowed matrices over the real,

complex field and the dual number system. He determines all collineations and correlations which are defined in the sense of matrices. Then he starts with involutions and defines non-Euclidean geometry.

L. K. Hua.

Lenz, Hanfried: Über die Einführung einer absoluten Polarität in die projektive und affine Geometrie des Raumes. *Math. Ann.* **128**, 363—372 (1954).

Es sei R ein projektiver Raum beliebiger (auch unendlicher) Dimension ≥ 2 , insbesondere desarguessch bei Dimension 2. Als Quasipolarität wird eine eindeutige Abbildung π von R in den dualen Raum R' (dessen Punkte also die Hyperebenen von R sind) bezeichnet, wenn aus $A \in \pi(B)$ stets $B \in \pi(A)$ folgt. Jede Quasipolarität ist eine Kollineation von R in R' , bei endlicher Dimension sogar eine Polarität. Die Punkte A, B nennt man im Falle $A \in \pi(B)$ konjugiert zueinander (bez. der Quasipolarität π). Für die Klasse der sich so ergebenden Konjugiertheitsrelationen werden kennzeichnende Eigenschaften angegeben, aus denen sich ein Axiomensystem für die in einem affinen Raum einzuführende Relation des Senkrechtstehens (von Geraden) ergibt, wenn man die durch diese Relation in der uneigentlichen Hyperebene hervorgerufene Konjugiertheitsrelation betrachtet. Die Einführung einer Konjugiertheitsrelation in R kann als Übergang zu einem nicht-euklidischen Raum gedeutet werden. Für den Fall des Nichtauftretens isotroper Geraden wird die sich dabei ergebende Relation des Senkrechtstehens (von Geraden) ihrer Art nach noch durch Axiome gekennzeichnet.

G. Pickert.

Fadini, Angelo: Su particolari piani affini generalizzati. *Ricerca, Rivista Mat. pur. appl.* **5**, Nr. 1/2, 57—64 (1954).

Verf. geht von einer Arbeit des Ref. [*Ricerca Mat.* **2**, 192—203 (1953)] aus und behandelt ziemlich eingehend diejenigen verallgemeinerten affinen Ebenen, die man von einer projektiven Ebene durch Weglassen zweier Geraden erhalten kann. Es wird hervorgehoben, daß es sich hierbei um eine zu der speziellen hyperbolischen bzw. euklidischen Geometrie duale Geometrie handelt, je nachdem die obengenannten Geraden reell oder imaginär sind. Die Untersuchungen des Verf. führen in der Tat zu Eigenschaften der Winkel (Segmente), die denjenigen der Segmente (Winkel) der speziellen hyperbolischen oder der euklidischen Geometrie sehr ähnlich sind. Die Arbeit des Verf. kann den Ausgangspunkt zu weiteren allgemeineren Geometrien bilden.

R. Permutti.

● **Mihăileanu, N.:** Nichteuklidische Geometrie. Bucuresti: Editura Academiei Republicii Populare Romine 1954. 143 S. Lei 4,30 [Rumänisch].

Verf. hält es für eine erste Einführung in die nichteuklidische Geometrie für zweckmäßig, die grundlegenden Ergebnisse auf verschiedenen Wegen zu erarbeiten. Zum Eingang scheint ihm die Betrachtung der Geometrie auf der Kugel wegen der vielen Analogien zur hyperbolischen Geometrie geeignet. Somit behandelt er im ersten der fünf Teile die sphärische Geometrie bis zu den sphärischen Kegelschnitten. Der zweite Teil behandelt vom projektiven Standpunkt das Absolute, die hyperbolische Geometrie, elliptische und hyperbolische Trigonometrie, nichteuklidische Bewegungen. Der dritte Teil bringt die analytische Geometrie der hyperbolischen Ebene und des Raumes. Im vierten Teil wird die Differentialgeometrie (Linien- und Flächenelement, Krümmung, Geodätische, Frenetsche Formeln, Pseudosphäre, Riemannsche Räume) behandelt. Der letzte Teil bringt die Modelle von Poincaré und Klein und die Hilbertsche Axiomatik der nichteuklidischen Geometrie.

M. Zacharias.

Szász, Paul: Über die Trigonometrie des Poincaréschen Kreismodells der hyperbolischen ebenen Geometrie. *Acta math. Acad. Sci. Hungar.* **5**, 29—34 und russische Zusammenfassg. 34 (1954).

Using Poincaré's map of the hyperbolic plane on the interior of a circle, the author gives a simple derivation of the main formulae of hyperbolic trigonometry (compare also P. Szász, this Zbl. **55**, 139; H. Meschkowski, this Zbl. **48**, 133).

F. A. Behrend.

Bottema, O.: On the three distances of two skew planes in an elliptic five-dimensional space. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* **57**, 397–399 (1954).

Anknüpfend an eine Arbeit von van der Kulk (dies. Zbl. **26**, 247) untersucht der Verf. die Frage, ob die auf den drei gemeinsamen Loten A_i, B_i zweier windschiefer Ebenen V_a, V_b des 5-dimensionalen elliptischen Raumes gemessenen Abstände d_i ($i = 1, 2, 3$) extremal sind. Von einem variablen Punkt P von V_a wird das Lot auf V_b gefällt und der Abstand $d(P)$ des Punktes P von dem Lotfußpunkt berechnet. Sind die d_i verschieden und in der Reihenfolge $d_1 < d_2 < d_3$ angeordnet, so hat $d(P)$ für $P = A_1$ das Minimum d_1 , für $P = A_3$ das Maximum d_3 und für $P = A_2$ einen Sattelpunkt. Sind die d_i nicht alle verschieden, so liegen Clifford-Parallelismen vor. F. Bachmann.

Elementargeometrie:

Gambier, M.-B.: Trisectrices des angles d'un triangle. *Ann. sci. École norm. sup.*, III. Sér. **71**, 191–212 (1954).

Verf. entwickelt nach kurzer Übersicht über die ältere Geschichte des Morleyschen Satzes von den Winkeldrittelnden des Dreiecks die vollständige Theorie dieses Satzes auf rein geometrischem Wege. Der Zusammenhang mit der Hesseschen Konfiguration ($12_4, 16_3$) (s. Ref., dies. Zbl. **18**, 163) wird nicht erwähnt. M. Zacharias.

Deaux, R.: Couples communs à une involution de Möbius et à une inversion isogonale. *Mathesis* **63**, 216–218 (1954).

Geometrischer Beweis des Satzes von E. Weber [Nouv. Ann., IV. Sér. **6**, 363 (1906)] und R. Bouvaist [Bull. Sci. Ecole polytechn. Timișoara (1944)]: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Berührungspunkte zweier Kegelschnitte mit den Seiten eines Dreiecks auf einem Kreis liegen, ist, daß ihre Mittelpunkte in dem Dreieck isogonal sind. Beweis mit Hilfe der gemeinsamen Paare einer Möbiusinvolution und einer isogonalen Inversion. M. Zacharias.

Thébault, V.: Angles de Brocard et de Steiner d'un triangle. *Mathesis* **63**, 381–382 (1954).

Deaux, R.: Sur le point de Steiner et le foyer de la parabole de Kiepert. *Mathesis* **63**, 250–254 (1954).

Die Homographie ω mit den Gleichungen $x_1 = a^2 x$, $y_1 = b^2 y$, $z_1 = c^2 z$ transformiert die Steinersche Umellipse ε des Dreiecks ABC (mit den Seiten a, b, c) in den Umkreis (O) . Dem Steinerschen Punkt S (dem vierten Schnittpunkt von ε und (O)) entspricht in ω der Brennpunkt S_1 der Kiepertschen Parabel. Die Spiegelbilder S' von S bezüglich der Longchampsgeraden und S'_1 von S bezüglich der Lemoinegeraden liegen diametral einander gegenüber auf einer gleichseitigen Umhyperbel η . S' ist der Schnittpunkt der Parallelen durch S und durch den Höhenschnittpunkt H zu der Eulergeraden OH und dem Brocardschen Durchmesser OK . S'_1 ist in (O) invers zum Schwerpunkt G . Der Mittelpunkt von η ist der Orthopol des zu GS_1 parallelen Durchmessers von (O) . M. Zacharias.

Rau, P. S.: Parabolas related to a triangle. *Math. Gaz.* **38**, 253–257 (1954).

Furstenberg, Harry: An extension of Ceva's theorem. *Scripta math.* **20**, 237–238 (1954).

Furstenberg, Harry: An extension of Menelaus' theorem. *Scripta math.* **20**, 238–239 (1954).

Danielsson, Ólafur: Etwas Elementargeometrie. *Nordisk mat. Tidskrift* **2**, 156 (1954) [Schwedisch].

P sei der Diagonalschnittpunkt im konvexen Viereck $ABCD$. Die Verbindungsgerade der Schwerpunkte der Dreiecke PDA und PBC steht auf der Verbindungsgeraden der Höhenschnittpunkte der Dreiecke PCD und PAB senkrecht.

Majo, A. de: Sur un point remarquable du quadrangle. *Mathesis* **63**, 236—240 (1954).

Die sechs Ähnlichkeitskreise der Paare der Umkreise der vier Dreiecke, deren Ecken drei Ecken des Vierecks $A_1A_2A_3A_4$ sind, gehen durch einen Punkt M . Dieser Punkt ist das Zentrum der Inversion, die das Viereck (A_i) in sein „metapolares“ (A_i') transformiert, dessen vier Dreiecks-Umkreisradien denen von (A_i) umgekehrt proportional sind. Weitere Beziehungen ergeben sich zu den Miquelpunkten, der gleichseitigen Umhyperbel, einer zirkularen Kubik durch die Ecken und Diagonalepunkte von (A_i) und zu den beiden halbzirkularen Umkegelschnitten von A .

M. Zacharias.

Goormaghtigh, R.: Sur le pentagone inscriptible. *Mathesis* **63**, 211—215 (1954).

Die Orthopole einer Geraden g bezüglich der vier Dreiecke $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$ eines Kreisvierecks $A_1A_2A_3A_4$ liegen in der „Orthopolargeraden“ von g bezüglich $A_1A_2A_3A_4$. Die Orthopolargeraden einer Geraden g bezüglich der fünf Vierecke, die vier Ecken eines Kreisfünfecks zu Ecken haben, berühren eine dreispitzige Hypozykloide, deren Größe von der Lage von g unabhängig ist. Die Parallele durch einen Punkt M des Umkreises des Fünfecks zu seiner Wallacegeraden bezüglich des Fünfecks umhüllt eine fünfspitzige Hypozykloide. Die Einhüllende der Wallacegeraden des den Umkreis durchlaufenden Punktes M ist eine Kurve achter Ordnung und fünfter Klasse. Der Ort des Schnittpunktes der Wallacegeraden der Endpunkte eines veränderlichen Durchmessers des Umkreises des Fünfecks ist eine Pascalsche Schnecke. Der Ort der Mitte der Strecke zwischen den Punkten, in denen die Wallacegeraden der Endpunkte eines veränderlichen Durchmessers des Umkreises ihre Einhüllende berühren, ist ebenfalls eine Pascalsche Schnecke, die der ersten ähnlich (im Verhältnis 1:3) ist.

M. Zacharias.

Thébault, Victor: Geometry of the tetrahedron. *Amer. math. Monthly* **61**, 699—700 (1954).

Thébault, V.: Tétraèdres transmutables. *Mathesis* **63**, 382—383 (1954).

Thébault, Victor: Sphères associées à un tétraèdre. *Mathesis. Supplément* **63**, 25—30 (1954).

Das Tetraeder $T \equiv ABCD$ mit den Kanten $BC = a$, $DA = a'$, $CA = b$, $DB = b'$, $AB = c$, $DC = c'$ habe den Schwerpunkt G ; G_i ($i = a, b, c, d$) seien die Schwerpunkte der Flächen BCD , CDA , DAB , ABC . Verf. untersucht die Eigenschaften 1. der Kugeln $GBCD$, $GCDA$, $GDAB$, $GABC$, 2. der Kugeln $GG_bG_cG_d$, $GG_cG_dG_a$, $GG_dG_aG_b$, $GG_aG_bG_c$, 3. der Kugel $(\omega \sigma)$, die orthogonal ist zu den Kugeln (A, l) , (B, m) , (C, n) , (D, p) mit $6l^2 = b^2 + c^2 + a'^2 - a^2 - b'^2 - c'^2$, $6m^2 = c^2 + a^2 + b'^2 - b^2 - c'^2 - a'^2$, $6n^2 = a^2 + b^2 + c'^2 - a'^2 - b'^2 - c'^2$, $6p^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2 - a^2 - b^2 - c^2$, die zu der Zwölfpunktekugel von T konzentrisch ist und die Umkugel von T in einem Kreis schneidet, dessen Ebene zu der Eulergeraden OG in G normal ist. 4. Geht die Kugel $GG_aG_bG_c$ durch D , so ist $a'^2 + b'^2 + c'^2 = a^2 + b^2 + c^2$ und umgekehrt. Verf. gibt Eigenschaften eines solchen speziellen Tetraeders und des weiteren Sonderfalls an, wenn die Kugel $GG_aG_bG_c$ in D die Umkugel von T berührt.

M. Zacharias.

Marmion, A.: Sur les sphères podaires par rapport à un tétraèdre. *Mathesis* **63**, 222—236 (1954).

Die Fußpunktkugel („F.“) eines Punktes M bezüglich eines Tetraeders T ist zugleich F. des invers isogonalen Punktes zu M . Der Ort der Spitzen der drei homofokale Quadriken berührenden dreieckigen Trieder ist bekanntlich eine Kugel σ . Ist Q_0 eine Inquadrik von T und Q eine zu Q_0 homofokale Quadrik, so nennt Verf. Q eine infokale Quadrik und die Kugel σ der drei homofokalen Quadriken Q , Q , Q_0 die F. der infokalen Quadriken Q . Er untersucht die Systeme der Inquadriken und infokalen Quadriken und ihrer F., die F. der Punkte einer Geraden und die F. der Punkte gewisser Flächen. Auf die Anführung der Ergebnisse dieser Untersuchungen muß verzichtet werden.

M. Zacharias.

Marmion, A.: Sur les quadriques normalement inscrites, circonscrites ou anscrites à un tétraèdre. *Mathesis*, Supplément **63**, 1—13 (1954).

Eine Quadrik heißt einem Tetraeder einbeschrieben, wenn sie seine Flächen berührt, unbeschrieben, wenn sie durch seine Ecken geht, normal ein- oder unbeschrieben, wenn die Normalen in den Berührungspunkten oder in den Ecken durch einen Punkt gehen. Verf. nennt eine Quadrik einem Tetraeder anbeschrieben, wenn sie seine Kanten berührt, und normal anbeschrieben, wenn die Normalebenen der Kanten in den Berührungspunkten durch einen Punkt gehen. Die gemeinsamen Punkte der Normalen bzw. Normalebenen nennt er Normalpole. Er untersucht deren Eigenschaften im allgemeinen Tetraeder, im Tetraeder mit Höhenschnittpunkt und im gleichflächigen Tetraeder. *M. Zacharias.*

Bottema, O.: Note on the skew quadrilateral. *Amer. math. Monthly* **61**, 692—693 (1954).

Venkov, B. A.: Über eine Klasse Euklidischer Polyeder. *Uspechi mat. Nauk* **9**, Nr. 4 (62), 250—251 (1954) [Russisch].

Coxeter, H. S. M.: Six uniform polyhedra. *Scripta math.* **20**, 227 (1954).

Sichardt, W.: Ein Satz vom Kreis. *Z. angew. Math. Mech.* **34**, 429—431 (1954).

Umständliche Darlegung der bekannten Beziehung
$$\prod_{c=1}^{n-1} 2 \sin \frac{c\pi}{n} = n.$$

● **Markuschewitsch (Markuševič), A. I.:** Bemerkenswerte Kurven. (Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik. VII). Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1954. 30 S.

Ein Büchlein für Schüler und zum Selbststudium für erwachsene Leser mit geringen mathematischen Kenntnissen. Der Raumersparnis wegen sind die meisten Sätze ohne Beweise angegeben. Aus dem Inhalt: Apollonischer Kreis; Ellipse, Parabel, Hyperbel als ebene Kurven und als Kegelschnitte, allgemeine Lemniskaten; Zykloide als Rollkurve und als Brachystochrone (fälschlich mit i geschrieben). *Literaturhinweis.* *M. Zacharias.*

Zieba, A.: Elementary theory of pursuit. *Zastosowania Mat.* **1**, 273—296, russische und engl. Zusammenfassg. 296—297, 297—298 (1954) [Polnisch].

The subject of the paper is the pursuit of one element by two elements in a plain. The author determines the best methods of pursuit and escape, assuming that the elements, at every moment, know each other's position and the absolute value of maximum rates of speed. The best method of pursuit is that which ensures the shortest time. The best method of escape is defined, in a similar way, as that which ensures the longest time of escape. The time-distance of a point from a given element is the time needed by the element to pass along the segment joining it with that point. The set of points temporally equidistant from two elements of different speeds forms a circle which is called their Apollonius' circle. Let us denote the pursuing elements by S_1 and S_2 and the escaping element by U . Let us draw the Apollonius' circles of the elements $S_1 U$ and $S_2 U$ and denote that one of their intersection points which is farther from U by A_p (Apollonius' point). The best method of pursuit is the pursuit in the direction of the Apollonius' point, and the best method of escape is the escape in the direction of the Apollonius' point. If the Apollonius' circles do not intersect, or if the element U is beyond the Apollonius' triangle (the triangle $S_1 S_2 A_p$), the pursuit is reduced to an ordinary case of one element pursuing another. The second part of the paper deals with the case of collinearity of all three elements. Both intersection points of the Apollonius' circles are then equidistant from the escaping U , and the best method of pursuit does not exist. However, the pursuers can ensure, by means of approximate methods of pursuit, a time arbitrarily near a certain limit time, which, however, no method can ensure with accuracy. *W. Wrona.*

Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

● Smith, Edward S., Meyer Sakover and Howard K. Justice: *Analytic geometry*. 2nd ed. New York: John Wiley and Sons 1954. XIII, 306 p. \$ 4,—.

● Salmon, George: *A treatise on conic sections*. Reissue of 6th ed. New York: Chelsea Publishing Co. 1954. XV, 399 p. \$ 3,25 cloth, \$ 1,94 paper.

Zacharias, Max: *Bemerkung zu meiner Arbeit: „Die ebenen Konfigurationen (10₃)“*. Math. Nachr. 12, 256 (1954).

Monseau, M.: *Couples de points inverses dans un système de quatre droites et sphères associées*. Mathesis 63, 219—222 (1954).

Zwei Punkte M, M' sind invers in Hinblick auf 4 Geraden des Raumes, wenn sie die gleiche Fußpunktkugel besitzen. M, M' haben dann in bezug auf diese Kugel die gleiche Potenz. Verf. führt nun dem Punktepaar M, M' „zugeordnete Kugeln Σ_λ bezüglich des Moduls λ “ so ein, daß M und M' in bezug auf diese Kugel die λ -fache Potenz besitzen. Beschreibt einer der Punkte M, M' eine Gerade, so durchläuft Σ_λ ein Büschel mit fester Orthogonalkugel. Untersuchung weiterer Eigenschaften, insbesondere für $\lambda = 0, 1, 2, 3$.

H. R. Müller.

Charrueau, Andrée: *Sur les transformations projectives*. J. Math. pur. appl., IX. Sér. 33, 263—294 (1954).

Die vorliegende Abhandlung besteht aus zwei Teilen. — Der erste, rein algebraischen Charakters, ist eine Zusammenfassung und Erweiterung von Betrachtungen über Matrizen, mit welchen sich Verf. schon in anderen Arbeiten beschäftigt hat. Es werden zunächst mit den Unterdeterminanten $A_{\alpha\beta}^{ij} = a_{ix} a_{\beta j} - a_{i\beta} a_{jx}$ einer quadratischen Matrix a vierter Ordnung die antisymmetrischen Determinanten $A^{ij}, A_{\alpha\beta}$ gebildet; aus einer antisymmetrischen quadratischen Matrix m vierter Ordnung kann man dann eine ähnliche duale Matrix erhalten, indem man jedes Element m_{ij} von m durch m_{kl} ersetzt, wo $ijkl$ eine ungerade Permutation von 1, 2, 3, 4 bedeutet. Es werden verschiedene Eigenschaften solcher Matrizen bewiesen, um dann die Büschel von quadratischen antisymmetrischen Matrizen 4. Ordnung zu untersuchen. — Der zweite Teil enthält Anwendungen auf die Liniengeometrie des dreidimensionalen Raumes. Die Plückerschen Linienkoordinaten, in ihren beiden dualen Formen, und so auch die Koeffizienten der Gleichungen eines linearen Strahlenkomplexes in den beiden Arten von Koordinaten, führen zu dualen antisymmetrischen Matrizenpaaren; es folgen Anwendungen auf die Transformation eines linearen Strahlenkomplexes durch Homographien, Korrelationen und insbesondere durch Nullsysteme.

E. Togliatti.

Longo, Carmelo: *Sui complessi lineari di piani*. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 37, 59—138 (1954).

Ein Punkt x ist in einem n -dimensionalen projektiven Raum R_n gegeben durch die n Verhältniszahlen $x^0 : x^1 : \dots : x^n$. Die Ebene dreier Punkte x, y, z hat dann die homogenen (Grassmannschen) Koordinaten $p^{ijk} = (xyz)^{ijk}$, gebildet von den dreireihigen Minoren der Matrix $\begin{bmatrix} x^0 & x^1 & x^2 \\ y^0 & y^1 & y^2 \\ z^0 & z^1 & z^2 \end{bmatrix}$. Ein linearer Ebenenkomplex (im folgenden durch l. EK abgekürzt) ist gegeben durch eine lineare Gleichung $F = \sum a_{ijk} p^{ijk} = 0$. Verf. gibt eine vollständige projektive Klassifikation der l. EK im R_5, R_6 und R_7 , dabei von zahlreichen Vorarbeiten anderer Gebrauch machend, Vorarbeiten, die in einer ausführlichen Schrifttum-Liste am Ende der Arbeit zusammengestellt werden. Von projektiven Invarianten der Form F wird kein Gebrauch gemacht. Dagegen wird, bei der Ermittlung der verschiedenen Normalformen von F , durchwegs Gebrauch gemacht von Begriffen, die der Verf. durch seine „singulären“ Räume einführt. Im besonderen sind dies: 1. singuläre Geraden eines l. EK: jede Ebene durch eine sing. Ger. gehört dem l. EK an. 2. total-singulärer Raum eines l. EK.: jede seiner Geraden ist singulär. Und 3. singuläre Punkte der Ordnung h . Der am häufigsten behandelte Fall ist der des l. EK im

fünfdimensionalen Raum R_5 . Hier wird auch viel Gebrauch gemacht von der Abbildung der ∞^5 Ebenen des R_5 auf die Punkte der Grassmannschen Mannigfaltigkeit V_9^{42} in einem projektiven R_{19} . Im 3. und 4. Abschnitte werden die l. EK im R_6 und R_7 behandelt. Hier ist der Satz grundlegend, daß ein allgemeiner l. EK keine total-singuläre Ebene besitzt. Für den R_6 werden die schon von Landsberg und Schouten erhaltenen Resultate vervollständigt. Unter anderem wird gezeigt, wie eine geometrische Konstruktion des l. EK zustande kommen kann durch die Quadrik der singulären Punkte mit den ∞^5 singulären Ebenen, ebenfalls in dieser Quadrik enthalten. Der letzte Abschnitt gibt eine Klassifikation der l. EK im R_7 . Hier wird die V_4^3 bestimmt als Ort der singulären Punkte. Es wird eine Figur eingeführt, die als natürliche Verallgemeinerung der beiden Hauptebenen (piani cardini) beim l. EK in R_7 auftritt. Schließlich werden die verschiedenen Typen durch einfache, schon von Schouten gebrauchte Figuren dargestellt.

R. W. Weitzenböck.

Charrueau, André: Sur diverses transformations géométriques. Bull. Sci. math., II. Sér. 78, 97—128 (1954).

In einigen früheren Abhandlungen (dies. Zbl. 47, 144; 50, 156) hat Verf. das System der ∞^1 Polaritäten in bezug auf die Strahlenkomplexe eines Büschels untersucht, und ähnlicherweise auch das System der ∞^1 Transformationen durch reziproke Radien, die von den Kreisen eines Büschels definiert werden. Nach einigen einleitenden Bemerkungen über die Transformation einer räumlichen Polarität durch eine Homographie oder durch eine Korrelation, betrachtet Verf. hier ein Büschel von Quadriken folgender Form: $y_1^2 - \lambda f(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0$, wo $f = 0$ eine nicht ausgeartete Quadrik bedeutet; das System der ∞^1 Polaritäten, die solche Quadriken definieren, gestattet ganz ähnliche Fragen, wie früher für die Büschel von Strahlenkomplexen, zu stellen und aufzulösen; die Ergebnisse sind auch ganz ähnlich. Es folgt die Ausdehnung auf einen Raum mit einer beliebigen Anzahl von Dimensionen, welche keine Schwierigkeiten mehr bietet.

E. Togliatti.

Goormaghtigh, R.: Cycloïdales et coniques. Mathesis 63, 386—388 (1954).

Algebraische Geometrie:

Gudkov, D. A.: Über den Raum der Koeffizienten der ebenen algebraischen Kurven n -ter Ordnung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 98, 337—340 (1954) [Russisch].

Nello spazio lineare complesso R_N^* , ad $N = \frac{1}{2} n(n+3)$ dimensioni, i cui punti siano le immagini delle curve algebriche piane, a coefficienti complessi, C_n^* d'ordine n , s'introduce una metrica, in particolare applicabile allo R_N dei punti reali di R_N^* , cioè dei punti immagine di curve C_n reali. — Viene in tal modo definita la distanza fra due curve (reali o meno), e quindi l'intorno complesso $S^*(C_n^*, \varepsilon)$, o reale $S(C_n, \varepsilon)$, di una curva C_n^* , ovvero C_n , come insieme delle curve aventi dalla assegnata distanza $< \varepsilon$. Ciò conduce ad esprimere alcune proposizioni, utili nelle questioni di realtà pertinenti le curve algebriche piane d'ordine n . — Si può peraltro osservare che — salvo il diverso atteggiamento della impostazione — nascono interferenze, ampie per quanto non rilevate, con risultati da tempo acquisiti. Ad es. cfr. L. Brusotti, Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., V. Ser. 30, 375—379 (1921).

V. E. Galafassi.

Gudkov, D. A.: Vollständige topologische Klassifikation der nicht-singulären reellen algebraischen Kurven 6-ter Ordnung in der reellen projektiven Ebene. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 98, 521—524 (1954) [Russisch].

In virtù del classico teorema di A. Harnack, una C_6 , curva algebrica piana d'ordine 6 priva di punti multipli e reale, non può possedere più di undici circuiti; ed è poi evidente che una retta non può incontrare una C_6 in più di sei punti reali. — Ne consegue che, sotto l'aspetto della topologia del piano proiettivo reale, la confi-

gurazione dei circuiti (tutti pari) della parte reale di una C_6 deve rientrare in uno di 68 tipi topologicamente distinti, a descrivere i quali possono giovare gli schemi che l'A. introduce, ovvero altri — i cosiddetti polinomi simbolici — già largamente utilizzati da altri Autori. — È variamente nota l'esistenza (pure accertata dallo stesso A.) di C_6 rispondenti a 53 di tali tipi; e da tempo è stato constatato che il tipo con undici circuiti mutuamente estranei (tipo considerato da D. Hilbert e K. Rohn) non può presentarsi, il che del resto, come l'A. rileva, pure consegue da risultati generali di I. Petrowsky (questo Zbl. 18, 270). — Rimangono 14 tipi che l'A. esamina per dimostrare che nemmeno esistono C_6 ad essi rispondenti. Si può in proposito ricordare che anche la non esistenza di C_6 con dieci circuiti estranei inclusi in un undicesimo, era già stata ravvisata da K. Rohn [Math. Ann. 73, 177—229 (1913)].

V. E. Galafassi.

Primrose, E. J. F.: Coincidence points of a curve. Tôhoku math. J., II. Ser. 6, 35—37 (1954).

Il existe un faisceau de cubiques ayant un contact du septième ordre avec une courbe plane en un point P . Si le 9^e point-base de ce faisceau coïncide avec P , ce point est appelé „point de coïncidence“ par Halphen. L'A. détermine le nombre des points de coïncidence d'une courbe plane algébrique en fonction des caractères plückériens de cette courbe.

L. Godeaux.

Tanturri, Giuseppe: Una particolare quartica piana con catene di flessi. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 9, 143—146 (1954).

Une chaîne de points d'inflexion d'une quartique plane est un ensemble de points d'inflexion tel que l'un soit le tangentiel d'un autre de l'ensemble. L'A. étudie une quartique plane possédant quatre chaînes de quatre points d'inflexion et quatre points d'ondulation alignés, dont les tangentes passent par un même point. La quartique est invariante pour un groupe d'ordre 16 d'homographies. L. Godeaux.

Marchionna, Ermanno: Sopra una proprietà caratteristica delle curve algebriche appartenenti ad una quadrica. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. math. natur., VIII. Ser. 16, 205—209 (1954).

Démonstration d'un théorème de B. Segre (ce Zbl. 46, 146) dans le cadre de la géométrie algébrique. Le résultat de Segre est amélioré en ce qu'une courbe gauche algébrique d'ordre $n \geq 6$ est entièrement sur une quadrique, si toute intersection de la courbe avec les plans d'un système ∞^2 (dont le centre n'est pas sur une trisécante, et n'est pas le centre d'un cône de bisécantes) possède 6 points sur une conique.

H. Guggenheimer.

Chow, Wei-Liang: The Jacobian variety of an algebraic curve. Amer. J. Math. 76, 453—476 (1954).

Verf. beweist hier die Existenz der Jacobischen Mannigfaltigkeit \mathfrak{J} für eine singularitätenfreie algebraische Kurve \mathfrak{C} des Geschlechts g , die über einem beliebigen Körper k definiert ist. Im Anschluß an A. Weil (dies. Zbl. 37, 162) und über dessen Resultate hinausgehend wird gezeigt, daß die Jacobische Mannigfaltigkeit im gewöhnlichen Sinne (d. h. nicht nur als „abstrakte“ Mannigfaltigkeit) existiert und über demselben Körper k definiert ist. Bei der Konstruktion von \mathfrak{J} geht Verf. von einem ganzen Divisor p , bestehend aus $n(\mathfrak{C} \cdot 2g - 2)$ Punkten der Kurve \mathfrak{C} , aus und bildet dafür die „zugeordnete Form“, deren Koeffizienten als homogene Koordinaten eines Punktes (p) in einem projektiven Raum S , gedeutet werden. Wenn der Divisor p auf \mathfrak{C} variiert, so beschreibt (p) eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit \mathfrak{C}^n in S , die ebenfalls über k definiert ist. [Aus der Darstellung des Verf. scheint nicht mit Klarheit hervorzugehen, daß die Mannigfaltigkeit \mathfrak{C}^n algebraisch ist, bzw. eine algebraische Mannigfaltigkeit lückenlos ausfüllt; daß bei einer Parameterdarstellung das nicht ohne weiteres behauptet werden darf, darauf hat vor kurzem O. Perron, S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1954, 179—199 (1955), mit einem einfachen Beispiel hingewiesen.] Die Punkte von \mathfrak{C}^n entsprechen dann eindeutig den ganzen Divisoren der Ordnung n auf \mathfrak{C} ; der Divisorenklasse \mathfrak{P} aller mit p äquivalenten ganzen Divisoren entspricht eine Mannigfaltigkeit $G_{\mathfrak{P}}$ innerhalb \mathfrak{C}^n der Dimension $n - g$, von welcher wieder die „zugeordnete Form“ gebildet wird (was wohl auch nur dann einwandfrei sein dürfte, wenn feststeht, daß \mathfrak{C}^n eine algebraische Mannigfaltigkeit ist, die gewisse Bedingungen erfüllt). Die Koeffizienten dieser zugeordneten Form werden als

homogene Koordinaten eines Punktes (G^3) in einem projektiven Raum S_1 gedeutet, welcher beim Variieren von \mathfrak{P} die gesuchte Mannigfaltigkeit \mathfrak{B} beschreibt. Die Punkte von \mathfrak{B} repräsentieren so die Nebengruppe \mathfrak{D}_n der Divisorenklassen der Ordnung n . Sodann wird auf \mathfrak{B} eine Gruppenoperation, nämlich die „Summe“ zweier Punkte (G^1) und (G^2) in bezug auf einen festen Punkt eingeführt, indem $(G^1) + (G^2) = (G^3)$ definiert wird, wo (G^3) derjenige Punkt auf \mathfrak{B} ist, welcher die Divisorenklasse $\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 - \mathfrak{P}$ repräsentiert. Auf diese Weise erhält man als Abbild der „Addition“ innerhalb der Nebengruppe \mathfrak{D}_n eine Komposition der Punkte in \mathfrak{B} , welche über k definiert ist, und derzufolge die Punkte von \mathfrak{B} eine abelsche Gruppe bilden mit einer gewissen Einheit (G^0) . Die Abbildungen $(G) \rightarrow (G^2) - (G)$ stellen eine ausnahmslos eindeutige und absolut transitive Gruppe von birationalen Transformationen von \mathfrak{B} in sich dar, so daß die Gruppe \mathfrak{D}_0 der Divisorenklassen vom Grade 0 homomorph auf \mathfrak{B} abgebildet ist. Dieser „kanonische Homomorphismus“ Φ ist wieder über k definiert und besitzt die „universal mapping“ Eigenschaft, d. h. jeder Homomorphismus Ψ von \mathfrak{D}_0 auf eine abelsche Mannigfaltigkeit \mathfrak{A} ist das Produkt von Φ mit einem rationalen Homomorphismus von \mathfrak{B} auf \mathfrak{A} . Zur Vervollständigung des Beweises wird gezeigt, daß \mathfrak{B} und \mathfrak{C}^n singularitätenfrei sind. W. Gröbner.

Waerden, B. L. van der: Zur algebraischen Geometrie. 18. Ketten in mehrfach projektiven Räumen. Math. Ann. 128, 135—137 (1954).

Sei $S_{m,n}$ ein zweifach projektiver Raum, d. h. die Gesamtheit aller Punktepaare (x, y) , wobei x aus einem projektiven S_m und y aus einem projektiven S_n entnommen wird. Die Theorie der Ketten im zweifach projektiven Raum wird auf die der Ketten im einfach projektiven Raum zurückgeführt, indem der $S_{m,n}$ mittels der Abbildung $z_{ik} = x_i y_k$ auf eine Vielfaltigkeit im einfach projektiven $S_{m+n+m+n}$ eineindeutig abgebildet wird. F. A. Behrend.

Nishimura, Hajime and Yoshikazu Nakai: On the existence of a curve connecting given points on an abstract variety. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A 28, 267—270 (1954).

In this paper the authors prove a lemma which is useful, e. g., to define the notion of algebraic equivalence of cycles on an algebraic variety. A precise statement of the lemma is as follows: Let P_i for $i = 1, \dots, m$ be a finite set of points on a variety W immersed in a projective space. Then one can find an absolutely irreducible curve C on W passing through these points. If some of the points among P_1, \dots, P_m are simple on W , one can require also that these points should be simple on C . Moreover if K is a field of definition of W containing the co-ordinates of P_1, \dots, P_m , then, by taking a suitable specialisation of C over \bar{K} if necessary, one can put further condition on C that it is algebraic over K . The proof is simple, i. e., one has only to apply the „theorem of Bertini“ to the trace on W of the complete linear system of hypersurfaces of degree at least equal to $m - 1$ in the ambient space of W . Generalizations to the case of abstract varieties are also discussed. J. Igusa.

Northcott, D. G.: On the local cone of a point on an algebraic variety. J. London math. Soc. 29, 326—333 (1954).

Let \mathfrak{P} be a prime ideal in a ring of polynomials $k[X] = k[X_1, \dots, X_n]$; it defines an irreducible algebraic variety V over k in the most naive sense. If \mathfrak{P} is contained in the maximal ideal generated by X_1, \dots, X_n , then V contains the origin O of the ambient n -space. Let $f(X)$ be an element of \mathfrak{P} ; the sum of the terms of lowest degree in $f(X)$ is denoted by $\bar{f}(X)$. The forms $\bar{f}(X)$ so obtained generate a module $\bar{\mathfrak{F}}(O, V)$ over k , which is actually a homogeneous ideal in $k[X]$. The algebraic set (or: algebraic variety over k) $C(O, V)$ belonging to $\bar{\mathfrak{F}}(O, V)$ is called the local cone of V at O . In the first five sections the author analyses the geometric meaning of $C(O, V)$ in connection with the local structure of V at O against the background of the theory of abstract local rings. In the final section the author gives an application to intersection theory, i. e., he proves the following theorem: Let V and W be absolutely irreducible varieties of complementary dimensions in n -space intersecting at O such that O is the only common point of $C(O, V)$ and $C(O, W)$. Then the intersection-multiplicity $i(O, V \cdot W)$ is equal to the product of the multiplicity $m(O, W)$ of O on W . This may be regarded as a generalization of the direct-part of the „criterion of multiplicity one“. J. Igusa.

Boughon, Pierre: Enveloppes d'une famille à un paramètre de variétés de dimension $n-1$ dans un espace de dimension n . C. r. Acad. Sci., Paris 238, 641—644 (1954).

In this paper the author tries to generalize the classical notion of „envelope“ of a family of „varieties“ depending on a parameter. If the characteristic of the universal domain is different from zero, one encounters with a pathological situation, which is so bad that the notion itself has little meaning in abstract algebraic geometry. There are a few points which the reviewer could not understand. For instance there is no reason to separate k and \bar{K} , which the author does throughout the paper. Also in the definition of W [lines 25—31, p. 642] the author seems to forget the order of inseparability of W_1 over $k(t)$. This leads to a uncertainty in later arguments.

J. Igusa.

Matsusaka, Teruhisa: On the theorem of Castelnuovo-Enriques. *Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ.* **4**, 164—171 (1954).

In this paper the author treats the connection between the Picard variety of a given variety and the Picard varieties of its subvarieties. If we call a variety, for a moment, to be „weak singular“ when its singular locus is of dimension less by at least 3 than the dimension of the variety, then the main result can be stated as follows: Let V be a variety of dimension at least 3, and let V be weakly singular. Let \mathfrak{B} be a linear system on V of dimension 2 defined over a field k such that (i) a generic member Z of \mathfrak{B} over k is a variety which is weakly singular, and that (ii) $\text{Tr}_Z \mathfrak{B}$ contains a variety again weakly singular. Then the natural homomorphism of the Picard variety of V into the Picard variety of Z , which is defined by intersecting V -divisors with Z , is actually an onto homomorphism with a finite kernel. In other words these two Abelian varieties are „isogenous“. The author makes use of the existence of „total“ maximal algebraic family, Poincaré's complete reducibility theorem and criteria of linear equivalence of divisors combining special techniques from his former papers. Also he makes use of the weak form of the duality between Albanese variety and Picard variety. One point must be remarked. In quoting Weil [lines 3—8, p. 167] the author missed an integral factor. Consequently the proposition [p. 166] and its corollary [p. 167] are proved only in a weaker form, but this does not affect the validity of the main result. As a corollary the author states that the Picard variety of a normal variety V with the same restriction as before is isomorphic to the Picard variety of its generic hyperplane section, i. e., generic over a field of definition of V . However the reviewer could not see how the assertion [lines 15—16, p. 170] that $\bar{K}(x')$ is separable over $\bar{K}(x^*)$ follows from the author's former results.

J. Igusa.

Spampinato, Nicolò: Varietà determinata da una terna ordinata di ipersuperficie dell' S_r complesso nell' S_{3r+2} . *Ricerche Mat.* **3**, 13—30 (1954).

In der Theorie der hyperkomplexen Zahlen und der damit verbundenen komplexen Darstellungen einer algebraischen Hyperfläche findet man die zwei algebraischen Mannigfaltigkeiten eines komplexen projektiven Raumes S_{3r+2} , die hier beschrieben werden; sie werden ganz unabhängig von der Theorie der Algebren untersucht. Die erste der zwei Mannigfaltigkeiten ist eine V_{3r-1} mit folgenden Gleichungen:

$$(1) f(x_i) = 0, \quad (2) \sum y_i \partial f / \partial x_i + g(x_i) = 0, \quad (3) \sum x_i \partial f / \partial x_i + h(x_i) = 0,$$

($i = 1, 2, \dots, r+1$), wo die x_i, y_i, z_i homogene Punktkoordinaten im S_{3r+2} bedeuten und f, g, h drei Formen derselben Ordnung n sind. Um die zweite V_{3r-1} zu erhalten, muß man nur an Stelle der Gleichung (3) folgende andere Gleichung einführen: (3') $\sum z_i \partial f / \partial x_i + \frac{1}{2} (\sum y_i \partial f / \partial x_i)^{(2)} + \sum y_i \partial g / \partial x_i + h(x_i) = 0$, wo $h(x_i)$ ebenfalls die Ordnung n hat. Beide V_{3r-1} haben die Ordnung n^3 . Es wird zunächst die Schnittmannigfaltigkeit der zwei Kegel (1), (2) untersucht und erst dann die zwei V_{3r-1} ; die erste ist Ort von ∞^{r-1} Räumen S_{2r} und die zweite ist Ort von ∞^{r-1} Quadriken V_{2r}^2 . Besonders wichtig ist, für beide V_{3r-1} , der Fall, wo die Formen g, h identisch verschwinden; in diesem Fall erhält man z. B. die erste V_{3r-1} folgender-

maßen: man betrachtet in drei linear unabhängigen Räumen S_r drei homographische Formen $V_{r-1}^{(n)}, V_{r-1}'^{(n)}, V_{r-1}''^{(n)}$ der Ordnung n [die erste ist die Form $f(x_i) = 0$; die anderen sind $\hat{f}(y_i) = 0$ und $\hat{f}(z_i) = 0$]; dann verbindet man jeden Punkt P von $V_{r-1}^{(n)}$ mit den Tangential- S_{r-1} von $V_{r-1}^{(n)}$ und $V_{r-1}''^{(n)}$ in den entsprechenden Punkten P' und P'' ; Ort der ∞^{r-1} so gewonnenen Räume S_{2r} ist die gesuchte V_{3r-1} . *E. Togliatti.*

Burniat, Pol: Surfaces algébriques de genre géométrique nul et de bigenre quelconque. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser.* **16**, 459—463 (1954).

L'A. construit des plans quadruples abéliens, c'est-à-dire des surfaces contenant une involution rationnelle d'ordre 4 composée au moyen de trois involutions du second ordre deux à deux permutable, dépourvus de courbe canonique mais possédant des courbes bicanoniques composées au moyen d'un faisceau de courbes elliptiques, par la discussion des courbes de diramation. L'un de ces plans quadruples a les genres $p_1 = p_2 = 0$, $p^1 = 1$, le bigenre étant quelconque; l'autre a les genres $p_1 = -1$, $p_2 = 0$, $p^1 = 1$, le bigenre étant impair quelconque. *L. Godeaux.*

Godeaux, Lucien: Note sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique. *Arch. der Math.* **6**, 1—4 (1954).

Résumé de la méthode de l'A. pour résoudre la singularité que possède, en un point de diramation, la surface F' image d'une involution d'ordre premier p sur une surface algébrique F , dotée de seuls points unis isolés. Enoncé du résultat général pour les trois catégories de points unis de 2^e espèce. *B. d'Orgeval.*

Godeaux, Lucien: Sur la surface cubique touchant un plan le long d'une droite. *Mathesis* **63**, 326—327 (1954).

Bottema, O.: A note on Veronese's surface. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* **57**, 400—402 (1954).

Über die Veronesesche Fläche wird gezeigt: Projiziert man diese 2-dimensionale Fläche V des 5-dimensionalen projektiven Raumes aus zwei verschiedenen Punkten, so besteht die vollständige Schnittfigur der beiden projizierenden Kegel aus V und aus drei Kegelschnitten. Hierfür werden ein synthetischer Beweis, welcher einige Sätze über die Veronesesche Fläche benutzt, und ein elementarer analytischer Beweis gegeben, welcher von der bekannten Parameter-Darstellung $X_1 = u^2$, $X_2 = v^2$, $X_3 = u^2$, $X_4 = uv$, $X_5 = uv$, $X_6 = uv$ von V ausgeht und in einem Vergleich der daraus entstehenden Parameter-Darstellungen der projizierenden Kegel besteht. *F. Bachmann.*

Hall, R.: Threefolds possessing an infinite group of birational self-transformations. *J. London math. Soc.* **29**, 419—428 (1954).

Die algebraischen Mannigfaltigkeiten V mit drei Dimensionen, die eine unendliche Gruppe G von birationalen Transformationen in sich zulassen, sind schon besonders von F. Severi, G. Fano und L. Roth untersucht worden. Verf. gibt hier eine zusammenfassende Darstellung des heutigen Standes dieser Theorie. Ist G eine kontinuierliche einparametrische Gruppe, so ist V entweder eine elliptische Mannigfaltigkeit oder mit einem Ort von ∞^2 Geraden birational äquivalent. Ist G kontinuierlich und zweiparametrisch, so ist V entweder hyperelliptisch oder mit einem Ort von ∞^2 Geraden oder von ∞^1 Ebenen birational äquivalent. Ist G kontinuierlich und dreiparametrisch, so ist V entweder birational, oder elliptisch, oder hyperelliptisch, oder eine Abelsche Mannigfaltigkeit, oder einem Ort von ∞^2 Geraden oder von ∞^1 Ebenen birational äquivalent. Nach allen diesen Fällen muß man noch diejenigen V betrachten, welche eine unendliche kontinuierliche Schar von birationalen Transformationen in sich zulassen, die keine Gruppe ist; und die anderen V , für die die Gruppe G diskontinuierlich ist; Verf. gibt Beispiele der verschiedenen Möglichkeiten, die sich hier darbieten und die von der Dimension der Trajektorien der Punkte von V abhängen. *E. G. Togliatti.*

Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

Finikov, S. P.: Über die wissenschaftliche Richtung des Lehrstuhls für Differentialgeometrie der Moskauer Staatlichen Universität. *Uspechi mat. Nauk* 9, Nr. 4(62), 3—18 (1954) [Russisch].

● **Biernacki, Mieczyslaw:** *Differentialgeometrie. I.* (Biblioteka Matematyczna. Tom 5.) Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe 1954. 240 S. Zł. 21,35. [Polnisch].

Ein zugängliches Lehrbuch der Kurventheorie des Euklidischen dreidimensionalen Raumes, bestimmt für die Anfänger. In dem ersten Kapitel (S. 7—95) gibt der Verf. elementare Kenntnisse über die Kurven der Ebene. In dem zweiten Kapitel (S. 95—202) findet man die Theorie der Kurven im Raume und die Theorie der abwickelbaren Flächen. In diesem Kapitel wendet der Verf. die vektorielle Methode an und gibt bei Beginn einige elementare Tatsachen über die Vektoren. Im Buche kann man einige interessante Themen (z. B. die Formel von Cauchy für die Länge der ebenen Kurve u. a.) finden, die gewöhnlich in anderen Büchern nicht angegeben sind. Am Ende jedes Paragraphen gibt der Verf. zahlreiche Übungsaufgaben. Die Hinweise und Lösungen sind am Ende des Buches zusammengestellt.

W. Wrona.

Sauer, R.: *Elementargeometrische Modelle zur Differentialgeometrie.* Elemente Math. 9, 121—131 (1954).

Als bedeutendster Vertreter der 1897 von S. Finsterwalder inaugurierten „Differenzengeometrie“, die sich um eine Veranschaulichung differentialgeometrischer Sachverhalte an Hand finiter, elementargeometrischer Modellgebilde bemüht, legt Verf. eine zusammenfassende Darstellung seiner wichtigsten Beiträge zu dieser Arbeitsrichtung vor. — Wird eine krumme Fläche etwa durch ein Dreieckspolyeder angenähert, bei welchem in jeder (inneren) Ecke P sechs Facetten zusammenstoßen mögen, so läßt sich für dasselbe ein „Krümmungsmaß“ $K(P) = \Phi(P)/F(P)$ erklären, wobei $3F$ den Flächeninhalt der zu P gehörigen Sechserkappe und Φ den Flächeninhalt ihres sphärischen Bildes bedeutet: da Φ durch das Defizit der sechs Dreieckswinkel um P auf 2π gegeben ist, ist K eine „innere“ Größe und bleibt bei Verknickung des Polyeders unverändert. Durch einen geeigneten Grenzprozeß, der auf eine Verfeinerung des Näherungspolyeders hinausläuft, kann man zur krummen Fläche übergehen und erhält dabei aus K das (biegungsinvariante) Gaußsche Krümmungsmaß der Grenzfläche. Mittels entsprechender Überlegungen läßt sich auch der Integralsatz von Gauß-Bonnet aus einer elementaren Interpretation ableiten [S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1925, 97—104 (1928); 1929, 306—324 (1929)]. — Ein Polyeder aus ebenen Vierecken, von denen je vier in einer Ecke zusammenstoßen, kann als differenzengeometrisches Modell einer krummen Fläche mit einem konjugierten Kurvennetz angesehen werden. Es ist im allgemeinen ebensowenig verknickbar als eine Fläche Verbiegungen erlaubt, die ein vorgegebenes konjugiertes Netz konjugiert bleiben lassen. Als Beispiel einer speziellen Klasse von Viereckspolyedern mit starren Facetten, die doch Verknickungen gestatten, werden nun Trapezgitter betrachtet, bei welchen die Kantenzüge der einen Schar in parallelen, die der anderen Schar in dazu normalen Ebenen verlaufen (vgl. dies. Zbl. 2, 411). Durch Grenzübergang gelangt man zu sogenannten „gesimsaffinen“ Flächen, welche ein konjugiertes Netz aus Schichtenlinien und untereinander affinen Profilkurven in zur Schichtenstellung normalen Ebenen (die i. a. einen Zylinder einhüllen) tragen. Diese Flächen — die als Sonderfälle die echten Gesimsflächen, Drehflächen und Schiebflächen umfassen — gestatten eine zwangsläufige Verbiegung, welche die charakteristischen Eigenschaften des genannten Kurvennetzes erhält.

W. Wunderlich.

Arf, C.: *Remarques à propos d'un mémoire de K. Erim.* *Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A* 19, 45—54 (1954).

Die infinitesimale Kennzeichnung einer ebenen Kurve mittels der Folge ihrer (höheren) Krümmungszentren wurde von L. Biran und K. Erim [Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér A 8, 339–344 (1943); 10, 1–24 (1945)] auf den Raum ausgedehnt. An die Stelle der Krümmungsmittelpunkte und höheren Evoluten der ebenen Kurve tritt für eine beliebige Strahlfläche des Raumes die Folge der augenblicklichen Krümmungsachsen und die von diesen erzeugten Regelflächen (höhere Evolutenflächen der gegebenen Strahlfläche). Hierbei wird das begleitende Dreiein (Erzeugende, Zentraltangente, Zentralnormale) einer Regelfläche jeweils um die Krümmungsachse in seine Nachbarlage verschraubt. Verf. leitet die Ergebnisse von Biran und Erim ohne Verwendung dualer Größen und ohne Zuhilfenahme des Studyschen Übertragungsprinzips der Liniengeometrie her, wodurch größere Anschaulichkeit erzielt wird und eine unmittelbare geometrische Deutung erfolgen kann. Es wird eine ähnliche Reihenentwicklung wie für ebene Kurven aufgestellt und auf die Approximation einer Regelfläche bis zu einer gewissen Ordnung eingegangen.

H. R. Müller.

Klepper, W.: Über die natürliche Gleichung $R(s) = \mu a (\lambda + \cos(s/a))$. Elemente Math. 9, 56–63 (1954).

Verf. zeigt in ergänzender Berichtigung zu einer Bemerkung von L. Bieberbach [Differentialgeometrie (dies. Zbl. 5, 261), S. 25], daß die betrachtete natürliche Gleichung für bestimmte Werte von $\lambda = 1$ und $\mu > 0$ Eilinen mit $2m$ Scheiteln ($m \geq 1$) darstellt, wobei der Umfang der Kurve das m -fache der primitiven Periode $p = 2a\pi$ der Funktion $R(s)$ ist. Die Arbeit bringt interessante genauere Darlegungen über die gestaltlichen Möglichkeiten der betrachteten Kurvenfamilie mit guten Figuren.

W. Süß.

Dubnov, Ja. S.: Zu den Gleichungen von Peterson. Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 1 (59), 101–106 (1954) [Russisch].

Das Hauptziel dieser Arbeit ist zu zeigen, daß die Codazzischen Gleichungen, welche in bezug auf die Krümmungslinien als Parameterlinien ausgedrückt werden, den Petersonschen Gleichungen [Istoriko-mat. Issledovanija 5, 87–112 (1952)] vorzuziehen sind, wenn man die geometrische Bedeutung dieser Gleichungen klar machen will. Wenn zwei Kurven C und C^* in einer Combescureschen Zuordnung stehen, dann ist bekannt, daß die Beziehung $\kappa ds = \kappa^* ds^*$ besteht an den entsprechenden Punkten von C und C^* , wobei κ die Krümmung und s die Länge sind. Eine Kurve C auf einer Fläche S und ihre Bildkurve C^* auf der Einheitskugel S^* bezüglich der Gaußschen sphärischen Abbildung stehen bekanntlich in einer Combescureschen Zuordnung, somit ist $\kappa_g ds = \kappa_g^* ds^*$, wobei κ_g bzw. κ_g^* die geodätische Krümmung von C bzw. C^* bedeuten. In bezug auf die zwei Familien von Krümmungslinien bekommen wir daher zwei Beziehungen dieser Art, d. h. $e_v = KE_v$, $g_u = KG_u$. Der Verf. zeigt, daß diese zwei Beziehungen nichts anderes als die Petersonschen Gleichungen auf der einen Seite und die Codazzischen Gleichungen auf der anderen Seite sind.

A. Kawaguchi.

Backes, F.: Sur la déformation, due à Bonnet, des surfaces à courbure moyenne constante. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 40, 938–944 (1954).

Es werden die von Bonnet, sowie von Darboux und Bianchi behandelten Familien von Flächen fester mittlerer Krümmung betrachtet, die unter Erhaltung der Hauptkrümmungsradien aufeinander abwickelbar sind. Verf. leitet eine sehr einfache Darstellung der Koeffizienten der ersten beiden Grundformen dieser Flächen her, die sich zu Paaren komplementärer Flächen mit entsprechenden Krümmungslinien anordnen lassen. Nur für Minimalflächen fallen diese Paare komplementärer Flächen in eine Fläche jeweils zusammen.

H. R. Müller.

Šulikovskij, V. I.: Eine invariante Charakterisierung der Metrik einer Spiralfläche. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 99, 35–36 (1954) [Russisch].

Läßt sich die Metrik einer Fläche auf die Gestalt $ds^2 = e^{u+V(v)}(du^2 + dv^2)$ bringen, so spricht Verf. von einer Spiralfäche. Aus den charakteristischen Eigenschaften, daß die Tschebyscheffschen Vektoren des u, v -Netzes Gradienten sind und die zwei daraus gewonnenen Potentiale, addiert oder voneinander subtrahiert, harmonische Funktionen, leitet Verf. für die Koeffizienten einer gegebenen Metrik ein System von Differentialgleichungen als Bedingungsgleichungen einer Spiralfäche her, das er dann auf Lösbarkeit untersucht.

Joachim Nitsche.

Deaux, R.: Géodésiques d'un hélicoïde développable ou d'un cône de révolution. *Mathesis* 63, 363—365 (1954).

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Morduchaj-Boltovskoj, D.: Die geodätischen Linien eines Ellipsoids im nicht-euklidischen Raume. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. 94, 991—993 (1954) [Russisch].

Für jeden Punkt P einer geodätischen Linie auf einem Ellipsoid im euklidischen R_3 gilt die Joachimsthal'sche Beziehung: $r \cdot d = \text{const.}$ wobei r die Länge des zur Tangente an die Geodätische parallelen Ellipsoiddurchmessers und d der Abstand der Tangentialebene in P von O bedeuten. Verf. zeigt in dieser Note nach einiger Rechnung, daß für den hyperbolischen Raum die entsprechende Beziehung $\text{sh } d \cdot \text{th } r = \text{const.}$ lautet. Ferner weist er nach, daß ähnlich wie im euklidischen Falle die Gleichungen der geodätischen Linien sich durch zwei Beziehungen zwischen hyperelliptischen Integralen erster Gattung ausdrücken lassen.

W. Burau.

Manara, Carlo Felice: Invarianti proiettivi differenziali nello spazio e curve W . *Boll. Un. mat. Ital.*, III. Ser. 9, 237—240 (1954).

L'A. considera nello spazio ordinario tre terne punto-retta-piano appartenentisi: dimostra che questa configurazione, se generica, è caratterizzata proiettivamente da tre invarianti (birapporti). Se si fissano due delle tre terne e due dei tre invarianti la retta della rimanente terna può variare in una congruenza formata dalle tangenti a una famiglia di curve W . Se i tre invarianti sono uguali a -1 trattasi di tre terne punto-tangente-piano osculatore di una cubica sgheмба.

P. Buzano.

Vincensini, Paul: Sur les surfaces dont les réglées asymptotiques d'un système appartiennent à des complexes linéaires. *C. r. Acad. Sci.*, Paris 239, 1113—1114 (1954).

L'A. considère les réglées asymptotiques engendrées par les tangentes aux asymptotiques d'un mode aux points de chacune des asymptotiques de l'autre mode et suppose que ces réglées appartiennent à des complexes linéaires. Il montre qu'en appliquant une transformation de Lie à une surface possédant un réseau conjugué formé d'une famille de géodésiques et d'une famille de courbes planes, on obtient une surface du type précédent. Il en est de même en particulier pour les transformées de Lie des surfaces de Monge.

L. Godeaux.

Godeaux, Lucien: Sur une correspondance entre surfaces avec conservation des asymptotiques. *Bull. Sci. math.*, II. Sér. 78, 139—146 (1954).

Les asymptotiques en un point d'une surface (x) se représentent sur la quadrique Q de S^3 par deux points U et V , engendrant une suite de Laplace autopolaire, les points U_n et V_n ayant pour espaces polaires $U_{n-2}V_{n-1}U_nV_{n+1}V_{n+2}$, et $U_{n-2}U_{n-1}U_nV_{n+1}V_{n+2}$, d'où résulte la conjugaison des plans $U_{n-1}V_nV_{n+1}$, $U_{n-1}U_nV_{n+1}$, coupant Q selon deux coniques, images des deux systèmes de génératrices de la quadrique Φ_n associée à (x) ; deux de ces quadriques consécutives ont en commun un quadrilatère gauche, représenté sur Q par C_1 et C_2 de $V_{n+1}V_{n+2}$ et par D_1 et D_2 de $U_{n+1}U_{n+2}$; ses sommets sont points de contact des quadriques Φ_n et Φ_{n+1} et caractéristiques pour chacune d'elles. L'A. recherche la condition pour que les asymptotiques des 4 nappes de l'enveloppe commune à Φ_n et Φ_{n+1} correspondent aux asymptotiques de (x) . En introduisant les points A, B, A', B' pôles de $U_n, U_{n+1}, U_{n+2}, V_{n+1}, V_{n+2}$, $U_{n+1}, U_{n+2}, U_{n+3}, V_{n+2}, V_{n+3}$, $V_n, V_{n+1}, V_{n+2}, U_{n+1}, U_{n+2}, U_{n+3}, U_{n+1}, U_{n+2}$, on voit que la droite AB coupe Q aux images des diagonales du quadrilatère précédent; si $A' = B$, les points A et B engendrent une suite de Laplace doublement inscrite dans la précédente, on en déduit $B' = A$; les points C et D décrivent également des suites de Laplace. Si x_{ik} est l'intersection de c_i et d_k ces surfaces corre-

spondent à (x) avec conservation des asymptotiques et réciproquement ceci exige $A' = B$. La condition N. et S. cherchée est que les tangentes aux courbes $u = C_1$ et $(v = C_2)$ aux intersections de Q avec $U_{n+1}U_{n+2}$, $V_{n+1}V_{n+2}$ soient concourantes. On peut alors associer aux points des nappes communes aux enveloppes de Φ_n et Φ_{n+1} une suite de quadriques Φ_n, \dots , et (x) fait partie de l'enveloppe de Φ_n, Φ_{n+1} . B. d'Orgeval.

Muracchini, Luigi: Ancora sulle varietà V_3 analitiche pluririgate. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 9, 262–265 (1954).

L'A. completa una sua precedente dimostrazione (questo Zbl. 51, 390) concernente le V_3 2-rigate, liberandosi dalla restrizione che la V_3 non soddisfi ad altre equazioni lineari all'infuori di quelle esprimenti che essa è 2-rigata e delle loro conseguenze differenziali. P. Buzano.

Backes, F.: Sur un couple de cercles engendrant des congruences doublement stratifiables. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 40, 613–620 (1954).

Es sei C ein Kreis einer ersten zyklischen Kongruenz, d. h. einer Kreiskongruenz, in der jeder Kreis C genau zwei unendlich benachbarte Kreise besitzt, die C in zwei Punkten schneiden; die beiden dadurch bestimmten Kugeln werden Fokal-Kugeln genannt. Jeder Kreis C kann als Schnitt seiner beiden Fokal-Kugeln S_1 und S_2 festgelegt werden, wobei S_1 und S_2 von zwei Parametern u und v abhängen. Ebenso sei C' ein Kreis einer zweiten zyklischen Kongruenz, der durch die beiden Fokal-Kugeln S_3 und S_4 festgelegt wird. Verf. untersucht zuerst folgendes Problem: Bestimme eine durch C gehende Kugel $K = S_1 + \lambda(u, v) S_2$, deren charakteristische (char.) Punkte auf C liegen, ebenso eine durch diesen Kreis C' gehende Kugel $K' = S_3 + \mu(u, v) S_4$, deren char. Punkte auf C' liegen. Es gibt sogar durch jeden der Kreise C und C' eine einfach unendliche Schar von Kugeln, deren char. Punkte sich auf dem andern Kreis verteilen. Des weiteren wird nach den wichtigsten Eigenschaften der Schnittkongruenz zweier zugeordneter Kugeln K und K' gefragt und gezeigt, daß diese Kongruenz ebenfalls eine zyklische ist, mit K und K' als Fokal-Kugeln eines jeden Schnittkreises. Die Rechnungen werden besonders übersichtlich durch die Verwendung eines schiefwinkligen pentasphärischen Bezugssystems, dessen Theorie Verf. in einer vorangehenden Arbeit entwickelt hat (dies. Zbl. 44, 180). Das hier benutzte System besteht aus den Kugeln S_1, S_2, S_3, S_4 , sowie einer festen Kugel S_5 . Von den 50 Komponenten (Rotationen), die die infinitesimale Verschiebung des allgemeinsten Bezugssystems charakterisieren, verschwinden im vorliegenden Falle 28; die übrigen Komponenten müssen noch gewissen Integrabilitätsbedingungen vom Maurer-Cartanschen Typus genügen; diese Bedingungen können aber erfüllt werden, wie deren Integration zeigt. Damit ist die Existenz der verlangten Konfiguration nachgewiesen. Die Funktionen λ und μ genügen je einem Riccatischem System, jedes reduzierbar auf eine Laplacesche Gleichung vom hyperbolischem Typus. R. Ullrich.

Gejdel'man, R. M.: Zur Theorie eines dreiparametrischen Kreiskomplexes. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 99, 201–204 (1954) [Russisch].

Es werden die Fälle untersucht, daß ein Kreiskomplex sich als Schar von speziellen Kreissystemen auffassen läßt. Analytisch führt die Aufgabe auf die Untersuchung eines Systems von alternierenden Differentialgleichungen. — Zum Schluß wird die Frage behandelt, wann die von den Fokalkugeln umhüllten zwei Flächen je ein dreifaches Orthogonalsystem erzeugen. Dann lassen sich je zwei entsprechende Flächen durch eine R -Transformation aufeinander abbilden. Dabei treten 4 Fälle auf, von denen 2 schon von Darboux untersucht sind. Ein weiterer ist der, daß der Komplex in eine Schar von R -Systemen zerfällt und die Fokallflächen eine Schar sphärischer Krümmungslinien besitzen. Joachim Nitsche.

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Laugwitz, Detlef: Differentialgeometrie ohne Dimensionsaxiom. I. Tensoren auf lokallinearen Räumen. Math. Z. 61, 100–118 (1954).

Verf. entwickelt einen Aufbau der Differentialgeometrie unendlichdimensionaler Räume, der besonders auf Grund der Symbolik in der Struktur seiner Formeln eng an den endlich-dimensionalen Fall anschließt und gewisse, bezeichnungsmäßig bedingte Abweichungen vermeidet. Der vorliegende erste Teil enthält dabei eine Zusammenstellung der grundlegenden Hilfsmittel und Bezeichnungsweisen. Den Untersuchungen wird zunächst ein normierter linearer Raum ohne Dimensionsbeschränkung zugrunde gelegt. Bei der Behandlung der linearen Abbildungen und der Multilinearformen wird eine Symbolik verwandt, die ihrer äußeren Form nach vollständig der im endlich-dimensionalen Fall gebräuchlichen Summation über doppelte Indizes entspricht, inhaltlich aber invariant im Sinne der stets benutzten Operator-Auffassung zu deuten

ist. Es folgt die Behandlung quadratischer Formen und des Differentiationsprozesses im Sinne von Fréchet, wobei gleichzeitig Verallgemeinerungen bekannter Sätze erzielt werden. Der Übergang zur Riemannschen Geometrie wird durch den Begriff des lokal-linearen Raumes vermittelt. Dabei heißt ein topologischer Raum lokal linear bezüglich eines normierten Vektorraumes T , wenn er mit offenen Mengen überdeckt werden kann, die homöomorph zu offenen Mengen aus T sind. Die hierbei auftretenden Homöomorphismen heißen lokale Koordinatensysteme, und der Übergang von einem Koordinatensystem zu einem anderen wird als hinreichend oft differenzierbar vorausgesetzt. In solchen Räumen werden sodann Vektoren, Tensoren und sie verknüpfende Operationen in voller Analogie zum Üblichen eingeführt. Lediglich die Verjüngung von Tensoren und einige dimensionsbedingte Begriffsbildungen entziehen sich dieser Übertragung, woraus sich eine, allerdings sachlich bedingte, Verarmung an Invarianten beim dimensionsfreien Aufbau der Geometrie ergibt. Dagegen ist die Einführung von Tensoren beliebiger Stufenzahl uneingeschränkt möglich.

H.-J. Kowalsky.

Laugwitz, Detlef: Differentialgeometrie ohne Dimensionsaxiom. II. Riemannsche Geometrie in lokal-linearen Räumen. Math. Z. 61, 134—149 (1954).

Aufbauend auf den im ersten Teil der Arbeit bereitgestellten Grundbegriffen wird jetzt die Riemannsche Geometrie unendlich-dimensionaler Räume entwickelt. Die besondere Art der Begriffsbildung und Symbolik gestattet dabei eine durchgreifende Analogie zum endlich-dimensionalen Fall, die besonders beim Riemannschen Tensor und bei der Einführung der Metrik deutlich wird im Gegensatz zu sehr umständlichen Formulierungen bei anderen Darstellungen. Daß dieser Aufbau der Differentialgeometrie auch über Bekanntes hinaus zur Gewinnung neuer Resultate dienen kann, zeigt Verf. am Beispiel der Kurven in Riemannschen Räumen. Es ergibt sich, daß unter gewissen Regularitätsvoraussetzungen bereits die abzählbar-unendlich vielen Krümmungen ein vollständiges Invariantensystem bilden: auch wenn die Dimension des Raumes über-abzählbar ist.

H.-J. Kowalsky.

Kurita, Minoru: On the isometry of a homogeneous Riemann space. Tensor. n. Ser. 3, 91—100 (1954).

Der Verf. leitet eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür ab, daß ein homogener Riemannscher Raum isometrisch auf einen anderen homogenen Riemannschen Raum abgebildet werden kann. Diese Bedingung lautet $\sum_{k,m} R_{ijk\alpha} t_{ij} t_{mk} = \sum_{k,m} R_{imk\alpha} t_{ik} t_{jm}$, wo R den Krümmungstensor des Raumes bedeutet, t_{ij} die orthogonale Matrix, mit deren Hilfe die Isometrie der beiden Räume gegeben ist ($\omega_j = \sum_i t_{ij} \omega_i$; $\sum_i \omega_i^2 = \sum_j \omega_j^2$). Als Anwendung beweist der

Verf. den Satz, daß, wenn ein Riemannscher Raum R ein direktes Produkt von zwei homogenen Riemannschen Räumen R_1 und R_2 ist, wobei für wenigstens einen von ihnen der Index „of nullity“ verschwindet [der Begriff der „Nullindizes“ wurde von S. S. Chern und N. H. Kuiper eingeführt, Ann. of Math., II. Ser. 56, 422—430 (1952)], jede Isometrie des Raumes R , die genügend nahe der identischen Transformation ist, ein direktes Produkt der entsprechenden Isometrien von R_1 und R_2 ist. Alsdann bestimmt der Verf. alle homogenen Riemannschen Räume von der Eigenschaft, daß die lineare Isometriegruppe jeden Vektor eines $(n-k)$ -dimensionalen linearen Unterraumes des Tangentialraumes in Ruhe läßt und zugleich die volle Drehungsgruppe in dem komplementären k -dimensionalen Raum induziert. Diese Räume zerfallen in 4 verschiedene Typen, für welche die Linienelemente entsprechend durch die Formeln (A), (B), (C), (D) auf den Seiten 98, 99, 100 gegeben sind. Dieses Resultat ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von Cartan ($n=3$, $k=2$) und ebenso eines von Yano ($k=n-1$).

St. Golab.

Vries, Hans Ludwig de: Über Riemannsche Räume, die infinitesimale konforme Transformationen gestatten. Math. Z. 60, 328—347 (1954).

Gestattet ein Riemannscher Raum infinitesimale konforme Transformationen (kurz k -Transformationen), so spiegelt sich dieser Sachverhalt in der (kanonischen) Form des zugehörigen Fundamentaltensors, d. h. derjenigen Form des Fundamentaltensors wider, welche diese Eigenschaft abzulesen gestattet. Weist Γ_n nur eine solche k -Transformation auf, so ist dieser konform zu einem Raum mit Translation. Das Problem wird interessanter, wenn man den Bahnkurven der Transformation spezielle Bedingungen auferlegt. Sollen diese z. B. geodätische Linien des Raumes sein, so ist im allgemeinen der die Transformation (gk -Transformation) erzeugende Vektor ein Gradient. Soll Γ_n mehrere gk -Transformationen gestatten, so erscheint die kanonische Form in den einfachsten Fällen als konform-separabel.

A. Dinghas.

Sinjukov, N. S.: Über die geodätische Abbildung Riemannscher Räume auf symmetrische Riemannsche Räume. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 98, 21–23 (1954) [Russisch].

On sait (Beltrami) qu'un espace de Riemann V_n admet une représentation géodésique sur un espace euclidien seulement si V_n est à courbure constante. L'A. se demande si un espace V_n ($n \geq 2$) peut admettre une représentation géodésique sur un espace \bar{V}_n symétrique. Cela signifie qu'en désignant par Γ_{ij}^k et $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ les symboles de Christoffel de la seconde espèce des V_n et \bar{V}_n on doit avoir $\bar{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \delta_i^k q_j + \delta_j^k q_i$ où δ_i^k est égal à zéro pour $i \neq k$ et à l'unité pour $i = k$ et où q_i est un vecteur covariant, le tenseur dérivé $\hat{R}_{ij,p}^k$ du tenseur de courbure de \bar{V}_n étant nul. On trouve que cela ne peut avoir lieu pour q_i non nul que si V_n est à courbure constante. Le résultat s'étend aux espaces à connexion affine A_n à tenseur de Ricci symétrique.
G. Vranceanu.

Singal, M. K. and Ram Behari: Generalization of Codazzi's equations in a sub-space imbedded in a Riemannian manifold. Math. Student 22, 31–36 (1954).

Die verallgemeinerten Gleichungen von Gauss-Codazzi in bezug auf eine Kongruenz von Kurven in einer Riemannschen V_{n-1} , die eine eingebettete V_n nicht tangiert (vgl. R. S. Mishra, dies. Zbl. 49, 118) werden in dieser Arbeit weiter verallgemeinert, indem in einer V_m , in welche eine V_n ($n < m$) eingebettet ist, $m - n$ Kurvenkongruenzen gegeben sind. Einige Spezialfälle werden nachher aus den allgemeinen Formeln hergeleitet.
St. Golab.

Fenchel, W.: On curvature and Levi-Civita's parallelism in Riemannian manifolds. Convegno Internaz. Geometria differenz., Italia, 20–26 Set. 1953, 99–103 (1954).

Mit Hilfe der Parallelverschiebung von Levi-Civita wird eine geometrische Erklärung der Gauß-Bonnetschen Formel $2\pi = \int_{R^1} k \, ds = \int_{R^2} K \, dV$ gegeben, wobei R^2 ein durch eine geschlossene Kurve R^1 begrenztes Gebiet einer zweidimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit ist, und k und ds bzw. K und dV die geodätische Krümmung und das Linienelement von R^1 bzw. die Gauss'sche Krümmung und das Inhaltselement von R^2 sind. Der Verf. betrachtet erstens das Gebiet R^2 und die Grenzkurve R^1 als eindeutige Bilder eines Kreissegmentes und seines Grenzkreises c_0 im Euklidischen Raume und zieht auch die Bilder einer Zerlegung eines Kreises durch endliche viele Mittelpunktsstrahlen $c_1, \dots, c_n, c_{n+1} = c_1$ und konzentrische Kreise c_0, c_1, \dots, c_j in Betracht. $P_{i,j}$ sei das Bild des Schnittpunktes von c_i und c_j . Wenn die normalen Vektoren von R^1 am Punkte $P_{i+1,0}$ bzw. $P_{i,0}$ längs des Weges $P_{i+1,0} P_{i,0} P_{i+1,1} P_{i,1} P_{i+1,2} P_{i+2,2} \dots P_{i+1,\beta} P_{i,\beta} P_{i+1,\beta} P_{i,\beta} O$ bzw. $P_{i,0} P_{i,1} P_{i,2} \dots P_{i,\beta} O$ parallel übertragen werden, dann ist der Winkel $\angle q_i$ zwischen den erhaltenen Vektoren am Punkt O , der das Bild des Kreismittelpunktes ist, $\angle q_i = k(P_{i,0}) \angle c_i + \sum_{j=1}^{\beta+1} K(P_{i,j}) \angle V_{i,j} + o(\angle V_i)$, während $\angle c_i, \angle V_{i,j}$ bzw. $\angle V_i$ die Kurvenlänge $P_{i,0} P_{i+1,0}$ bzw. den Flächeninhalt des Viereckes $P_{i,j} P_{i,j+1} P_{i+1,j+1} P_{i+1,j}$ bzw. den Flächeninhalt des Dreieckes $O P_{i,0} P_{i+1,0}$ bedeuten. Da $\sum_{i=1}^n \angle q_i = 2\pi$, erhält man $2\pi = \sum_{i=1}^n k(P_{i,0}) \angle c_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\beta+1} K(P_{i,j}) \angle V_{i,j} + o(1)$, was

für $n \rightarrow \infty, \beta \rightarrow \infty$ zur Gauß-Bonnetschen Formel führt. Darauf erweitert Verf. diese Tatsache für den Fall des n -dimensionalen Gebietes R^n mit einer geschlossenen Grenze R^{n-1} , d. h. $\omega_{n-1} = \int_{R^{n-1}} k_0 \, ds + \int_{R^n} K_0 \, dV$ [siehe S. Chern, Ann. of Math., II. Ser. 46, 674–684 (1945)], wobei ω_{n-1} das $(n-1)$ -dimensionale Oberflächenelement der Einheitskugel des Euklidischen n -dimensionalen Raumes bedeutet. An Stelle von Winkeln zwischen zwei Vektoren treten dabei die von n Vektoren aufgespannten $(n-1)$ -dimensionalen Winkel.
A. Kawaguchi.

Ingarden, R. S.: Über die Einbettung eines Finslerschen Raumes in einem Minkowskischen Raum. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 2, 305–308 (1954).

W. W. Vagner bewies, daß sich jeder n -dimensionale Finslersche Raum mit der Metrik $ds = F(x_\mu, x'_\mu) dt$ in einem $2n$ -dimensionalen [aber i. a. nicht in einem $(2n-1)$ -dimensionalen] Minkowskischen Raum mit der Maßbestimmung $ds = M(y'_i) dt$ einbetten läßt (dies. Zbl. 39, 178). Verf. geht über diesen reinen Existenz-

beweis hinaus und gibt eine explizite Form dieser Einbettung an, nämlich $M(y'_i) = F(y'_\mu/y'_{n+\mu}, y'_{n+\mu})$, wobei $y_\mu = x_\mu^2/2$ und $y_{n+\mu} = x_\mu$ ist. W. Barthel.

Libermann, Paulette: Sur le problème d'équivalence de certaines structures infinitésimales. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **36**, 27—120 (1954).

This is a very extensive investigation into Elie Cartan's Problem of Equivalence, with many applications in the determination of special structures in differential Geometry. A first chapter deals with Ch. Ehresmann's theory of Pfaffian systems, finite and infinite Lie groups in terms of jets (cf. this Zbl. **43**, 174; **46**, 407, 408) of which no complete exposition has appeared as yet. The general problem of equivalence is treated in the second chapter, in terms of the méthode du repère mobile. At the end there is given a method to decide whether or not there exists a well defined affine connexion to any given torsion tensor. In the second part the apparatus of the first one is used for the investigation of differential geometric structures, whose structure group (cf. Ch. Ehresmann, this Zbl. **39**, 397) is a subgroup of the general linear group of an even number of variables. Most of the author's previous work is assembled here in a very systematic manner, e. g. unitary, symplectic, almost-complex, paracomplex, unitary-quaternionian etc. structures. The problem of the integration of all kinds of „almost“ structures (quasi-complex, quasi-paracomplex) receives a uniform, natural and simple treatment which includes metric geometry as well as conformal one. H. Guggenheimer.

Eckmann, Beno: Structures complexes et transformations infinitésimales. Convegno Internaz. Geometria differenz., Italia, 20—26 Sett. 1953, 176—184 (1954).

On sait que sur une variété différentiable V de dimension paire, toute structure analytique complexe induit une structure presque complexe, c'est à dire un champ différentiable de transformations J_x , ($x \in V$), où J_x est un automorphisme de l'espace tangent en x tel que $J_x^2 = \text{Identité}$. Pour que réciproquement une telle structure dérive d'une structure analytique complexe (nécessairement unique) elle doit satisfaire à certaines conditions d'intégrabilité, dues à de Rham (voir aussi Ch. Ehresmann, ce Zbl. **49**, 129; B. Eckmann-A. Frölicher, ce Zbl. **42**, 405), suffisantes en tout cas dans le cas analytique réel. L'A. les discute du point de vue champs de vecteurs et remarque notamment qu'elles peuvent s'exprimer par $[Ja, Jb] = [a, b] + J[Ja, b] + J[a, Jb]$ (a, b champs de vecteurs tangents, $[,]$ crochet de Poisson, J transformation induite par les J_x). — Soit G un groupe de Lie connexe, H un sous-groupe fermé connexe. On voit aisément que la condition „l'espace homogène G/H possède une structure analytique complexe invariante par G “ est de nature infinitésimale. L'A. annonce que cela a lieu si et seulement si l'extension complexe \mathfrak{G}^* de l'algèbre de Lie \mathfrak{G} de G est somme directe de deux sous-algèbres (sur les réels) complexes conjuguées relativement à \mathfrak{G} , dont l'intersection soit l'extension complexe de l'algèbre de Lie de H . En particulier il redémontre un résultat de H. C. Wang (ce Zbl. **55**, 166) affirmant que tout groupe de Lie compact connexe de dimension paire admet une structure complexe invariante à gauche. A. Borel.

Wang, Hsien-Chung: Complex paralisable manifolds. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 771—776 (1954).

A complex analytic manifold M of complex dimension n is said to be complex paralisable if it admits n holomorphic 1-forms ω^i linearly independent at every point. Then we have $d\omega^i = \sum C_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k$, with holomorphic C_{jk}^i . From now on, M is supposed to be compact. Then the C_{jk}^i are constant and it follows easily that M is isomorphic to the quotient G/D of a simply connected complex Lie group G with constants of structure C_{jk}^i by a discrete subgroup D . Moreover, the cohomology ring of the ring of holomorphic exterior differential forms on M is isomorphic to the cohomology ring of the complex Lie algebra of G . It follows in particular that M is kählerian if and only if it is a complex torus. A. Borel.

Walker, A. G.: Riemann extensions of non-Riemannian spaces. Convegno Internaz. Geometria differenz., Italia, 20—26 Sett. 1953, 64—70 (1954).

In einer in V_n eingebetteten X_m wird bekanntlich eine Riemannsche Geometrie induziert. Man kann diesen Prozess verallgemeinern, indem man in einer V_{2n} nur eine beschränkte Gruppe von Koordinatentransformationen zuläßt. Hier wird der Fall betrachtet, daß die V_{2n} ein kovariant konstantes n -Richtungsfeld enthält und die Koordinatentransformationen eine gewisse spezielle Form der g_{ij} invariant lassen. Die $2n$ Koordinaten lassen sich dann in zwei Gruppen verteilen, x^i und ξ_α ($\alpha = 1, \dots, n$), so daß sich die x^i in sich transformieren und die ξ_α nach der Formel $\xi'_\alpha = \partial x^\beta / \partial x'^\alpha (\xi_\beta + \Phi_\beta(x))$. Für $\Phi_\beta = 0$ sind dann die ξ_α Komponenten eines

kovarianten Vektors im Raume der x^i . Für die $g_{\alpha\beta}$ kommt eine ziemlich komplizierte, Φ_β enthaltende Transformationsformel. Entwickelt man die $g_{\alpha\beta}$ in eine Potenzreihe nach den ξ_α , so ergibt sich, daß die Koeffizienten dieser Reihe für $\Phi_\beta = 0$ sämtlich Konstanten sind, bis auf die des zweiten Termes, die sich transformieren wie die Parameter einer affinen Übertragung. Damit ist eine affine Übertragung in der X_n induziert. Für $\Phi_\beta = 0$ kann man andere Geometrien in der X_n erhalten. Die V_{2n} heißt die „Riemannextension“ der X_n . Umgekehrt kann man von einer X_n mit einer bekannten Geometrie ausgehen und eine passende Riemannextension suchen. Es ergibt sich eine Anzahl von Sätzen über die Möglichkeiten in X_n und V_{2n} . Zum Beispiel hat Patterson (dies. Zbl. 46, 154) bewiesen, daß die allgemeine zu X_n gehörige V_{2n} einfach harmonisch ist, wenn die X_n eine einfach harmonische V_n ist.

J. A. Schouten.

Cossu, Aldo: Alcune osservazioni sul confronto di due connessioni affini. Rend. Mat. e Appl. 13, 189—198 (1954).

Etant donné un espace $X_n(x^1, \dots, x^n)$ possédant deux connexions affines L_{hk}^i et \tilde{L}_{hk}^i les quantités $\psi_{hk}^i = L_{hk}^i - \tilde{L}_{hk}^i$ sont les composantes d'un tenseur, donc on peut associer dans chaque point x^1, x^2, \dots, x^n de X_n une transformation centro-affine des vecteurs (1) $\tilde{z}^i = z^i - \psi_{hk}^i z^k dx^h$ où ψ_{hk}^i sont calculés dans le point x_0 . On montre comment les propriétés de l'homographie vectorielle (1) nous conduisent aux propriétés de l'ensemble de deux connexions et de leurs rapports mutuels et inversement. Si nous avons $\psi_{kh}^i = \psi_{hk}^i$ les tenseurs de torsion des deux connexions sont égaux. Si $L_{hk}^i - \tilde{L}_{hk}^i = L_{kh}^i - \tilde{L}_{kh}^i$ nous avons $\psi_{hk}^i + \psi_{kh}^i = 0$ donc les vecteurs $\tilde{z}^i = \varrho dx^i$ sont unis dans l'homographie (1). En général la recherche des vecteurs unis par (1) ($\tilde{z}^i = \varrho z^i$) qui correspond à des vecteurs qui se transportent de la même manière par les deux connexions, dépend d'une équation caractéristique. On étudie en particulier le cas où $\varrho = 1$ et $\psi_{hk}^i dx^h = u^i \varphi_k$.

G. Vranceanu.

Prasad, Ayodhya: Inter-relations of paths and affine connections in a non-Riemannian space. Bull. Calcutta math. Soc. 46, 29—36 (1954).

On sait qu'étant donné un espace A_n à connexion affine Γ_{jk}^i on associe à l'espace les courbes auto-parallèles comme les solutions du système différentiel $d^2 x^i dt^2 - \Gamma_{jk}^i (dx^j/dt)(dx^k/dt) = 0$ et on sait que ces courbes constituent une famille de ∞^{2n-2} courbes et que par chaque point et tangente à une direction donnée dans ce point, passe une seule courbe de la famille. L'A. considère le problème inverse c'est-à-dire étant donnée une famille de ∞^{2n-2} courbes dans l'espace $X_n(x^1, \dots, x^n)$, voir si cette famille peut être considérée comme la famille des courbes auto-parallèles d'un espace à connexion affine. Pour cela l'A. considère quatre exemples dont le premier est celui des droites de l'espace euclidien x, y, t et trouve que les coefficients Γ_{jk}^i sont nuls, ce qui est évident, mais on peut observer aussi que la solution générale est $\Gamma_{jk}^i - \delta_j^i \varphi_k + \delta_k^i \varphi_j$, où φ_i est un vecteur, parce que les courbes auto-parallèles ne changent pas, si l'on ajoute au coefficients Γ_{jk}^i les termes $\delta_j^i \varphi_k + \delta_k^i \varphi_j$. En ce qui concerne le second exemple donné par des courbes (1) $(x - x_0)/l = (y - y_0)/m = (t - t_0)/n = r$ où x_0, y_0, t_0, r sont des constantes arbitraires et l, m, n sont liées par la relation $A/l + B/m + C/n = 0$, l'A. trouve que ces courbes ne peuvent pas être les auto-parallèles d'un espace A_3 . Cela est évident si l'on change les coordonnées de façon qu'on ait $A = B = 0$, donc $n = 0$ car alors $t = t_0$ et par conséquent il n'y a pas des autoparallèles tangentes à des directions qui n'appartiennent pas aux plans $t = t_0$, mais dans ces plans les courbes (1) peuvent constituer des courbes auto-parallèles d'espaces A_2 . Le troisième exemple consiste à voir si les courbes (1) où l, m, n sont quelconques peuvent être les géodésiques d'un espace de Riemann, mais la métrique qu'on trouve peut s'écrire $ds^2 = (e^x dx + e^y dy + e^t dt)^2$ et elle est évidemment dégénérée. Le quatrième exemple cherche à montrer qu'une famille de géodésiques d'un V_3 peut être aussi une famille de courbes auto-parallèles d'un A_3 .

G. Vranceanu.

Sasayama, Hiroyoshi: On the extended affine connection parameters of fractional order in the space with torsion. Tensor, n. Ser. 3, 144—165 (1954).

The author considers extensors in a space with a given family of curves. Extended

connection parameters of fractional order are introduced. Several theorems about extended gradient, curl and curvature are derived. Four kinds of extended Bianchi's identities are given. *J. Haantjes.*

Kobayashi, Shoshichi: Groupe de transformations qui laissent invariante une connexion infinitésimale. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 644—645 (1954).

In the most important cases, the group leaving invariant an infinitesimal connexion is a Lie group. *H. Guggenheimer.*

Castoldi, Luigi: Appunti per una interpretazione geometrica del formalismo delle connessioni proiettive. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. **12**, 426—439 (1954).

Etant donné un espace A_n à connexion affine L_{ij}^k il en existe deux transformations de connexion, l'une conservant le parallélisme $\bar{L}_{ij}^k = L_{ij}^k + 2\psi_i \delta_j^k$ et l'autre conservant les courbes auto-parallèles $\bar{L}_{ij}^k = L_{ij}^k + \psi_i \delta_j^k + \psi_j \delta_i^k$ où L_{ij}^k est la partie symétrique de la connexion L_{ij}^k . A chacune de ces transformations on peut associer un tenseur du quatrième ordre invariant, le tenseur de Thomas et le tenseur de Weyl formés à l'aide du tenseur de courbure de la connexion et de ses tenseurs contractés. L'A. donne des raisons géométriques pour l'existence des tenseurs de Thomas et Weyl, en faisant voir qu'à chaque connexion (L) on peut associer des connexions qu'on appelle principales dont le vecteur ψ_i est défini abstraction faite des termes de la forme $\partial f / \partial x^i$ où f est une fonction arbitraire. Par rapport à ces connexions principales les tenseurs de Thomas et Weyl coïncident avec le tenseur de courbure, ce qui justifie l'existence de ces tenseurs. *G. Vranceanu.*

Gotô, Yûzô: On a two-dimensional projectively connected space in the wide sense with torsion. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A. **28**, 253—265 (1954).

On considère un espace $R_2(u, v)$ dans un espace à connexion projective Γ_{rs}^β ($\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3, r = 1, 2$) le repère mobile de référence (A, A_1, A_2, A_3) étant définie par les formules $dA_\alpha = \Gamma_{rs}^\beta A_\beta du^r$ ($A_0 = A$). En posant $H_{rs} = \frac{1}{2}(\Gamma_{rs}^3 \cdot \Gamma_{sr}^3)$ on suppose que le déterminant $H = |H_{rs}|$ est différent de zéro donc on peut considérer les composantes H^{rs} . En notant aussi avec $\Delta_i H_{rs}$ les dérivées covariantes par rapport à la connexion Γ_{rs}^a ($a, r, s = 1, 2$) et en posant

$$H_{rst} = \frac{1}{3}(H_r H_{st} + \Delta_s H_{tr} + \Delta_t H_{rs}), \quad H_r = \frac{1}{4} H_{rst} H^{st}, \\ K_{rst} = H_{rst} - H_r H_{st} - H_t H_{rs} - H_s H_{tr}$$

on montre comment on peut utiliser ces quantités et les composantes R_{rps}^α du tenseur de courbure pour exprimer qu'une surface V_2 a un contact d'ordre 7 avec l'espace projectif R_2 . *G. Vranceanu.*

Kanitani, Jôyô: Sur la forme de Darboux généralisée. I. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A **28**, 225—239 (1954).

On sait qu'une hypersurface ($y^\alpha = y^\alpha(x^1, \dots, x^n)$, $\alpha = 0, 1, \dots, n+1$) dans un espace projectif S_{n+1} ($n \geq 2$) peut être déterminée au moyen de la forme asymptotique $H_{ij} \omega^i \omega^j$ ($\omega^i = a_i^j dx^j$) et d'une forme de Darboux $H_{ijk} \omega^i \omega^j \omega^k$ ($i, j, k = 1, \dots, n$), ces formes étant liées par certaines conditions d'intégrabilité. Si ces formes sont quelconques on peut trouver un espace R_n à connexion projective majorante admettant une hypersurface V_n ayant un contact du quatrième ordre avec R_n . L'A. détermine les H_{ijk} , étant donné H_{ij} de façon que V_n ait un contact du sixième ordre avec R_n . Comme méthode, on utilise celle du repère mobile (A, A_1, \dots, A_{n+1}) où $A = A_0$ est le point courant. Comme on a $dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta$ on peut supposer $\omega_0^0 = 0$, $\omega_0^{n+1} = 0$, $\omega_1^1 + \dots + \omega_{n+1}^{n+1} = 0$ et alors les formes $\omega_0^i = \omega^i$ sont des formes indépendantes dans les variables x^i . En posant donc $\omega_\alpha^\beta = \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta \omega^\gamma$ on peut s'arranger de façon que $H_{ji} = \Gamma_{ij}^{n+1}$. L'osculation du troisième ordre nous donne $R_{0ij}^{n+1} = H_{ij} - H_{ji} = 0$ où $R_{\alpha ij}^\beta$ est le tenseur de courbure de la connexion projective. En supposant le déterminant $H = |H_{ij}|$ différent de zéro on peut avoir $H = 1$, $\omega_{n+1}^{n+1} = 0$. En utilisant le tenseur H_{ij} pour changer les indices de haut en bas et inversement on arrive à donner aux conditions pour un

contact du sixième ordre la forme $H_{ka} R_{n+1,lm}^a = R_{klm}^0, H_{ij}^a R_{kaln} + H_{jk}^a R_{ialm} + H_{ki}^a R_{jaln} = 0$.
On fait ensuite une discussion de ces formules. G. Vranceanu.

Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

Denjoy, Arnaud: Les points inflexionnels. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 2469—2472 (1954).

In naheliegender Weise wird der Begriff des Wendepunktes einer ebenen Kurve erweitert zum Begriff des Inflexionspunktes eines Kontinuums oder einer perfekten Punktmenge der Ebene. Die Menge der Inflexionspunkte einer solchen Menge erweist sich als ein $F_{\sigma\delta}$. Vermutlich hat die Menge der Tangentenrichtungen aller Inflexionspunkte das Maß 0. G. Aumann.

Sandgren, Lennart: On convex cones. Math. Scandinav. 2, 19—28 (1954).

Ein Kegel im E^n ist eine Punktmenge C mit (1) $\lambda \bar{x} \in C$ für $\bar{x} \in C$ und $\lambda \geq 0$, und (2) $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 \in C$ für $(\bar{x}_1 \in C) \& (\bar{x}_2 \in C)$. Mittels des skalaren Produktes $\bar{x} \cdot \eta$ wird der duale Kegel $C^* = \{\eta; \bar{x} \cdot \eta \geq 0 \text{ für alle } \bar{x} \in C\}$ erklärt; der große lineare Teilraum eines Kegels heißt sein linearer Kern. Diese Begriffe werden nutzbar gemacht zu Beweisen des Hellyschen Satzes, einer (auf M. Riesz zurückgehenden) Darstellung der Stützfunktion des Durchschnitts von konvexen Körpern, und des folgenden Trennungssatzes: Ist die konvexe Hülle von je n Kegeln eines Systems von abgeschlossenen konvexen Kegeln C_α nicht der ganze Raum E^n , so gibt es Hyperebenen H , welche keinen Kegel C_α teilen. Sind dabei alle C_α n -dimensional, so gibt es ein H , welches n beliebig ausgewählte Kegel C_α auf einer Seite läßt. Dazu wird auch der duale Satz behandelt. G. Aumann.

Bieri, H.: Zwei Minimumprobleme über konvexe Rotationskörper. Elemente Math. 9, 63—67 (1954).

Mit Hilfe einer elementaren, zuerst von Hadwiger verwendeten Methode zur Aufstellung isoperimetrischer Ungleichungen innerhalb gewisser Klassen von Rotationskörpern beweist Verf. folgende Sätze. 1. Bei vorgeschriebener Körperlänge l und vorgeschriebener Meridiankurvenlänge L besitzen die Kegelstümpfe die kleinste Oberfläche. 2. Bei vorgeschriebenem l weisen Zylinder, Kegelstümpfe und Kegel ein Minimum des Volumens auf. Die zugehörige Klasse wird durch den Wert von L bestimmt. A. Dinghas.

Pleijel, Arne: Über die Teilung von ebenen konvexen Bereichen durch Sehnen. Math. Scandinav. 2, 74—82 (1954).

Ein Eibereich E mit der Randkurve c , dem Flächeninhalt F und dem Umfang L werde durch eine Gerade g in zwei Teile mit den Flächeninhalten F_1, F_2 , sein Umfang in L_1, L_2 geteilt. Dann gilt für die Verhältnisse $F_1/F_2 = k$ und $L_1/L_2 = q$ stets die Ungleichung $1 + 2k + q \geq k + 2 + k(1 + 2k + q)$ kann der Null beliebig nahe kommen, z. B. für gleichschenklige Dreiecke mit genügend kleinem Schenkelwinkel. Es gibt jedoch eine Konstante $\alpha > 0$, so daß $1 + 2k + q \geq \alpha F^2 L^{-1}$ ist. W. Süss.

Schoenberg, I. J.: An isoperimetric inequality for closed curves convex in even-dimensional Euclidean spaces. Acta math. 91, 143—164 (1954).

Es werden im euklidischen Raum E_{2n} geschlossene Kurven C mit folgenden Eigenschaften betrachtet: 1. C wird durch die Gleichungen $x_k = x_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, 2n$; $0 \leq t \leq 2\pi$) definiert, wobei $x_k(t)$ stetige periodische Funktionen mit der Periode 2π sind. 2. Jede Hyperebene von E_{2n} wird von C höchstens $2n$ -mal getroffen. 3. Die konvexe Hülle K_C von C hat in E_{2n} einen positiven Inhalt $V = V(K_C)$. — Eine Kurve, welche den Bedingungen 1. und 2. genügt, hat stets eine Länge $L = L(C)$ in üblichen Sinne. Es wird nun gezeigt: Zwischen L und V besteht die Ungleichung $L^{2n} \geq (2\pi)^n n! (2n!) V$, und das Gleichheitszeichen tritt im wesentlichen nur dann ein, wenn C zusammenfällt mit der Kurve $x_{2k} = (2k-1)^{-1} \cos(2k-1)t$, $x_{2k-1} = (2k-1)^{-1} \sin 2kt$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$). Als wesentlichstes Beweismittel wird eine berühmte, zuerst von Hurwitz [Ann. sci. Écol. norm. Sup., III. Sér. 19, 357—408 (1902)] verwendete Methode zum Beweis der klassischen isoperimetrischen Ungleichung herangezogen. A. Dinghas.

Huber, Alfred: On the isoperimetric inequality on surfaces of variable Gaussian curvature. *Ann. of Math.*, II. Ser. **60**, 237—247 (1954).

Durch Verallgemeinerung einer auf Carleman [*Math. Z.* **9**, 154—160 (1921)] zurückgehenden Ungleichung zwischen den Mittelwerten des absoluten Betrages einer in $|z| < 1$ regulären und dort beschränkten Funktion $f(z)$ gelingt es dem Verf., einige interessante isoperimetrische Aussagen auf hinreichend regulären Flächen in der von Fiala [*Commentarii Math. Helvet.* **13**, 293—346 (1940—41)] begonnenen Richtung zu gewinnen, indem die dortigen Annahmen einer analytischen Fläche durch eine zweimalige Differenzierbarkeit ersetzt werden. Es wäre in diesem Zusammenhang interessant, diese Resultate mit denjenigen von Bol (dies. Zbl. **26**, 89) und Reiche (dies. Zbl. **26**, 89) zu vergleichen, zumal der erste mit Hilfe integralgeometrischer Methoden die Hauptungleichung von Fiala wesentlich verallgemeinert hat. *A. Dinghas.*

Topologie :

Berge, Claude: Sur les ensembles purs et les ultrafiltres. *C. r. Acad. Sci.*, Paris **238**, 2136—2137 (1954).

Einfache Bemerkungen über das Bild einer Ultrafilterbasis in einer Menge E bei einer mehrdeutigen Abbildung von E in eine Menge E' . *G. Nöbeling.*

Sikorski, R.: Closure homomorphisms and interior mappings. *Fundamenta Math.* **41**, 12—20 (1954).

Vgl. dies. Zbl. **40**, 252. Ist h eine Abbildung einer closure algebra \mathfrak{B} in eine closure algebra \mathfrak{A} derart, daß gilt: $h\left(\bigvee_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigvee_{n=1}^{\infty} h B_n$, $h(B') = (h B)'$, $h(\bar{B}) = h(B)$, so nennt Verf. h einen closure Homomorphismus. Es seien \mathfrak{X} und \mathfrak{Y} zwei topologische Räume, \mathfrak{A} und \mathfrak{B} die closure Algebren aller Punktmengen A und B aus \mathfrak{X} und \mathfrak{Y} . Eine Abbildung q von \mathfrak{X} in \mathfrak{Y} ist dann und nur dann eine innere Abbildung (d. h. stetig und das Bild jeder offenen Menge offen), wenn der σ -Homomorphismus $h = q^{-1}$ von \mathfrak{B} in \mathfrak{A} ein closure Homomorphismus ist. Ist \mathfrak{Y} speziell ein T_0 -Raum mit 2. Abzählbarkeitsaxiom oder ein T_1 -Raum mit 1. Abzählbarkeitsaxiom, so ist q dann und nur dann eine innere Abbildung, wenn $h = q^{-1}$, beschränkt auf die Borelschen Mengen von \mathfrak{Y} , ein closure Homomorphismus ist. Anwendung: \mathfrak{X} und \mathfrak{Y} seien metrische Räume; q ist dann und nur dann eine innere Abbildung, wenn $q^{-1}(\lim y_n) = \lim q^{-1}(y_n)$ ist für jede konvergente Punktfolge (y_n) in \mathfrak{Y} . Jeder T_0 -Raum mit abzählbarer Basis ist inneres Bild eines total zusammenhanglosen Hausdorff-Raumes mit abzählbarer Basis. Weiter Sätze und Vermutungen über die Darstellung einer closure Algebra mit abzählbarer Basis als Quotient einer closure Mengenalgebra mit abzählbarer Basis durch ein σ -Ideal. *G. Nöbeling.*

Kasriel, Robert H.: k -fold irreducible decomposition of a space relative to a mapping. *Proc. Amer. math. Soc.* **5**, 440—446 (1954).

Sei f eine Abbildung eines Raumes A auf einen Raum B . Verf. nennt eine Darstellung $A = A_1 \cup \dots \cup A_k$ eine irreduzible k -fache Zerlegung von A bez. f , wenn gilt: 1. jedes A_i ist nicht leer und abgeschlossen; 2. für jedes i ist der offene Kern A_i und A_i (bez. A) dicht in A_i ; 3. $A_i \cap A_j$ ist leer für $i \neq j$; 4. für jedes i ist $f(A_i) = B$, aber $f(C) \neq B$ für jede echte, abgeschlossene Teilmenge C von A_i . Verf. gibt Bedingungen für die Existenz solcher Zerlegungen. *G. Nöbeling.*

Kandô, Tetsuno: Characterization of topological spaces by some continuous functions. *J. math. Soc. Japan* **6**, 45—54 (1954).

Two theorems announced recently by E. A. Michael [*Bull. Amer. math. Soc.* **59**, 180 (1953)] as well as a generalization of them are stated and proved. Michael's theorems are about necessary and sufficient conditions that a topological space be (1) paracompact and normal, or (2) normal. The author's generalization is about ne-

cessary and sufficient conditions that a topological space be (3) countably paracompact and normal, or (4) normal and point-finitely paracompact (namely that every point-finite covering has a locally finite refinement). These conditions are expressed as follows: F standing for a mapping of the given space X into the space of all subsets of a Banach space E and f for a continuous mapping of X into E ; in the case of (1) E may be arbitrary and $F(x)$, $x \in X$, non empty, convex and closed; in the case of (2) E must be separable, $F(x)$ non empty, convex and compact; in the case of (3) E must be separable, $F(x)$ non empty, convex and closed; in the case of (4) E may be arbitrary, $F(x)$ being non empty convex and compact. In addition to this there must exist, in every case, a continuous mapping f such that $f(x) \in F(x)$ for every $x \in X$. The proofs which require a certain number of lemmas, are by direct constructions. An application to the theory of extensions of continuous mappings is briefly sketched. In the last section, an interesting example is given of a point finitely paracompact space which is not paracompact. It is skilfully constructed by making use of a mapping f of the set of all countable transfinite ordinals into itself such that $f(x) < x$ for sufficiently large x . C. Racine.

Iséki, Kiyoshi: On the hannerization of completely normal spaces. Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A 3, 143—146 (1954).

Sind X und Y vollständig normale topologische Räume, ist B eine abgeschlossene Teilmenge von Y und f eine stetige Abbildung von B in X , so ist der Raum Z , der sich aus der Vereinigung von X und Y durch Identifizierung jedes $y \in B$ mit $f(y) \in X$ ergibt, vollständig normal. T. Ganea.

Iséki, Kiyoshi: A note on retraction in completely normal spaces. Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A 3, 176—180 (1954).

Sind X_1 und X_2 abgeschlossene Teilmengen eines vollständig normalen Raumes X , gilt $X = X_1 \cup X_2$ und ist $X_1 \sim X_2$ ein absoluter (Umgebungs-)Retrakt vollständig normaler Räume, so ist X ein solcher Retrakt dann und nur dann, wenn dies für X_1 und X_2 gilt. T. Ganea.

Wagner, K.: Zur Metrisierbarkeit topologischer Räume. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 19, 14—22 (1954).

R sei ein topologischer Raum. Eine Folge $(U_n(p))$ von Umgebungen eines Punktes p heiÙe eine Fundamentalfolge zu p , wenn $\bigcap_n U_n(p) = \{p\}$ ist und zu jeder Umgebung $U(p)$ von p ein $U_n(p) \subset U(p)$ existiert. Sie heiÙe bewertet, wenn jedem $U_n(p)$ ein $\varepsilon_n(p) > 0$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n(p) = 0$ zugeordnet ist. Damit R metrisierbar ist, ist notwendig und hinreichend, daÙ jeder Punkt p von R eine bewertete Fundamentalfolge $(U_n(p))$ derart besitzt, daÙ folgendes gilt: es sei p ein beliebiger Punkt und $U_n(p)$ eine Umgebung der zugehörigen Fundamentalfolge; dann ist die untere Grenze der „Längen“ $\sum_{i=1}^l \varepsilon_{n_i}(p_i)$ aller Ketten $U_{n_1}(p_1), \dots, U_{n_l}(p_l)$ mit $p_1 = p$, $U_{n_i}(p_i) \cap U_{n_{i+1}}(p_{i+1}) \neq \emptyset$ und $p_i \notin U_{n_i}(p)$ positiv, falls es solche Ketten überhaupt gibt. Aus diesem Kriterium folgt leicht das Metrisierbarkeitskriterium von P. Alexandroff und P. Urysohn [C. r. Acad. Sci., Paris 177, 1274—1276 (1923)] und der Satz von E. W. Chittenden [Trans. Amer. math. Soc. 18, 161—166 (1917)]. G. Nöbeling.

Witt, Ernst: Über den Auswahlssatz von Blaschke. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 19, 77 (1954).

Nach dem Vorbild der von W. Blaschke angegebenen Topologie auf der Menge der konvexen Körper des euklidischen Raumes (siehe etwa: W. Blaschke, Kreis und Kugel, Leipzig 1916) wird hier eine uniforme Topologie eingeführt auf dem System aller nicht leeren Teilmengen eines kompakten Raumes. Dabei erweist sich der Teilraum der abgeschlossenen Mengen als der zugehörige separierte Raum. Für diesen wird die Kompaktheit nachgewiesen, in Analogie zu dem Blaschkeschen Aus-

wahlsatz für konvexe Körper. Bei der Korrektur wurde bemerkt, daß dies Verfahren bereits Gegenstand einiger Aufgaben in N. Bourbakis Buch, dies. Zbl. 26, 431, Kap. II, §§ 2, 4, ist.

B. Banaschewski.

Keldyš, Ljudmila: Über die Darstellung der nulldimensionalen offenen Abbildungen in Form von Superpositionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 98, 719—722 (1954) [Russisch].

Die Note hängt mit zwei früheren zusammen (dies. Zbl. 42, 414; 55, 415) und enthält den Beweis des folgenden Satzes: Jede nulldimensionale offene Abbildung f eines Kompaktums X der Dimension $n > 0$ auf ein Kompaktum Y der Dimension $n + k$, $k > 0$, ist darstellbar als Superposition $f = \psi_{k-1} \psi_k \psi_{k+1} \cdots \psi_1 \psi_1$ von $2k + 1$ nulldimensionalen stetigen Abbildungen; kein ψ erhöht die Dimension; jedes ψ erhöht die Dimension um 1; jedes ψ^{-1} ist höchstens 2-wertig.

G. Kurepa.

Freudenthal, Hans: Über zwei Probleme von K. A. Sitnikov. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 57, 114—116 (1954).

Eine stetige Abbildung einer offenen Teilmenge G des Euklidischen n -Raumes E_n heißt nach K. A. Sitnikov [Mat. Sbornik, n. Ser. 31 (73), 439—458 (1952)] abklingend, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für $x \in G$ und $\varrho(x, E_n \setminus G) < \delta$ die Menge $f^{-1}f(x)$ einen Durchmesser $< \varepsilon$ hat. Nach einem Satz von Sitnikov (l. c.) sind die Homologiegruppen von G den entsprechenden von $f(G)$ isomorph, falls G beschränkt und f abklingend ist. Sitnikov fragte, ob G und $f(G)$ sogar homöomorph seien und ob feinen Isomorphismus zwischen den Fundamentalgruppen von G und $f(G)$ erzeuge. Der Verf. konstruiert folgende zwei Beispiele: In einer offenen Vollkugel V_3 im E_3 werden folgende Teilmengen betrachtet: ein geschlossenes, verknottetes Polygon K , eine Kreislinie L , eine Antoinese 0-dimensionale Menge A , eine „gewöhnliche“ Cantorsche Menge C . Es wird eine abklingende Abbildung f_1 von $V_3 \setminus K$ auf $V_3 \setminus L$ (das erste Beispiel) und eine abklingende Abbildung f_2 von $V_3 \setminus A$ auf $V_3 \setminus C$ (das zweite Beispiel) konstruiert. Die Fundamentalgruppe von $V_3 \setminus K$ ist nicht kommutativ, die von $V_3 \setminus L$ kommutativ und die Fundamentalgruppe von $V_3 \setminus A$ ist unendlich, die von $V_3 \setminus C$ trivial. Somit widerlegt jedes von diesen Beispielen beide Vermutungen von Sitnikov.

K. Borsuk.

● **Parchomenko, A. S.:** Was ist eine Linie? Moskau: Staatsverlag für technische-theoretische Literatur 1954. 140 S. R. 2,30 [Russisch].

This little book is primarily intended for (soviet) teachers and students, who want to do supplementary reading to a general course in set theory, in order to get an idea of the scope of the concepts and methods of elementary point set topology. To this purpose the book seems to be excellently suited by taking the „line concept“ as its central theme. Developing this concept from the primitive intuitive stage to the, by now classical, definition in terms of dimension theoretic concepts, it covers the basic topics of point set topology such as metricity, connectedness, local connectedness. In doing so, more or less as a sideline, some of the more difficult theorems (e. g. any two points of a continuum may be joined by a simple arc; any continuum has at least two points that do not dissect it) are proved, and for various other theorems literature references are given. Furthermore the Cantor curve concept in the plane is extensively discussed, and Sierpinski's universal plane Cantor curve is exhibited (and proved to be universal). Again as a sideline Brouwer's example of a three-domain boundary is given. In the last chapter of the book the definitions of 1-dimensional continuum and ramification index at a point are given. In terms of these concepts simple arcs and related concepts are characterized and discussed. Finally Menger's universal 1-dimensional continuum is exhibited (without a proof of its universality) and Alexandrov's characterization of the line concept using ε -deformations is mentioned. The book terminates with a brief appendix on the dimension concept.

W. T. van Est.

Urbanik, K.: Sur un problème de J. F. Pál sur les courbes continues. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 2, 205—207 (1954).

Mittels einer Variante des Spornerschen Lemmas für das n -Simplex wird gezeigt, daß es für jedes $n \geq 1$ und jede stetige Kurve $x(t)$, $0 \leq t \leq 1$, $x(0) \neq x(1)$, eines metrischen Raumes mit Entfernung ϱ , ein derartiges Zahlensystem $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = 1$ gibt, daß $\varrho[x(t_{i-1}), x(t_i)] = \varrho[x(t_i), x(t_{i+1})]$ für $i = 1, \dots, n$, gilt.

T. Ganea.

Fort jr., M. K.: Open topological disks in the plane. J. Indian math. Soc., n. Ser. 18, 23—26 (1954).

Ist die ebene beschränkte offene Menge G topologisches Bild des Inneren des Einheitskreises und ist ihre Begrenzung lokal zusammenhängend, so gibt es für jede stetige Abbildung f von G in sich und für jedes $\varepsilon > 0$ einen Punkt $p \in G$ mit $|f(p) - p| < \varepsilon$.

T. Ganea.

Denjoy, Arnaud: Les couples de continus joints dans le plan. I. C. r. Acad. Sci., Paris 239, 561—564 (1954).

Vorbereitungen für den Beweis (der für $p = 1$ hier bereits durchgeführt wird) des folgenden Satzes. In der Ebene E seien C und C' zwei Kontinuen: der Durchschnitt $F = C \cap C'$ zerfalle in p Komponenten; $C - F$ sei enthalten in einer Komponente R' von $E - C'$ und $C' - F$ in einer Komponente R von $E - C$ (für $p = 1$ seien außerdem $C - F$ und $C' - F$ in derselben Komponente von $E - F$ enthalten); dann hat $R \cap R'$ genau p Komponenten.

G. Nöbeling.

Anderson, R. D.: Continuous collections of continuous curves. Duke math. J. 21, 363—367 (1954).

Konstruktion einer stetigen Familie G paarweise fremder, stetiger Kurven K , deren Vereinigung ein eindimensionales Kontinuum ist, während G als Raum mit den Punkten K betrachtet, homöomorph ist zum Hilbertschen Fundamentalquader.

G. Nöbeling.

Anderson, R. D. and Mary-Elizabeth Hamstrom: A note on continuous collections of continuous curves filling up a continuous curve in the plane. Proc. Amer. math. Soc. 5, 748—752 (1954).

Cette Note est consacrée à la démonstration du théorème suivant, que les AA. établissent en s'appuyant sur des lemmes et résultats divers contenus dans plusieurs de leurs Notes précédentes: Si G est un ensemble continu de courbes continues non dégénérées, remplissant une courbe continue compacte dans le plan, G est, par rapport à ses éléments, soit un arc simple, soit une courbe simple fermée.

S. Stoilow.

Hemmingsen, E.: Plane continua admitting non-periodic autohomeomorphisms with equicontinuous iterates. Math. Scandinav. 2, 119—141 (1954).

Sei M ein ebenes Kontinuum und f ein Homöomorphismus von M auf sich, dessen Iterierte gleichgradig stetig sind. Enthält dann eine Komponente W des Inneren von M einen nicht periodischen Punkt x ($x \neq f^n x$ für $n = 1, 2, 3, \dots$), so ist M die abgeschlossene Hülle von W , und es gibt einen Homöomorphismus h von M auf eine Kreisscheibe oder einen Kreisring sowie eine irrationale Drehung q der Scheibe oder des Ringes derart, daß $f = h^{-1} q h$ oder (wenn im Falle des Ringes f die beiden Randlinien von M vertauscht) $f^2 = h^{-1} q h$ ist. Dies Hauptergebnis wird auf den Weg über eine Anzahl Hilssätze bewiesen und dann erläutert durch Beispiele, die u. a. zeigen, was beim Verzicht auf die gleichgradige Stetigkeit vorkommen kann.

H. Kneser.

Vrublevskaja, I. N.: Über die Trajektorien und Grenzmengen dynamischer Systeme. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 97, 9—12 (1954) [Russisch].

Vrublevskaja, I. N.: Einige Äquivalenzkriterien für Trajektorien und Halbtjektorien dynamischer Systeme. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 97, 197—200 (1954) [Russisch].

On appelle déformation régulière d'un ensemble L_0 dans un ensemble L_1 d'un espace métrique R , une famille $\{F_\lambda\}_{0 \leq \lambda \leq 1}$ de transformations topologiques également continues, telles que $F_\lambda(p_0)$ soit continue en λ pour tout $p_0 \in L_0$. $F_0(L_0) = L_0$, $F_1(L_0) = L_1$ et ayant les inverses F_λ^{-1} uniformément continues. On considère quatre catégories d'ensembles (trajectoires, sémitrajectoires, ω -lim de trajectoires, α -lim de trajectoires) liées à un système dynamique. $f(p, t)$ et l'on définit l'équivalence géométrique par l'existence d'une déformation régulière qui conserve la catégorie et l'équivalence cinématique (entre trajectoires ou entre sémitrajectoires) par des conditions de permutabilité entre F_λ et f . En partant de ces notions, on construit une théorie topologique des systèmes dynamiques, dont on énonce les théorèmes. Par exemple: Si une trajectoire nonfermée n'est pas positive au sens de Poisson, alors ses sémitrajectoires positives sont équivalentes géométriquement. Si dans un système dynamique plan l'ensemble Ω est ω -lim d'une trajectoire l et ne contient aucun point ordinaire de l , alors Ω est ω -lim de toute trajectoire géométriquement équivalente à l .

G. Marinescu.

Skornjakov, L. A.: Kurvensysteme in der Ebene. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 98, 25—26 (1954) [Russisch].

Dans un plan π l'A. considère le système Σ de „courbes“ chacune desquelles est homéomorphe à $(0, 1)$ ou à un cercle C . L'A. considère la condition A: Par chaque couple de points distincts de π passe une et une seule courbe de Σ . Dans ce cas la fermeture de chaque courbe de Σ est homéomorphe à $(0, 1)$ ou à C ; la courbe est dite alors infinie et semi-fermée, respectivement (et ne peut pas être homéomorphe de C). On construit Σ de la façon suivante. Soient $O \in \pi$ et S une sphère tangente à π en O ; soit π' le plan parallèle à π et tangente à S en O' . On applique stéréographiquement: π sur $S \setminus O'$, $\pi \setminus (O \cup O')$ sur π' avec O' et O comme centre. Cela combiné avec la projection orthogonale de π' sur π donne une homéomorphie de $\pi \setminus O$ sur lui-même, à la suite de quoi Σ passe en Σ^* : on adjoint O à chaque élément de Σ^* dont les images initiales étaient des courbes infinies contenant O . On obtient ainsi le système „inverse“ de Σ , O étant le „centre de l'inversion“. Si Σ est composé de courbes infinies, Σ est dit infini et son inverse est dit central. L'A. énonce ce résultat: Chaque Σ vérifiant A est soit infini soit central. Corollaire: Si Σ est infini et si $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$, $a \neq b$ ($a_n, b_n, a, b \in \pi$), alors les courbes $[a_n, b_n]$ déterminées par $\{a_n, b_n\}$ tendent topologiquement vers $[a, b]$; l'A. dit que cela résulte du Th. 4, § 1 partie III de H. Busemann, Metric methods in Finsler spaces and in Foundations of Geometry (Princeton 1942). Alors que sur une sphère il n'existe aucun Σ vérifiant A, l'A. dit que le problème analogue pour le cylindre ou pour le tore reste ouvert.

G. Kurepa.

Plunkett, Robert L.: Some implications of semi-1-connectedness. Proc. Amer. math. Soc. 5, 665—670 (1954).

Let X be a continuum. Then X is called semi- n -connected at a point x of X if there exists an open set U containing x such that every Čech n -cycle on U bounds in X . It is known (cf. R. L. Wilder, this Zbl. 39, 396) that if X has a finite n -dimensional Betti number (the coefficient group being a field), X is semi- n -connected at every point. The author proves some „point set“ properties implied by the hypothesis that X is semi-1-connected. Here his theorems 1 and 4 will be stated: „If X is semi-1-connected at $x \in X$, then there exists an open set V containing x such that, if Q is a connected open set with $\bar{Q} \subset V$, no continuum in $V - Q$ intersects two components of $F(Q)$, where $F(Q)$ means the boundary of Q .“ „If T is a compact totally disconnected set in a locally connected continuum X such that no point of T is a local separating point of X and X is semi-1-connected at each $x \in T$, and if ε is a positive number, then there exists a finite open covering $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ of T such that (1) $\text{diam}(Y_i) < \varepsilon$ for each i , (2) $F(Y_i)$ is connected

for each i , and (3) $Y_i \cdot Y_j = 0$, if $i \neq j$, where a point x is called a local separating point of X if $V - \{x\}$ is not connected for some open connected set V containing x .

K. Morita.

Griffiths, H. B.: The fundamental group of two spaces with a common point. *Quart. J. Math., Oxford II. Ser.* 5, 175—190 (1954).

Let the spaces X and Y have a single point x in common, and let their union be Z . If X and Y are finite connected complexes, then it is well known that the fundamental group of Z is the free product of the fundamental groups of X and Y , and the first singular homology group over the integers of Z is the direct sum of the corresponding groups of X and Y . The author extends these results to Hausdorff spaces X , Y (Theorem 1 for the fundamental groups, Corollary 2.5 for the first singular homology groups) under the assumptions (i) that both satisfy the first countability axiom, (ii) that both are closed in Z , (iii) that at least one of them is 1- LC [for the definition cf. R. L. Wilder, *Topologie of manifolds* (this Zbl. 39, 396), p. 287] at the common point x . Of these assumptions, the first is needed for the proof but it is not known whether it is necessary for the validity of the results; the second is easily shown to be necessary; and the necessity of the last and most interesting assumption, the local condition at the common point, forms the subject of the second half of the paper. — Theorem 1 splits naturally into two parts: there is a natural homomorphism of the free product of the fundamental groups of X and Y into the fundamental group of Z ; this homomorphism is onto (Theorem 2, using the 1- LC assumption) and one-to-one (Theorem 3, not using the 1- LC assumption). The corresponding results for the first homology groups are obtained as corollaries by making the groups abelian and using a result of Hu (this Zbl. 30, 177). — To show the 1- LC condition, or at least some local condition at the common point, indispensable, the author makes an example of two spaces X and Y , both with trivial fundamental group, but such that the order of the fundamental group of Z is at least the cardinal of the continuum, and so is the order of its first singular homology group over the integers; by contrast the one-dimensional Čech homology group of Z over the integers is trivial. These results of the author correct a statement of P. J. Hilton, *Introduction to homotopy* (this Zbl. 51, 403), top of p. 43. Incidentally Z furnishes an example of a space which is the union of two contractible spaces with only one point in common, yet not itself contractible to a point (the author credits I. M. James with this discovery). The discussion of the fundamental group of Z in this example uses the definition and some properties of what the author calls the „topologist's product“ of an infinite sequence of groups; these are to be the subject of another paper by the author, which will also supply the proof of one of the facts (Theorem 4) stated and used in the paper under review. The „topologist's product“ is a proper subgroup of the „unrestricted free product“ introduced by Graham Higman (this Zbl. 46, 26), and the author proves some interesting purely group-theoretical results in this connection, of which the last one (Theorem 6) may be stated as follows: Let G_1, G_2, \dots be an infinite sequence of non-trivial groups, let $V_{\text{odd}}, V_{\text{even}}, V$ be the unrestricted free products of all odd-numbered G_n , all even-numbered G_n , all G_n , respectively, and let W be the subgroup of V generated by $V_{\text{odd}}, V_{\text{even}}$, and the commutator subgroup of V ; then the index of W in V is at least the cardinal of the continuum.

B. H. Neumann.

Griffiths, H. B.: A contribution to the theory of manifolds. *Michigan math. J.* 2, 61—89 (1954).

Verf. hat in einer früheren Arbeit lokale Homologie- und Homotopiegruppen definiert (dies. Zbl. 52, 191). Es werden nun „Mannigfaltigkeiten“ im Sinne der verschiedenen Definitionen der lokalen Gruppen betrachtet: Mit $\mathcal{M}^n(\mathcal{C}_\infty)$ wird eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit in bezug auf lokale Homotopie bezeichnet. Mit $\mathcal{M}^n(\mathcal{C}_v, G)$, bzw. $\mathcal{M}^n(\mathcal{C}_c, G)$, wird eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit bezüglich lokaler Vietoris- bzw. Čech-Homologie für den Koeffizientenbereich G bezeichnet. Verf. beweist, daß jede $\mathcal{M}^n(\mathcal{C}_\infty)$ eine $\mathcal{M}^n(\mathcal{C}_c, Z)$ ist, aber nicht umgekehrt. Die $\mathcal{M}^n(\mathcal{C}_v, G)$ und $\mathcal{M}^n(\mathcal{C}_c, G)$ stimmen für diskrete Gruppen G überein. Wenn G ein Körper ist, dann fallen die $\mathcal{M}^n(\mathcal{C}_c, G)$ mit den n -dimensionalen „generalised manifolds“ im Sinne von Wilder zusammen. Wenn eine $\mathcal{M}^n(\mathcal{C}_c, Z)$ kompakt und orientierbar ist, dann genügt sie einem Poincaréschen Dualitätssatz.

F. Hirzebruch.

Fáry, István: Notion axiomatique de l'algèbre de cochaines dans la théorie de J. Leray. *Bull. Soc. math. France* 82, 97—135 (1954).

La théorie de l'homologie développée par J. Leray (ce Zbl. 38, 363) comprend en particulier une axiomatique de la cohomologie d'Alexander-Spanier à supports compacts d'un espace localement compact, dont l'A. donne ici un exposé de vulga-

risation. Il centre son article autour de la notion fondamentale de couverture fine, s'attachant à mettre en évidence son aspect intuitif, géométrique, et à montrer comment ce concept généralise l'algèbre des formes différentielles extérieures d'une variété différentiable. L'exposé se termine par quelques applications simples.

A. Borel.

Borel, Armand: Sur l'homologie et la cohomologie des groupes de Lie compacts connexes. *Amer. J. Math.* **76**, 273—342 (1954).

Die Arbeit enthält die ausführlichen Beweise von äußerst interessanten Resultaten, die in ihren Hauptstücken bereits angekündigt wurden (dies. Zbl. **52**, 404). Es werde auf die Besprechung dieser Note verwiesen.

F. Hirzebruch.

Al'ber, S. I.: Homologien homogener Räume. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **98**, 325—328 (1954) [Russisch].

An elementary recursive method is indicated to determine homology groups of various homogeneous spaces, and applied in particular to obtain the homology groups of the Grassmann manifolds $G(n, k)$ of the $(k + 1)$ -dimensional linear subspaces of an $(n + 1)$ -dimensional real linear space. The method rests on the following observations: All $(k + 1)$ -spaces going through a fixed line l constitute a submanifold homeomorphic to $G(n - 1, k - 1)$. By a deformation the complement of this submanifold in $G(n, k)$ can be transformed onto the submanifold $G(n - 1, k)$ of the $(k + 1)$ -spaces perpendicular to l . The recursive formula $\pi_2^s(G(n, k)) = \pi_2^s(G(n - 1, k)) + \pi_2^{s-n+k}(G(n - 1, k - 1))$ connecting the Betti numbers mod 2 is established. A system of free generators for the Betti groups of $G(n, k)$ over the rationals in terms of Schubert cycles is exhibited, as well as a system of independent generators for the torsion groups. Relations between the homology of the space $C_0(n, k)$, i. e. the space of all the euclidean k -spheres in an euclidean n -sphere, where all the degenerate k -spheres consisting of a single point are identified, and the homology of $G(n + 1, k + 1)$ and $G(n, k + 1)$ are established.

W. T. van Est.

Eckmann, B.: Räume mit Mittelbildungen. *Commentarii math. Helvet.* **28**, 329—340 (1954).

Ein topologischer Raum T ist ein M_n -Raum, wenn in ihm ein n -Mittel erklärt ist [s. G. Aumann, *Math. Ann.* **119**, 210—215 (1943)]. Zur Untersuchung der Homotopiegruppen $\pi_r(T)$ und der singulären Homologiegruppen $H_r(T)$, $r \geq 1$, eines M_n -Raumes T bedient sich Verf. der folgenden Eigenschaft (α_n) einer Gruppe: Die Abbildung $x \rightarrow x^n$ der Gruppe in sich ist ein Automorphismus, und beweist u. a. für einen M_n -Raum T die folgenden Eigenschaften: (I) Die Fundamentalgruppe $\pi_1(T)$ ist abelsch, und $\pi_r(T)$ und $H_r(T)$ besitzen die Eigenschaft (α_n) ; (II) In den Dimensionen $r \geq 1$ sind alle Betti-Zahlen Null und alle Torsionskoeffizienten zu n teilerfremd. Im Sinne einer Charakterisierung wird bewiesen: Ein zusammenhängendes endliches Polyeder ist dann und nur dann M_n -Raum für jedes n , wenn es in sich auf einen Punkt zusammenziehbar ist. Es wird ein einfaches Beispiel eines nicht zusammenziehbaren M_n -Raumes gegeben.

G. Aumann.

Kuranishi, Masatake: On the group structure in homotopy groups. *Nagoya math. J.* **7**, 133—144 (1954).

Cet article expose essentiellement une théorie axiomatique des groupes d'homotopie. Les axiomes sont semblables à ceux de l'axiomatique de l'homologie due à Eilenberg-Steenrod; l'axiome d'excision est remplacé par un axiome ainsi formulé: si A, B sont deux fermés d'un espace C , soit $\Omega_{AB}(C)$ l'espace des chemins dans C , d'origine dans A , d'extrémité dans B . Alors l'homomorphisme d'injection de $\pi_n(\Omega_{AX}(X), \Omega_{xX}(X))$ dans $\pi_n(\Omega_{XX}(X), \Omega_{xX}(X))$, x point de l'espace X , est un isomorphisme (axiome équivalent pratiquement au théorème de relèvement des homotopies pour la fibration de Serre de l'espace des chemins dans X sur X). Les groupes de dimension 0 (et les groupes relatifs de dimension 1) n'ont pas de structure de groupe naturelle, ce sont des ensembles avec élément neutre. Pour établir le

théorème d'unicité en dimension 1, l'A. doit utiliser un lemme assez curieux sur les groupes libres à deux générateurs. Il est assez remarquable qu'il n'est pas nécessaire de supposer les groupes π_n abéliens pour $n \geq 2$, la propriété découlant des axiomes et du théorème d'unicité.

R. Thom.

Fuller, F. B.: The homotopy theory of coincidences. Ann. of Math., II. Ser. 59, 219—226 (1954).

Wann kann man zwei gegebene Abbildungen f, g eines Komplexes K in eine Mannigfaltigkeit M trennen, d. h. in Abbildungen f', g' von K in M deformieren, für die $f'(x) \neq g'(x)$ für alle $x \in K$? Das Abbildungspaar (f, g) definiert eine Abbildung von K in $M \times M$. Es sei D die Diagonale von $M \times M$. Man kann also gleichwertig fragen: Wann kann (f, g) in eine Abbildung (f, g') deformiert werden, für die $(f, g')(K)$ in $M \times M - D$ enthalten ist? Diese Frage kann mit Hilfe der Hindernistheorie behandelt werden. Eine Abbildung von K in $M \times M$, die das $(p-1)$ -Skelett von K in $M \times M - D$ abbildet, definiert einen Hindernis-Cozyklus $\pi^{(p)}(K; \Pi_p)$, wo Π_p die p -te (relative) Homotopiegruppe von $(M \times M, M \times M - D)$ ist. Um die Hindernistheorie anwenden zu können, ist die Berechnung der Gruppen Π_q erforderlich. Es sei $n = \dim M$. Die Gruppen Π_q verschwinden aus Dimensionsgründen für $q < n$. Verf. zeigt, daß die Gruppen $\pi_q(M, M - P)$ und Π_q auf Grund der natürlichen Einbettung von $(M \times P, (M - P) \times P)$ in $(M \times M, M \times M - D)$ isomorph sind. Von jetzt ab wird vorausgesetzt, daß $n = \dim M \geq 3$ ist und daß M einfachzusammenhängend ist. Dann ergibt sich mit Hilfe des (relativen) Hurewiczschen Isomorphiesatzes, daß Π_n zu $H_n(M, M - P)$ isomorph ist, also unendlich-zyklisch ist. Das erste Hindernis gegen das Trennen von f und g ist ein Element von $H^n(K; \mathbb{Z})$, und Verf. zeigt, daß dieses Element gleich $(f, g)^*(u)$ ist, wo u ein erzeugendes Element der unendlich-zyklischen Gruppe $H^n(M \times M, M \times M - D; \mathbb{Z})$ ist. — Nun muß die Gruppe Π_{n+1} berechnet werden. Von jetzt ab wird zusätzlich vorausgesetzt, daß $n = \dim M \geq 4$. Verf. konstruiert einen Isomorphismus von Π_{n+1} auf die direkte Summe $H_2(M; \mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}_2$ und bestimmt den Variabilitätsbereich der zweiten Hindernisse. Dabei spielt die Gruppe $H^{n-1}(K; \Pi_n) = H^{n-1}(K; \mathbb{Z})$ eine entscheidende Rolle. Die Cohomologieoperation Sq^2 wird benutzt. Man erhält so Kriterien dafür, ob f, g auf dem $(n+1)$ -Skelett von K getrennt werden können. — Anm. des Ref.: Das erste Hindernis wurde von H. Hopf für den allgemeineren Fall betrachtet, wo f, g Schnittflächen in einem Bündel über K mit M als Faser sind (vgl. H. Hopf, dies. Zbl. 45, 260).

F. Hirzebruch.

Barcus, William: Note on cross-sections over CW-complexes. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 5, 150—160 (1954).

Verf. verallgemeinert die Theorie des ersten Hindernisses, die z. B. in Steenrods Buch (The topology of fibre bundles, Princeton 1951, Part III) dargestellt ist, von Bündeln auf beliebige gefaserte Räume (im Sinne von Serre, das Homotopielemma soll gelten). Verf. setzt voraus, daß die Basis ein CW-Komplex K ist. Es sei also E ein gefasertes Raum über K . Gegeben sei eine Schnittfläche g über dem n -Skelett K^n von K . Es sei $x_0 \in K^n$, weiter sei F die durch $y_0 = g(x_0)$ gehende Faser. Das Hindernis $c^{n+1}(g)$ gegen die Erweiterung von g auf K^{n+1} wird vom Verf. in der folgenden Weise als ein Homomorphismus $\pi_{n+1}(K^{n+1}, K^n, x_0) \rightarrow \pi_n(F, y_0)$ definiert. Ref. setzt von nun an immer voraus, daß $n \geq 2$. Es sei $E_n = p^{-1}(K^n)$, wo p die Projektion von E auf K ist. Man hat Homomorphismen $\hat{c}: \pi_{n+1}(K^{n+1}, K^n, y_0) \rightarrow \pi_n(K^n, y_0)$ und $\hat{c}': \pi_{n+1}(E_{n+1}, E_n, y_0) \rightarrow \pi_n(E_n, y_0)$. Die Projektion induziert einen Isomorphismus auf $p_{**}^{-1}: \pi_{n+1}(K^{n+1}, K^n, x_0) \rightarrow \pi_{n+1}(E_{n+1}, E_n, y_0)$. Die Schnittfläche g induziert einen Isomorphismus in $g_*: \pi_n(K^n, x_0) \rightarrow \pi_n(E_n, y_0)$. Der Homomorphismus $\hat{c}' p_{**}^{-1} = g_* \hat{c}$ bildet $\pi_{n+1}(K^{n+1}, K^n, x_0)$ in das Bild der Injektion $i_*: \pi_n(F, y_0) \rightarrow \pi_n(E_n, y_0)$ ab. Da i_*

isomorph-in ist, kann man definieren $c^{n+1}(g) = i_{\star}^{-1}(\partial' p_{**}^{-1} - g^* \partial)$. — Es sei \tilde{K} der universelle Überlagerungskomplex von K . Die Fundamentalgruppe von K operiert auf \tilde{K} , auf $\pi_{n+1}(K^{n+1}, K^n, x_0)$ und auf $\pi_n(F, y_0)$. Die Kettengruppe $C_{n+1}(\tilde{K})$ ist operator-isomorph mit $\pi_{n+1}(K^{n+1}, K^n, x_0)$, und der Homomorphismus $c^{n+1}(g)$, der mit den Operationen der Fundamentalgruppe verträglich ist, kann mit einem Element der äquivarianten Cokettengruppe $C^{n-1}(\tilde{K}, \pi_n(F, y_0))$ identifiziert werden. Damit ist der Anschluß an die übliche Theorie hergestellt. Verf. beweist die bekannten Aussagen über das erste Hindernis, er bespricht auch die Theorie bezüglich eines Unterkomplexes L von K , auf dem alle Schnittflächen immer definiert sind und unverändert bleiben sollen. Ferner führt er seine Theorie zum Teil auch für $n = 1$ durch.

F. Hirzebruch.

Boltjanskij, V.: Die Aufgabe, eine Schnittfläche von einem gefaserten Teilraum abzuheben. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 99, 669—672 (1954) [Russisch].

The following problem is studied: Let $(P, p, B, F, G) = \mathfrak{P}$ be a fibre bundle with fibre space P , projection p , base B which is a complex, arcwise connected group G . Let E be a subspace of F which is stable under G . Let Q be the portion of P defined by $p^{-1}(x) \cap Q = \text{image of } E \text{ under the admissible fibre maps } F \rightarrow F_x$. $P - Q$ may be considered in a natural way as a fibre space over B : the associated fibre bundle will be denoted by $\mathfrak{P} - \mathfrak{Q}$. Suppose that Ξ is a cross section $B \rightarrow P$ of \mathfrak{P} . Under what conditions is Ξ homotopic to a cross section Ξ' with $\Xi'(B) \subset P - Q$? Let Ξ be defined as a cross section on B^r (r -skeleton of B) with $\Xi(B^{r-1}) \subset P - Q$. The obstruction $s^r(\Xi)$ to a deformation of Ξ into an Ξ' , with $\Xi'(B^r) \subset P - Q$ and B^{r-1} mapping into $P - Q$ during the deformation, is defined as an r -cochain on B with values in $\pi^r(F, F - E)$. s^r is related to the obstruction of Ξ with respect to \mathfrak{P} and of $\Xi|_{B^{r-1}}$ with respect to $\mathfrak{P} - \mathfrak{Q}$. The separation cochain of the terminal cross sections of a deformation, which leaves B^{r-2} within $P - Q$, is related to their obstruction s^r . Assume that the stability group T of a point $g \in F - E$ is arcwise connected. Let Ξ_0 and Ξ_1 be the terminal cross sections of a deformation which leaves B^{r-3} within $P - Q$. It is shown that for $r > 4$ $s^r(\Xi_0) - s^r(\Xi_1) = Y^2(\Xi_0) \cup A + \text{Sq}^2 A$, where $A \in H^{r-2}(B, \pi^{r-1}(F, F - E))$ and $Y^2(\Xi_0)$ is a certain well defined element $\in H^2(B, \pi^1(T))$. Here the \cup is defined under a natural pairing of $\pi^1(H)$ and $\pi^{r-1}(F, F - E)$ to $\pi^r(F, F - E)$, and Sq^2 is defined under a pairing of $\pi^{r-1}(F, F - E)$ with itself to $\pi^r(F, F - E)$. Conversely the above condition is sufficient in order that Ξ_0 and Ξ_1 be terminals of a deformation of the kind indicated. Suppose that E is an m -dimensional submanifold of an n -dimensional manifold F . Then the above results describe completely the primary and secondary obstruction stage (which occur in dimensions $r = n - m$ and $r + 1 = n - m + 1$) of the problem outlined above. The results for $r = 4$ are slightly different but analogous.

W. T. van Est.

Browder, Felix E.: Covering spaces, fibre spaces, and local homeomorphisms. Duke math. J. 21, 329—336 (1954).

Verf. untersucht für eine stetige Abbildung f des Raumes X auf den Raum Y die logischen Zusammenhänge zwischen den drei Aussagen: (1) X ist bezüglich f ein Überlagerungsraum von Y , (2) X ist bezüglich der Projektion f ein gefasertes Raum über Y , (3) f ist ein lokaler Homöomorphismus von X auf Y . — Die Aussage (1) bedeutet, daß es zu $y \in Y$ immer eine Umgebung U von y gibt derart, daß $f^{-1}(U)$ Vereinigung von punktfremden offenen Mengen ist, die durch f homöomorph auf U abgebildet werden. Die Aussage (2) wird auf zwei verschiedene Weisen präzisiert: (2') (X, Y, f) ist ein gefasertes Raum im Sinne von Hu (vgl. dies. Zbl. 40, 101) und (2'') Für (X, Y, f) gilt das Homotopielemma für Abbildungen des kompakten Intervalls. Aus (2') folgt (2''), vgl. Hu, loc. cit. — Verf. zeigt, daß unter Voraussetzung von (2') oder (2'') und bei gewissen Annahmen über X und Y die Aussage (1) dann und nur dann gilt, wenn jede Faser $f^{-1}(y)$ in bezug auf Wege total unzusammenhängend ist (d. h. jeder Weg ist ein einziger Punkt). Offenbar folgt (3) aus (1). Das Umgekehrte gilt nicht (vgl. Theorie der Faisceaux). Verf. zeigt zum Beispiel, daß bei geeigneten Eigenschaften von X und Y der folgende Satz gilt: Wenn die Aussage (3) zutrifft und wenn f abgeschlossen ist, dann gilt (1), und über jedem Punkt von Y

liegen nur endlich viele Punkte von X . — Die Voraussetzungen, die jeweils über X und Y gemacht werden, betreffen u. a. den lokalen Zusammenhang. *F. Hirzebruch.*

Mostert, Paul S.: Fibre spaces with totally disconnected fibres. *Duke math. J.* **21**, 67—74 (1954).

Verf. untersucht gefaserte Räume (im Sinne von Hu, dies. Zbl. **40**, 101) mit total unzusammenhängenden Fasern und wegweise zusammenhängender Basis. Verf. gibt notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, daß ein solcher gefaseter Raum ein E-F-Bündel ist (Definition von Ehresmann-Feldbau, vgl. Steenrod, *The topology of fibre bundles*; Princeton 1951, p. 18); er beweist anschließend den folgenden Satz: Es sei \mathfrak{B} ein Bündel mit wegweise zusammenhängender Basis B , total unzusammenhängender Faser und mit G als Strukturgruppe. Dann kann G auf G' reduziert werden, wo $G' \subseteq G$ und wo G' die abgeschlossene Hülle in G von einer Untergruppe ist, die isomorph zu einer Faktorgruppe der Fundamentalgruppe von B ist. \mathfrak{B} ist genau dann Produktbündel, wenn G' nur aus der Identität besteht. — Die Arbeit enthält Anwendungen auf lokal-kompakte Gruppen. *F. Hirzebruch.*

James, I. M. and J. H. C. Whitehead: Note on fibre spaces. *Proc. London math. Soc.*, III. Ser. **4**, 129—137 (1954).

Es sei X ein gefaseter Raum über Y mit der Projektion $f: X \rightarrow Y$. Das Homotopielemma soll gelten. Die Räume X und Y sollen wegweise zusammenhängend und hinreichend „vernünftig“ sein. Die Faser $A = f^{-1}(y_0)$ sei Retrakt von X (bei einer Abbildung $g: X \rightarrow A$). Verf. beweisen einen Satz, der insbesondere enthält, daß unter den angegebenen Voraussetzungen X und $Y \times A$ homotopie-äquivalent sind, daß nämlich die Abbildung $h = (j, g)$ von X in $Y \times A$ diese Äquivalenz herstellt. — Es sei W^{2n-1} das Tangentialbündel der Sphäre S^n mit der Sphäre S^{n-1} als Faser. Die vorliegende Arbeit enthält Vorbereitungen für eine Untersuchung über den Homotopietyp von W^{2n-1} . Verf. wollen nämlich in einer weiteren Arbeit (vgl. nachstehendes Referat) beweisen, daß W^{2n-1} dann und nur dann zu $S^n \times S^{n-1}$ homotopie-äquivalent ist, wenn $\pi_{2n-1}(S^{n-1})$ ein Element mit Hopfscher Invariante 1 besitzt. Dieses Resultat ist von Interesse, da W^{2n-1} mit $S^n \times S^{n-1}$ für ungerades n in allen bekannten Homologie- und Homotopieinvarianten übereinstimmt. *F. Hirzebruch.*

James, I. M. and J. H. C. Whitehead: The homotopy theory of sphere bundles over spheres. I. *Proc. London math. Soc.*, III. Ser. **4**, 196—218 (1954).

Verf. betrachten die Bündel über der Sphäre S^n mit der Sphäre S^q als Faser und der eigentlichen orthogonalen Gruppe $SO(q+1)$ als Strukturgruppe [kurz: (n, q) -Bündel]. Bekanntlich stehen die Äquivalenzklassen der (n, q) -Bündel in eindeutiger Zuordnung zu den Elementen der Homotopiegruppe $\pi_{n-1}(SO(q+1))$. Verf. untersuchen insbesondere die Bündel, die eine Schnittfläche besitzen [kurz: spezielle (n, q) -Bündel]. Die speziellen (n, q) -Bündel entsprechen dem Kern von $\pi_{n-1}(SO(q+1)) \rightarrow \pi_{n-1}(S^q)$. Verf. betrachten die Gesamtträume dieser Bündel und behandeln die Frage, wann zwei solche Gesamtträume homotopie-äquivalent sind. Zu diesem Zweck ordnen sie einem speziellen (n, q) -Bündel ein Element einer Gruppe $A_{n,q}$ zu, die homomorphes Bild einer Untergruppe von $\pi_{n+q-1}(S^q)$ ist. Jedes Element von $A_{n,q}$ tritt dabei auf. Der Homotopietyp des Gesamttraumes eines speziellen (n, q) -Bündels wird durch das zugeordnete Element bestimmt. Die Zuordnung ist allerdings nicht eindeutig, wird aber von den Verf. genau beschrieben. Wenn $n+q$ oder wenn $n-q \equiv 0 \pmod{2}$, dann sind die Homotopietypen genau dann gleich, wenn die zugeordneten Elemente von $A_{n,q}$ bis auf das Vorzeichen übereinstimmen. — Man erhält insbesondere den im vorstehenden Referat angegebenen Satz. Verwendet man Resultate von J. Adams über die Hopfsche Invariante (dies. Zbl. **48**, 170), dann ergibt sich, daß, wenn $m \neq 1$ keine Potenz von 2 ist, weder die reelle, die komplexe, noch die quaternionale Stiefelsche Mannigfaltigkeit der 2-Beine mit dem entsprechenden Sphärenprodukt $S^m \times S^{m-1}$, S^{2m-1} , S^{2m-1} , bzw. S^{4m-3} , S^{4m-1} homotopie-äquivalent ist. — Die Anzahl der verschiedenen Homotopietypen der Gesamtträume der speziellen (n, q) -Bündel werde mit $h(n, q)$ bezeichnet. Es ist zum Beispiel $h(4, 3) = 7$ und $h(4, 4) = 13$. Es ist $A_{4,3} = \pi_6(S^3) = Z_{12}$. Jedes spezielle $(4, 3)$ -Bündel wird durch eine ganze Zahl charakterisiert (vgl. Steenrod, *The topology of fibre bundles*, Princeton 1951, p. 138). Zwei spezielle $(4, 3)$ -Bündel mit den zugeordneten ganzen Zahlen a_1, a_2 haben dann und nur dann homotopie-äquivalente Gesamtträume, wenn $a_1 \equiv a_2 \pmod{12}$. Alle $(4, 4)$ -Bündel sind speziell. Sie lassen sich wieder durch ganze Zahlen charakterisieren (Steenrod, loc. cit., p. 139). Zwei

(4, 4)-Bündel haben genau dann homotopie-äquivalente Gesamträume, wenn $a_1 \equiv \pm a_2 \pmod{24}$.
F. Hirzebruch.

Samelson, H.: Groups and spaces of loops. *Commentarii math. Helvet.* **28**, 278—287 (1954).

Soit L un espace fibré (au sens de Serre), de base M et de fibre F , et soit A_M , (resp. Ω_M), l'espace des arcs (resp. des lacets) de M d'extrémité fixée. On sait qu'en associant à tout élément de A_M son extrémité on fait de A_M un espace fibré de base M , fibre Ω_M . L'A. montre tout d'abord que si L est contractile en un point, il existe une application de L dans A_M compatible avec les fibrations, induisant l'identité sur M et un isomorphisme des suites spectrales (à partir de E_2). Si de plus L est un espace fibré principal pour le groupe topologique F , alors il existe un homomorphisme de F dans Ω_M (muni de la loi de composition usuelle des lacets), induisant un isomorphisme des groupes d'homotopie. Combinant cela à des résultats connus, il en déduit deux applications: 1. Soit Q le groupe des quaternions de norme 1. Alors l'application $(x, y) \rightarrow x y x^{-1} y^{-1}$ de $Q \times Q$ dans Q n'est pas homotope à une application constante. 2. Le carré (produit de Pontrjagin) d'un générateur du n -ième groupe d'homologie entière d'un espace d'Eilenberg-McLane $K(Z, n)$ est nul.

Armand Borel.

Curtis, M. L.: Classification spaces for a class of fiber spaces. *Ann. of Math.*, II. Ser. **60**, 304—316 (1954).

Cet article traite de la relation d'équivalence entre espaces fibrés définie par la notion de type d'homotopie fibré (quelque peu affaiblie). L'A. aboutit à un théorème de classification dans le cas particulier suivant: la base K est un polyèdre, la fibre F est l'espace des lacets Ω_B d'un polyèdre B , et les espaces sont induits (de la fibration de Serre des chemins dans B sur B) par une application $f: K \rightarrow B$. Il existe alors une correspondance biunivoque entre les types d'homotopie fibrés de ces espaces et les classes d'homotopie d'applications f de K dans B . En particulier, les espaces fibrés principaux dont le groupe de structure G est un groupe de Lie compact connexe, de base polyédrale, admettent pour classification par type d'homotopie fibré leur classification stricte par isomorphisme: en effet, la fibre C est alors homotopiquement équivalente à l'espace $\Omega_{B/G}$ des lacets sur le classifiant B_G de G .

R. Thom.

Hirzebruch, Friedrich: Some problems on differentiable and complex manifolds. *Ann. of Math.*, II. Ser. **60**, 213—236 (1954).

Cet article donne l'ensemble des problèmes, grands et petits, qui se posent actuellement en Théorie des variétés. L'accent est mis avant tout sur la théorie des classes caractéristiques, où l'A. voit probablement le lien unificateur de son exposé. Trois parties le composent: 1 Variétés différentiables, où les deux problèmes dominants sont: l'invariance topologique des classes caractéristiques de Pontrjagin, et le problème de l'intégrabilité des G -structures. 2 Variétés presque-complexes, où l'A. propose des problèmes concernant les propriétés arithmétiques du „genre de Todd“ (avec, bien entendu, le problème classique d'existence d'une structure complexe subordonnée). 3 Variétés complexes, où le problème central est celui de l'extension aux variétés kähleriennes, puis aux variétés complexes, des résultats du cas algébrique, notamment du théorème de Riemann-Roch (sous la forme qui lui est donnée par l'A.). De nombreux problèmes intéressants concernant notamment l'unicité de la structure complexe sur un espace projectif complexe, la caractérisation de certaines surfaces algébriques, la théorie des „modifications“ etc. sont également évoqués. Signalons quelques fautes d'impression: p. 220, inégalités du Problème 8, lire: We have $10 \leq m \leq 14$; p. 232, ligne 18 du bas, lire: $P_2 = \dim H^0(V, 2K) = 10$ (au lieu de 0). Dans l'énoncé du problème 30, ligne 9 du bas, lire: the negative second Betti number increased by 11; we can ask: What is the greatest linear genus. . . !

R. Thom.

Baily, W. L.: On the quotient of an analytic manifold by a group of analytic homeomorphisms. Proc. nat. Acad. Sci. USA **40**, 804–808 (1954).

Daß eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit unter einer gewissen zusätzlichen Bedingung algebraisch ist, bewies K. Kodaira (dies. Zbl. **55**, 157). Hier wird eine spezielle Klasse von Gebilden mit Singularitäten in Betracht gezogen. Genauer: Sei \mathfrak{D} eine komplexe Mannigfaltigkeit (kompakt oder nicht) und G eine Gruppe analytischer Homöomorphismen von \mathfrak{D} auf sich; der Quotientenraum \mathfrak{D}/G sei kompakt. Unter einer weiteren Voraussetzung (B) wird gezeigt: Es gibt eine analytische Abbildung Φ von \mathfrak{D} auf eine örtliche irreduzible algebraische Mannigfaltigkeit $\Phi(\mathfrak{D})$ in einem komplex-projektiven Raum, die sich aus der kanonischen Abbildung von \mathfrak{D} auf \mathfrak{D}/G und einem Homöomorphismus von \mathfrak{D}/G auf $\Phi(\mathfrak{D})$ zusammensetzt; Φ ist im kleinen analytisch umkehrbar außer etwa in den Fixpunkten der nicht-identischen Abbildungen aus G ; die komplexe Dimension der Singularitäten von $\Phi(\mathfrak{D})$ ist um mindestens zwei kleiner als die komplexe Dimension von $\Phi(\mathfrak{D})$. Die Voraussetzung (B) betrifft die Existenz eines Faserraumes über \mathfrak{D} mit der komplexen Geraden als Faser und einer (für diesen Bericht zu umständlich auszusprechenden) Definitheitseigenschaft. Der Beweis soll sich dem in der angeführten Arbeit von K. Kodaira gegebenen anschließen; die — nicht unwesentlichen — hinzukommenden Beweisschritte werden skizziert.

H. Kneser.

Kelly, John B. and L. M. Kelly: Paths and circuits in critical graphs. Amer. J. Math. **76**, 786–792 (1954).

Es handelt sich hier stets um kritische k -chromatische Graphen G_k . Aus einem Hilfssatz folgt: Zerfällt ein G_k nach Streichung von p Punkten in r Komponenten, so ist $r \leq p^{k-1}$ (nicht wie im Text $<$, statt \leq). Die maximale Länge eines Zyklus in einem G_k sei L_k , das Minimum von L_k für alle G_k mit n Knotenpunkten sei $L_k(n)$. Eine Vermutung von Dirac, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} L_k(n) = \infty$, wird hier bewiesen, während eine andere, wonach $\liminf L_k(n) n^{1/2} = 0$, ($k \geq 2$), widerlegt wird, zunächst für $k = 4$, indem an Beispielen gezeigt wird, daß $\liminf L_4(n)/\log^2 n \leq 3/\log^2(27/4)$. Hinsichtlich des Maximums der kleinsten Zyklen konnte nur bewiesen werden, daß es G_k gibt für jedes k , die keine Zyklen mit weniger als 6 Kanten enthalten.

H. Künneht.

Theoretische Physik.

● **Broglie, Louis de:** The revolution in physics. A non-mathematical survey of quanta. London: Routledge and Kegan Paul Ltd. 1954. 310 p. 18 s net.

● **Kronig, R.:** Textbook of Physics. London: Pergamon Press 1954. 855 p. 645 illustr. 70 s.

Das vorliegende Werk stellt ein Lehrbuch der Physik dar, welches ursprünglich für die Physiker der Niederlande geschrieben wurde und nunmehr in englischer Übersetzung erscheint. Unter der Leitung von R. Kronig wurde von einer Anzahl holländischer Gelehrter ein wirklich ausgezeichnetes Lehrbuch geschaffen. Dabei bemühten sich die Autoren, die verschiedenen Zweige der Physik auf demselben Niveau darzustellen und auch größeren Anforderungen zu genügen. Schwierigere mathematische Ausarbeitungen wurden in Kleindruck gebracht, um den Inhalt nicht zu sehr zu unterteilen. Die Anlage des Stoffes wurde so gewählt, daß zuerst die phänomenologischen Teile gebracht wurden, das sind Mechanik, Theorie der Schwingungen, Elektrodynamik und Optik; dann wird zur Theorie des Atomes und des Atomkerns, sowie zur atomistischen Interpretation der Materie übergegangen. Schließlich findet man als letztes Kapitel einen Überblick über die medizinische Physik, was als Novum anzusehen ist, obgleich dies, bei dem heutigen Stande unserer Wissenschaft, durchaus zu begreifen ist. Das ganze Werk benutzt das Giorgische Maßsystem. Druck und Anlage des Werkes kann als ausgezeichnet angesehen werden.

P. Urban.

● **Finkelburg, Wolfgang:** Einführung in die Atomphysik. 3. umgearb. und erweitert. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1954. XI, 543 S. 266 Abb. Kleinleinen DM 44,—.

Die erste Auflage dieses Buches ist bereits ausführlich besprochen worden (dies. Zbl. **30**, 422). Für die vorliegende 3. Auflage wurden vor allem die Kernphysik und die Festkörperphysik unter Berücksichtigung der Ergebnisse der letzten Jahre neu bearbeitet und dabei wesentlich (auf doppelten bzw. dreifachen Umfang) erweitert. Hinzugekommen sind u. a. eine eingehende Behandlung der Halbleiterphysik und der technischen Anwendungen der Kernphysik.

G. Höhler.

● **Schouten, J. A.:** *Tensor analysis for physicists*. 2. ed. Oxford: At the Clarendon Press 1954. XII, 277 p. 33 Abb. 30 s.

Die zweite Auflage unterscheidet sich grundsätzlich nicht von der ersten (dies. Zbl. 44, 383). Der behandelte Stoff deckt sich mit dem aus der ersten Auflage. Der Verf. hat am Ende zehn kurze Noten zugefügt, die den Charakter von Kommentaren haben. Im Vorwort erklärt der Verf., daß dieses Lehrbuch eine Einleitung zum Studium der Tensoranalysis sein soll. Kennt ein Physiker die Grundbegriffe des Tensorkalküls bereits, so wird ihn das gründliche Studium des ersten Teils des Schoutenschen Buches dazu führen, daß er diesen Kalkül besser, was die Strenge betrifft, beherrscht, den Formalismus dieses Kalküls zu mechanisieren vermag und andererseits in breiten Anwendungsmöglichkeiten eine gute Orientierung erreichen wird.

St. Golab.

● **Haar, Dirk ter:** *Elements of statistical mechanics*. New York: Rinehart & Company, Inc. 1954. XIII, 468 p. \$ 8,50.

In diesem Buch werden zunächst die Grundlagen der Statistischen Mechanik behandelt. Die Darstellung schließt an Vorlesungen von H. A. Kramers an. Dann wird die Anwendung an einigen typischen Beispielen erläutert. — Teil A enthält den elementaren Zugang zur Statistischen Mechanik (Maxwellverteilung, *H*-Theorem, elementare Quantenstatistik, Abzählmethoden). Es folgt in Teil B die Theorie der Gesamtheiten. Gegenüber anderen Büchern treten hier und in Teil C die „großen Gesamtheiten“ stärker in den Vordergrund. Außerdem geht Verf. auch auf das schwierige Problem einer exakten Behandlung der Quantenstatistik ein. Teil C bringt die Theorie der Zustandsgleichung, der Kondensation und der kooperativen Phänomene in einiger Ausführlichkeit. Nach einigen kurz abgehandelten weiteren Anwendungen werden im Anhang I *H*-Theorem und Ergodensatz eingehend diskutiert (55 Seiten). Es folgen kurze Kapitel über irreversible Prozesse, 3. Hauptsatz, die Darwin-Fowler'sche Methode u. a. sowie ein mathematischer Anhang. Am Ende jedes Kapitels steht ein ausführliches Literaturverzeichnis. — Das vorliegende Lehrbuch ist nicht für Anfänger bestimmt. Selbst wenn man von Kleindruck und Anhang absieht, werden stellenweise erhebliche Vorkenntnisse vorausgesetzt. Es wäre nach Ansicht des Ref. besser gewesen, das Niveau gleichmäßiger zu halten, also einige elementare Betrachtungen (Kap. X, XI) wegzulassen und dafür etwa das Kap. über Gesamtheiten in der Quantenmechanik ausführlicher zu gestalten. — Das Buch stellt eine wertvolle Ergänzung zu der vorhandenen Lehrbuchliteratur dar, nicht nur wegen der Auswahl der behandelten Gebiete sondern auch wegen der Art ihrer Darstellung.

G. Höhler.

Rosenfeld, L.: *Causalité statistique et ordre en physique et en biologie*. Anais Acad. Brasil. Ci. 26, 47—50 (1954).

Leray, Jean: *The physical facts and the differential equations*. Amer. math. Monthly 61, Nr. 7, Teil 2, 5—7 (1954).

Spiegel, Murray R.: *Applications of the Dirac delta function to the evaluation of certain integrals*. J. appl. Phys. 25, 1302—1306 (1954).

Lüst, R., A. Schlüter und E. Trefftz: *Verallgemeinerte Multipolfelder*. Z. angew. Math. Mech. 34, 299—300 (1954).

Mechanik:

● **Bouligand, Georges:** *Mécanique rationnelle*. 5. éd. Paris: Libraire Vuibert 1954. XI, 572 p. 2400f.

Il libro s'inizia con l'esposizione delle nozioni fondamentali sul calcolo vettoriale, sulla cinematica dei sistemi rigidi e dei moti relativi, sulla geometria delle masse e sulle caratteristiche dinamiche dei solidi. Segue un'esposizione, non priva di originalità, dei principi della dinamica giungendo infine ad una trattazione piuttosto approfondita delle equazioni della dinamica ed in particolare, opportunamente collegate ai principi variazionali, delle equazioni di Lagrange di cui vengono indicate varie applicazioni. Un capitolo piuttosto ampio è dedicato alla teoria degli impulsi e degli urti e un altro a numerosi esempi di studio di sistemi a uno o più gradi di libertà. Seguono vari complementi di meccanica analitica che portano il lettore nel campo delle ricerche più elevate su quest'argomento. Vengono poi accennate varie questioni intorno ai corpi deformabili (fili, corde, corpi elastici, fluidi) e sulle relatività ristretta e generale. Nella seconda parte sono esposti diversi complementi di cinematica e di dinamica specialmente sull'influenza dell'attrito, sul calcolo delle reazioni vincolari, sui sistemi a vincoli unilaterali; inoltre vengono risolti alcuni problemi di meccanica proposti agli esami di aggregazione. L'esposizione è sempre chiara e attraente; la lettura del libro del Bouligand, anche se esso non costituisce un trattato completo di meccanica, è indubbiamente assai utile.

D. Graffi.

Gallissot, F.: Les formes extérieures en mécanique. Ann. Inst. Fourier 4, 145—297 (1954).

Voici un mémoire fondamental de Mécanique Analytique. Nous allons résumer l'essentiel des chapitres qui le composent. Au chapitre I, l'A. expose sa conception de l'axiomatique de la dynamique. On considère l'espace à sept dimensions E_7 , produit tensoriel d'un espace fibré E_3 et de la droite numérique E_1 : $E_7 = E_3 \otimes E_2 \otimes E_1$ ($x^j \in E_3$; $v^j \in E_2$; $t \in E_1$). On introduit dans E_7 la forme différentielle extérieure, construite sur les différentielles dx^j ; dv^j , arbitraires, v^j étant quelconque: $\omega = \sum_1^3 k_{ij} (m dv^i - X^i dt) \wedge (dx^j - v^j dt)$ où: m est la

masse d'un point mobile; X^i , la composante de la résultante \vec{X} des forces extérieures appliquées au point; k_{ij} , le symbole de Kronecker. Formons les équations associées à ω ; trois d'entre elles traduisent la relation $m d\vec{v} dt = \vec{X}$; les trois équations restantes équivalent à $\vec{v} = d\vec{x}/dt$. Ce procédé de formation des équations fondamentales de la dynamique s'applique ainsi à la relativité restreinte. L'A. montre aussitôt les avantages de sa méthode: ω s'exprime toujours au moyen des intégrales premières des équations associées et de t ; si $d\omega = 0$, ω s'exprime seulement au moyen d'intégrales premières et de leurs différentielles; ω est invariante par transformations du groupe galiléen; ω peut s'exprimer uniquement au moyen des 6 formes remarquables de Pfaff, construites sur les différentielles des paramètres de position et des vitesses et du temps. Mais il y a plus. Dans la mécanique classique, les transformations de Hamilton et de Lagrange apparaissent un peu comme des artifices de calcul. Le point de vue de l'A. permet de retrouver ces résultats classiques d'une manière nécessaire. Si, alors, on effectue sur les variables hamiltoniennes une transformation ponctuelle: $p_i = p_i(x^\alpha, t)$; $q^i = q^i(x^\alpha, t)$; $\alpha = 1, 2, \dots, 6$, on montre, d'une part, que ω s'écrit: $\omega = k_{\alpha\beta} \omega^\alpha \wedge \omega^\beta = k_{\alpha\beta} \omega^\alpha \wedge dt$; $\beta = 1, 2, \dots, 6$; où $(k_{\alpha\beta}, k_{\alpha 0})$ est un tenseur antisymétrique d'ordre 2, à composantes fonctions des x^α et de t et où ω^α sont des formes de Pfaff en dx^α , et, d'autre part, que les équations du mouvement s'écrivent encore: $\dot{\omega} \wedge \omega^\alpha = k_{\alpha\beta} \omega^\beta = k_{\alpha 0} dt = 0$. Ces résultats traduisent une sorte d'invariance des équations de la dynamique par rapport à la transformation ponctuelle la plus générale. On voit comment le processus de l'A. simplifie et assouplit les changements de variables et comment il permet d'apercevoir de nouveaux cas d'intégrabilité des systèmes différentiels étudiés. Ce point de vue est étendu ensuite aux systèmes matériels formés d'un nombre fini de solides. Mais l'instrument de recherches qu'on vient de décrire est susceptible d'un perfectionnement important. L'A. associe à un système matériel à $2n$ degrés de liberté une forme ω , de degré 2, de rang $2n$, définie sur une variété fibrée V_{2n-1} convenable. L'emploi de l'opérateur de l'antidérivation $i(x)$ introduit par Henri Cartan permet de former le système des caractéristiques de ω — c'est à dire des équations du mouvement — en appliquant à ω $2n$ fois l'opérateur $i(x)$. Cette fois, le problème est posé en termes de formes et tous les inconvénients résultant de l'emploi d'un repère particulier sont éliminés. Signalons encore les définitions — qui s'avéreront fécondes — du champ caractéristique et des fonctions dérivées d'une fonction numérique par rapport à un champ. Telle est, incomplètement résumée, la matière du chapitre I. L'A. est désormais en possession de l'instrument mathématique nécessaire pour résoudre deux problèmes fondamentaux de la Mécanique des solides: problèmes des liaisons, problèmes d'intégration des équations de la dynamique. Pour aborder la théorie des liaisons, l'A. en donne une définition nouvelle précise, dont l'exemple ci-après fait comprendre le sens. Considérons une sphère solide, roulant et pivotant sans glisser sur un plan fixe. La liaison imposée ainsi à la sphère se traduit en annulant deux formes de Pfaff. Pour l'A. chacune des relations ainsi obtenues est une liaison, à laquelle s'associe l'expression de la puissance des forces nécessaires à sa réalisation. Observons ici que l'analyse de l'A. englobe le cas le plus général: liaison non linéairement holonome, frottement avec coefficient dépendant de la pression normale et de la vitesse de glissements, liaisons avec asservissement de Béghin, etc. Il est impossible de rendre compte en détail de tout ce que l'A. tire de ces définitions, combinées avec l'emploi des méthodes du chapitre I. Citons, sans songer à en préciser le contenu mathématique, les conclusions les plus saillantes. L'A. indique un procédé régulier pour éliminer les forces de liaison des équations du mouvement; il obtient les équations différentielles entre les paramètres de position et des vitesses sous une forme très condensée et d'un maniement très commode. Dans le cas de liaisons unilatérales, il parvient à la discussion définitive des éventualités qui peuvent se présenter pour un système de solides à l'instant initial. Des procédés réguliers permettent de forger les exemples effectifs de la réalisation des éventualités prévues. Citons, pour finir, ce beau résultat: en dehors des liaisons du type d'Appell (comprenant les cas classiques d'holonomie et de non-holononomie linéaires) le mouvement d'un système de solides à liaisons unilatérales, peut n'être pas défini par les conditions initiales; lorsque cette circonstance singulière se produit, on sait discuter toutes les éventualités ultérieures possibles. A noter que l'exposé est illustré de nombreux exemples aussi ingénieux qu'instructifs. Tel est le résumé des chapitres II, III, IV et V. Le dernier chapitre est, peut-être, le plus important de ce beau mémoire; il est consacré au problème de réduction aux quadratures de cette

classe importante Σ des systèmes différentiels que l'on obtient en écrivant les équations caractéristiques d'une forme ω , de degré 2 et de rang $2n$, définie sur une variété indéfiniment différentiable. Les équations de la dynamique en particulier, rentrent dans ce cadre. L'A. introduit d'abord de nouveaux opérateurs analogues à ceux de Cartan. Il établit ensuite une correspondance remarquable entre une forme de Pfaff nulle sur les lignes intégrales de Σ et un élément d'un module de l'anneau des fonctions numériques indéfiniment différentiables. Des définitions nouvelles et fécondes des notions connues en résultent; celle d'intégrale première de Σ et celle de transformation infinitésimale de Σ . Alors, apparaît une classification naturelle des Σ . Si la forme génératrice ω de Σ vérifie $d\omega = 0$, l'A. donne les conditions nécessaires et suffisantes de réductibilité de Σ aux quadratures. On retrouve ainsi en quelques lignes, les cas classiques d'intégrabilité des équations de la dynamique et on en aperçoit de nouveaux. Si $d\omega \neq 0$, le résultat de l'A. s'énonce ainsi: le problème d'intégration revient à chercher d'abord la solution d'un système complètement intégrable de $(2n-r)$ formes de Pfaff; ensuite à intégrer un système différentiel de r formes invariantes; ce dernier problème peut être résolu dans certains cas particuliers signalés par l'A. Il resterait à élucider les liens de la théorie qu'on vient de résumer avec celle de l'intégration logique de Drach, plus générale (puisque tout système différentiel relève de la méthode) mais aussi d'un maniement moins commode. En résumé, l'A. a réussi à renouveler un sujet classique et à créer un instrument mathématique qui dépasse largement le cadre des applications qu'il avait principalement en vue. *J. Kravtchenko.*

● **Gouyon, R.:** Le problème de mécanique rationnelle à l'agrégation. Paris: Libraire Vuibert 1954. 253 p. 2000 fr.

Dopo alcuni complementi sulle equazioni di Lagrange, sul teorema del momento della quantità di moto, e sulla teoria degli urti, l'A. espone, talvolta con diversi metodi, la soluzione di alcuni problemi proposti agli esami di aggregazione, problemi, in generale, relativi alla dinamica dei sistemi a più gradi di libertà e sempre a carattere molto elevato. *D. Graffi.*

Forbat, N.: Sur un problème de mouvement relatif. Acad. Roy. Belgique. Bull. Cl. Sci., V. Sér. 40, 371—376 (1954).

Es wird die Hamilton-Jacobische partielle Differentialgleichung für die Bewegung eines freien Massenpunktes im konservativen Feld in einem bewegten Bezugssystem abgeleitet, die dieselbe Form wie in einem Inertialsystem beibehält, wenn man die Hamiltonsche Funktion — ähnlich wie die kinetische Energie — in absoluten und relativen Anteil aufspaltet. In einer früheren Arbeit [Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 31, 462—473 (1944)] wurden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen aufgestellt, damit die Hamilton-Jacobische Gleichung separabel ist, d. h. eine Lösung von der Form $W = W_0(t) + W_1(x) + W_2(y) + W_3(z)$ besitzt. Der Verf. leitet daraus das Ergebnis her, daß für Relativbewegungen ein Problem dann und nur dann durch Separation lösbar ist, wenn es dies bei festgehaltenem Achsenkreuz ist und das Koordinatensystem lediglich eine Translationsbewegung — im nicht kräftefreien Fall mit konstanter Geschwindigkeit — ausführen darf. Wegen dieser sehr einschränkenden Bedingungen können sogar einfachste Probleme in einem bewegten Bezugssystem zu großen Schwierigkeiten führen. *F. Selig.*

Jeffreys, Harold: What is Hamilton's principle? Quart. J. Mech. appl. Math. 7, 335—337 (1954).

On considère un système à r paramètres q_s dans lequel le travail de certaines forces s'exprime par une fonction W , alors que le travail des autres s'annule pour les déplacements tels que $\sum a_s(q) dq_s = 0$. Les équations du mouvement s'écrivent, en posant $L = T + W$, (1) $(d/dt) \partial L / \partial \dot{q}_s - \partial L / \partial q_s - \lambda a_s = 0$ où λ est une inconnue. Elles équivalent à l'équation $\int_{t_0}^{t_1} \{ \delta L + \lambda \sum a_s dq_s \} dt = 0$ ($dq_s = 0$ pour $t = t_0, t_1$) que plusieurs auteurs considèrent comme une forme étendue du principe d'Hamilton. — L'A. remarque que la méthode de Hertz, étendue à ces systèmes, reviendrait à écrire $\delta \int (L - \sum \lambda a_s \dot{q}_s) dt = 0$, et ne conduirait pas, en général, aux équations (1). *R. de Possel.*

Capon, R. S.: A unified formalism in mechanics. Math. Ann. 127, 305—318 (1954).

Das Grundprinzip des Verf. ist eine Verallgemeinerung des Hertz'schen Prinzips der geradesten Bahn: Das Prinzip der stationären Krümmung in dem durch die Zeit und eine weitere Hilfskoordinate (= S) erweiterten Konfigurationsraum des

Systems mit einer durch kinetische und potentielle Energie (sowie den elektrodynamischen Potentialen) bestimmten Riemannschen Metrik. Es wird gezeigt, daß dieses Prinzip auch bei anholonomen Nebenbedingungen zu den richtigen Bewegungsgleichungen führt. Die Einschränkung, daß die elektrodynamischen Potentiale nicht geschwindigkeitsabhängig sein dürfen (äußere Felder), wird durch Ausdehnung des Prinzips auf Finslersche Räume überwunden.

F. Penzlin.

Eves, Howard: Systems of particles with a common centroid. Math. Mag. 28, 1—7 (1954).

● Popoff, Kyrill: Die Hauptprobleme der äußeren Ballistik im Lichte der modernen Mathematik. (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik. Bd. 11.) 2. Aufl. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1954. XV, 278 S.; 20 Textfig. Ganzleinen DM 22.—.

Die erste, 1932 erschienene Auflage (dies. Zbl. 5, 358) führt den Titel: „Das Hauptproblem der äußeren Ballistik ...“, und dementsprechend wurde nur das sogenannte 1. Hauptproblem, die Bewegung eines als Massenpunkt gedachten Geschosses unter dem Einfluß der Schwere und des der Bewegung entgegengesetzten Luftwiderstandes behandelt. Die beiden ersten Teile der Neuauflage stellen einen praktisch unveränderten Abdruck dieser ersten Auflage dar. Neu hinzugekommen ist ein dritter Teil, in dem das zweite Hauptproblem, die Bewegung des Geschosses um seinen Schwerpunkt, dargestellt wird. In dem ganzen Buch ist der Verf. bestrebt, die Entwicklungen mathematisch einwandfrei herzuleiten; er benutzt hierfür vorwiegend Reihenentwicklungen nach einem Parameter, indem er die von Poincaré in die Himmelsmechanik eingeführten Methoden auf die ballistischen Rechnungen überträgt. Die mathematische Strenge bringt es natürlich mit sich, daß oft auf Fragen eingegangen wird, die für den reinen Praktiker weniger Bedeutung haben, so z. B., wenn im 7. Kapitel das Verhalten der Lösung einer der Bewegungsgleichungen in der Umgebung von $v = \infty$ (v = Geschwindigkeit) untersucht wird. — Nach einer kurzen Einleitung, in der die benutzten Lösungsmethoden angedeutet werden, wird im ersten Teil auf „Die Bewegung eines Punktes in einer Atmosphäre konstanter Dichte“ eingegangen. Die Verzögerung durch den Luftwiderstand wird in der klassischen Form $c \cdot F(v)$ angesetzt, worin c der von der Höhe abhängigen Luftdichte proportional ist. Nach Aufstellung der Bewegungsgleichungen folgt eine Anwendung einer Theorie von J. Drach und Denjoy, die alle Widerstandsfunktionen liefert, mit denen die Hauptgleichung (Gleichung der Hodo-graphenkurve) durch Quadraturen lösbar ist. Das dritte Kapitel bringt dann Reihenentwicklungen, die zu den bekannten Tangens- und Sinus-Formeln des Verf. führen. Auch in den folgenden Kapiteln wird auf diese Reihen eingegangen, auf dabei auftretende singuläre Stellen, auf Maximal- und Minimalwerte der Geschwindigkeit und auf die Konvergenz. — Im zweiten Teil „Die Bewegung eines Punktes in einer Atmosphäre veränderliche Dichte“ (10. bis 15. Kap.) werden die beiden Gesetze für die Abnahme der Luftdichte mit der Höhe h : $e^{-k \cdot h}$ und $1/(1 + k \cdot h)$ behandelt, das erste in Verbindung mit einem der Geschwindigkeit nahezu proportionalen Widerstand, im zweiten Fall bei nahezu quadratischem Widerstandsgesetz. Den Hauptteil der Untersuchungen bildet auch hier das Verhalten in der Nähe besonderer Punkte, z. B. des Gipfels. — Der neue dritte Teil „Die Bewegung des Geschosses um seinen Schwerpunkt“ (16. bis 23. Kap.) geht von den Eulerschen Kreisgleichungen aus, die sich hier in erster Näherung vereinfachen lassen, da die Drehgeschwindigkeitskomponente um die Geschosslängsachse die beiden anderen Komponenten meist stark überwiegt. Dieses vereinfachte System, die Mayowskyschen Gleichungen, liefern die Präzessionsbewegung. Als einziges Moment wird hierbei zunächst das Moment des Luftwiderstandes angenommen. Später wird auch ein dazu senkrechtes Moment (Kraftwirkung senkrecht zur Anströmebene) vorausgesetzt, jedoch nicht das Moment der Magnuskraft, sondern ein von der Seitenreibung herrührendes Moment, indem sich der Verf. auf Überlegungen von Esclangon stützt. Die Integration erfolgt wieder durch Entwicklungen nach einem Parameter. Die Schwerpunktsbahn wird durch diese Rechnungen als eben vorausgesetzt, d. h. die Rückwirkung der Pendelung auf die Schwerpunktsbewegung wird nicht in Betracht gezogen. Die Nutationsbewegungen werden nur kurz gestreift, und das abschließende Kapitel „Allgemeine aerodynamische Betrachtungen“ geht nur summarisch auf die Luftkraftverhältnisse am Geschosß ein, auf deren Messung und auf bestehende Analogien zur Elektrodynamik. Der ganze dritte Teil hat einen Vorläufer (vgl. dies. Zbl. 43, 184). Viele Abschnitte sind direkt aus diesem Heft übernommen. Auch wird wegen Literaturangaben auf dieses Heft verwiesen.

H. Molitz.

Vernić, Radovan: Die Stoßbedingungen im Dreikörperproblem. Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron., II. Ser. 9, 3—12 und kroatische Zusammenfassg. 12—13 (1954).

In Weiterführung seiner früheren Untersuchungen über das Dreikörperproblem

[Diskussion der Sundmanschen Lösung des Dreikörperproblems, Zagreb 1953; Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron., II. Ser. 8, 247—266 (1953)] untersucht der Verf. hier anschließend an J. Chazy [Ann. sci. École norm. sup., III. Sér. 39, 29—130 (1922)] zuerst die dynamischen Extremaleigenschaften beim Zusammenstoß im Dreikörperproblem. Es wird so unter anderem bewiesen, daß alle Zusammenstöße in der invariablen Ebene erfolgen, in welcher im Stoßaugenblick auch alle Stoßtangente liegen. Er betrachtet dann die periodischen Stoßbahnen im allgemeinen Dreikörperproblem und beweist zwei Sätze, aus denen hervorgeht, daß sich weder die binären noch die ternären Zusammenstöße im Endlichen häufen können, eine Eigenschaft, die für den Zweierstoß schon von K. F. Sundman [Acta Soc. Sci. Fennicae 35, Nr. 9 (1909)] ausgesprochen wurde, aber, wie der Verf. („Diskussion“) gezeigt hat, ungenügend begründet war. Es werden dann im zweiten Teil einige geometrische Sätze bewiesen und im dritten Teil aus der transformierten Lagrangeschen Gleichung $(d du)(V dJ du) = 2(1 - 2h/V)$, wo, wie gewöhnlich, J die sog. Lagrangesche Funktion, V das Potential und h die Gesamtenergie bedeutet, während der Parameter u mit der Zeit t durch $du = V dt$ verbunden ist, die notwendigen Bedingungen dafür hergeleitet, daß in einer gegebenen Bahn eine bestimmte Stoßart geschieht. *T. P. Angelitch.*

Chochlov, R. V.: Zur Theorie der Resonanz bei kleiner Amplitude der äußeren Kraft. Doklady Akad. Nauk SSSR. n. Ser. 97, 411—414 (1954) [Russisch].

Die Arbeit enthält eine Diskussion der Schwingungsvorgänge in einem System mit geschwindigkeitsproportionalem Reibungsglied im Falle einer aufgezogenen periodischen äußeren Kraft mit kleiner Amplitude und einer Frequenz in der Nachbarschaft der Eigenfrequenz der ungestörten Schwingung im Hinblick auf elektrotechnische Anwendungen. *H. Bucerius.*

Basch, A.: Über Schwingungen von Systemen mit zwei Freiheitsgraden. Österreich. Ingenieur-Arch. 8, 83—86 (1954).

In einem mechanischen System seien kinetische und potentielle Energie $T = \frac{1}{2}(m_{11}\dot{q}_1^2 + 2m_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + m_{22}\dot{q}_2^2) \geq 0$, $V = \frac{1}{2}(c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2) \geq 0$. Es wird in rein mechanischer Ausdrucksweise mit den Begriffen der „Trägheitsellipse“ und der „Elastizitätsellipse“ die verallgemeinerte Hauptachsentransformation durchgeführt. *W. Haacke.*

Kac, A. M.: Biharmonische Schwingungen eines dissipativen nicht-linearen Systems, die durch eine harmonische störende Kraft hervorgerufen oder aufrecht-erhalten werden. Priklad. mat. Mech. 18, 425—444 (1954) [Russisch].

Der Verfasser betrachtet ein einfaches nicht lineares System, dessen Bewegungsgleichung $(1) \ddot{x} + k\dot{x} + x + x^3 = R \sin m\omega t$ lautet, wo k, R, ω positive Konstanten und m eine ganze Zahl ist. Die einfachsten Schwingungen eines solchen Systems, die angenähert durch $x = A \sin(m\omega t + q)$ dargestellt sind, wurden vom Verf. früher behandelt [Trudy Leningr. ind. Inst. Nr. 3 (1939)]. In dieser Arbeit betrachtet der Verf. etwas zusammengesetztere Schwingungen, die durch die Gleichung (1) bestimmt werden, und die durch $x = C + A \sin(m\omega t + q) + B \sin(n\omega t + \psi)$ angenähert dargestellt sind, wo C, A, B, q, ψ Konstanten und n eine ganze zu m teilerfremde Zahl ist. Zur Bestimmung der angeführten Konstanten bedient sich der Verf. der Galerkinschen Methode. In Vergleich zu früher untersuchten Fällen zeigt der Verf., daß man zu neuen Resultaten nur in folgenden vier Fällen kommt: $m = 1, n = 3$; $m = 3, n = 1$; $m = 1, n = 2$; $m = 2, n = 1$. Der Verf. analysiert diese vier Fälle ausführlich, gibt aber selbst zu, daß man, angesichts der nicht ganz strengen Methode der Untersuchung, nicht mit Sicherheit behaupten kann, daß die in dieser Arbeit gefundenen Schwingungsarten mit allen ihren Eigenschaften auch tatsächlich existierten. *T. P. Angelitch.*

Kauderer, H.: Zur kinetischen Bestimmung der Kennlinie eines nichtlinearen freien Schwingers. Ingenieur-Arch. 22, 215—226 (1954).

Es handelt sich um die Aufgabe, aus der Abhängigkeit der Schwingungsdauer T von der Amplitude Q einer nichtlinearen freien Schwingung auf die Kennlinie $R(q)$, d. h. die Abhängigkeit der Rückstellkraft R vom Ausschlag q zu schließen. Zur Behandlung der Aufgabe wird zunächst eine Abelsche Integralgleichung mit bekannter Lösung für eine Hilfsaufgabe herangezogen. Damit gewinnt man dann für den Fall, daß T als Potenzreihe in Q^2 vorliegt, aus deren Koeffizienten die entsprechenden Koeffizienten der Entwicklung von $R(q)$ nach Potenzen von q . Die Lösung gelingt ähnlich auch für den allgemeineren Fall, daß T als Potenzreihe von Q vorliegt. Anwendungsbeispiele, ein Verfahren zur Nachprüfung der Genauigkeit sowie eine geschlossene Lösung für den Fall linearer Abhängigkeit T von Q schließen die Arbeit ab.

R. Zurmühl.

Kauderer, H.: Zur Analyse der Dämpfung freier Schwingungen. Ingenieur-Arch. 22, 251—257 (1954).

Für freie gedämpfte Schwingungen mit linearer Rückstellkraft, jedoch nichtlinearem Dämpfungsgesetz soll aus dem zeitlichen Schwingungsverlauf $q(t)$ auf das Dämpfungsgesetz geschlossen werden. Bei einer Schwingungsgleichung der Form $\ddot{q} + \omega^2 q + \varepsilon g(q) = 0$ mit gegeben 1 kleinem dimensionslosen Parameter ε wird für die Dämpfungsfunktion $g(q)$ ein Reihenansatz $g(q) = c_0 q + c_1 \dot{q} + c_2 \dot{q}^2 + c_3 \dot{q}^3 + \dots$ gemacht. Mit Hilfe eines Ansatzes wie beim Verfahren von Kryloff-Bogoljuboff wird dann zwischen den Differenzen $y_k = q_k - q_{k+1}$ und den Summen $x_k = q_k + q_{k+1}$ zweier aufeinander folgender positiver Größt ausschläge q_k eine Grundgleichung in Form einer Potenzreihe entwickelt. $y_k = \sum_{v=0}^{\infty} \gamma_v x_k^v$, deren Koeffizienten γ_v mit den Koeffizienten c_v der Dämpfungsfunktion in einfacher Beziehung stehen. Aus Beobachtungswerten q_k lassen sich dann etwa die $n+1$ ersten dieser Koeffizienten mittels Ausgleichsparabeln ermitteln. Angenähert lassen sie sich auch unmittelbar zeichnerisch aus der Parabel $y = g(x)$ entnehmen.

R. Zurmühl.

Caprioli, Luigi: Sul comportamento energetico di alcuni sistemi meccanici non-lineari. Atti Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 16, 463—467 (1954).

Verf. stellt die Energiebilanz auf bei den Kippschwingungen eines elastisch gebundenen Teilchens auf einem mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 vorbeigeführten Fließband bei einer durch einen Parameter ε gemessenen Nichtlinearität des Vorganges, der durch $m \ddot{x} - h^2 \dot{x} - k^2 x + F(v_0 + \dot{x}) = 0$ beschrieben wird. F wird als Polynom 3. Grades und \dot{x} als Überlagerung einer harmonischen Schwingung der Kreisfrequenz ω und von ε proportionalen Störgliedern der Kreisfrequenzen 2ω und 3ω angesetzt.

L. Collatz.

Mitropol'skij, Ju. A.: Über die Wirkung einer „sinusoidalen“ Kraft mit modulierter Frequenz auf einen nicht-linearen Vibrator. Ukrain. mat. Žurn. 6, 442—447 (1954) [Russisch].

Slibar, A.: Optimale Schwingungstilgung durch Fliehkraftpendel. Z. angew. Math. Mech. 34, 328—329 (1954).

Readey, William B.: Optimum design of indeterminate frames. J. aeronaut. Sci. 21, 615—620 (1954).

Elastizität. Plastizität:

● **Swainger, Keith: Analysis of deformation (Vol. 1: Mathematical theory).** London: Chapman & Hall Ltd., 1954. XIX, 285 S. 63 s.

Die neue Theorie des Verf. will endliche Deformationen elastischer und elasto-plastischer Medien durch lineare Differentialgleichungen mit nicht-konstanten Koeffizienten beschreiben. Da der Verf. seit mehreren Jahren unter Berufung auf seine Theorie die übliche Behandlung angreift, ohne die von ihm verwendeten Begriffe scharf zu definieren, ist das Erscheinen des Buches im Interesse der Klärung zu begrüßen. An Stelle der üblichen räumlichen Verschiebung u vom Ortsvektor \vec{r} des undeformierten zu \vec{r} des deformierten Zustandes erscheinen die „Dehnungsverschiebung“ \vec{D} und die „Relativverschiebung“ \vec{D}^* als die grundlegenden Begriffe, die unter Bezugnahme auf \vec{r} als der unabhängigen Variablen wie folgt definiert sind: Das Differential $d\vec{D}^*$ ist der Vektor mit den Komponenten $d\vec{D}_i^* = d\vec{r}_i \cdot d\vec{r}_i$, $d\vec{r}_i$ in der i -ten Hauptspannungsrichtung; $d\vec{r}_i$ ist dabei das Urbild von $d\vec{r}_i$. $d\vec{D}^* = \mathfrak{M} \cdot d\vec{r}$ definiert die „Dehnungsyade“ \mathfrak{M} . Weiter ist $\vec{D} = \vec{r} - \vec{r}^{\text{inst}}$, wobei die „momentane Ausgangslage“ \vec{r}^{inst} aus \vec{r} durch Anwendung der Drehung

entsteht, die für ein beliebig fest herausgegriffenes \mathbf{r}_0 die Hauptspannungsrichtungen in ihre orthogonalen Urbilder zurückdreht. Neben \mathfrak{M} wird die „invariante quadratische Dehnungsmetrik“ \mathfrak{M} wie üblich durch $|\dot{\mathbf{d}}\mathbf{t}|^2/|\mathbf{d}\mathbf{x}|^2 = \mathbf{d}\mathbf{x}' \mathfrak{M} \mathbf{d}\mathbf{x}/|\mathbf{d}\mathbf{x}|^2$ definiert. Gemäß $d\vec{D}^* = \mathfrak{M} \cdot d\mathbf{x}$ ist $\mathfrak{M} = \nabla \vec{D}^*$. Mit der Begründung, daß \vec{D}^* eine eindeutige stetige Ortsfunktion ist, wird $\vec{D}^* = \Gamma E$ mit dem „Dehnungspotential“ E gesetzt, so daß $\mathfrak{M} = \Gamma \nabla E$ folgt. Da \vec{D} auf ein geradliniges und \vec{D}^* auf ein krummliniges Orthogonalsystem bezogen sind, sind \vec{D} und \vec{D}^* vom „Dehnungsstandpunkt“ aus in einem Sinne äquivalent, den Ref. nicht verstehen konnte. Für infinitesimale Deformationen wird gefolgert (*): $\vec{D} = \vec{D}^*$ bis auf Glieder höherer Ordnung. — Bem. d. Ref.: Setzt man $\dot{\mathbf{d}}\mathbf{t} = \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{E} \cdot \mathbf{d}\mathbf{x}$ mit der reinen Streckung $\mathfrak{E}(\mathbf{r})$ in den Hauptspannungsrichtungen und der reinen Drehung $\mathfrak{R}(\mathbf{r})$, so ist einfach $d\vec{D}^* = (\mathfrak{E} - \mathfrak{R}) d\mathbf{x}$ und $\vec{D} = \mathbf{r} - \mathfrak{R}_0 \mathbf{t}$. $\vec{D}^* = \int_0^{\mathbf{r}} d\vec{D}^*$ existiert genau dann, wenn $\text{rot } \mathfrak{E} = 0$ ist, was nur bei Deformationen der Gestalt $\dot{\mathbf{t}} = R_0 \cdot \Gamma \Phi$ mit der skalaren Funktion $\Phi(\mathbf{r})$ möglich ist. In diesem Spezialfall ist exakt $\vec{D} = \vec{D}^* = \nabla(|\mathbf{r}|^2/2 - \Phi)$, so daß E existiert und die „Äquivalenz“ zur Gleichheit wird. Im allgemeinen Falle dagegen sind die Behauptungen des Verf. mangels Existenz von \vec{D}^* leer; dies gilt auch für infinitesimale Deformationen, so daß (*) im allgemeinen falsch ist. — Bei der Spannungsanalyse wird ebenso ungerechtfertigt für den Spannungstensor $\mathfrak{P} = \Gamma \Gamma' H$ angesetzt, was für Gleichgewichtszustände ohne Volumkräfte die Konstanz der mittleren Spannung nach sich zöge. Durch falsche Anwendung der Poissonschen Formel wird S. 62 eine Formel abgeleitet, aus der sogar $\mathfrak{P} = 0$ folgt. Die St. Venantsche Verträglichkeitsbedingung $\text{rot } \mathfrak{M} \text{ rot} = 0$ für infinitesimale Deformationen wird als nicht hinreichend gerügt und statt dessen $\text{rot } \mathfrak{M} = 0$ gefordert. Falsch sind auch die Formeln über den zeitlichen Zuwachs der oktaedralen Spannungskomponenten; der Beweis des Verf. beruht auf einer laufend verwendeten falschen Interpretierung der Folgerung $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0$ aus der falschen Beziehung (*), nämlich (**): Bei Fortgang der Deformation sind die Hauptspannungsrichtungen stationär. — was aber nicht einmal für den Spezialfall allgemein gilt, wo \vec{D}^* existiert. — Die Behandlung des Zusammenhanges zwischen Dehnung \mathfrak{M} und Spannung \mathfrak{P} beruht auf der falschen Prämisse (***) und einer Vermischung der Dehnungsanalyse mit einem \mathfrak{M} - \mathfrak{P} -Zusammenhang spezieller Art. Dadurch liefert der vorgeschlagene lineare Ansatz im anisotropen Fall 27 Konstante, jedoch nach einer Umformung nur 18 Konstante, die auf die Hauptspannungsrichtungen bezogen sind, was bei anisotropem Material sowieso im allgemeinen unstatthaft ist. — Für elastoplastisches Material wird $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^k + \delta \mathfrak{M}^p$ gesetzt, wo \mathfrak{M}^k den elastischen Anteil bedeutet, der durch eine auf (***) beruhende Integration gebildet wird, während $\delta \mathfrak{M}^p$ der „letzte zeitliche Zuwachs“ des plastischen Anteiles ist. In konsequenter Weiterführung mathematischer Unmöglichkeiten wird dann $\vec{D}^* = \int_0^{\mathbf{r}} \mathfrak{M}^p d\mathbf{x}$ definiert und damit weitergearbeitet. — Die Kapitel über isotrope elastische und elasto-plastische Medien ruhen auf diesen Grundlagen. — Ref. verzichtet auf die Anführung zahlreicher weiterer mathematisch falscher Behauptungen, die in dem angekündigten Teil II des Buches zur Lösung spezieller Deformationsprobleme dienen sollen.

H. Richter.

Syrovatskij, S. I.: Die Instabilität der tangentialen Unstetigkeiten in einem kompressiblen Medium. Žurn. eksper. teor. Fiz. 27, 121–123 (1954) [Russisch].

Zizias, G. A.: A simple nomogram for the ratios of octahedral to maximum shearing stresses and its physical interpretation. J. appl. Mech. 21, 291–293 (1954).

Fastov, N. S.: Über die Kinetik der Restdeformationen, die durch Selbstdiffusionsrelaxation der Spannungen verursacht wird. Doklady Akad. Nauk SSR, n. Ser. 99, 753–756 (1954) [Russisch].

Brdička, Miroslav: Covariant form of Galerkin's general solution of elastic equilibrium equations. Czechosl. J. Phys. 4, 246 (1954) [Russisch].

Džanelidze, G. Ju.: Das Prinzip von Saint-Venant in der Elastizitätstheorie und damit zusammenhängende Probleme. Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 4 (62), 249 (1954) [Russisch].

Graffi, D.: Über den Reziprozitätssatz in der Dynamik der elastischen Körper. Ingenieur-Arch. 22, 45–46 (1954).

Verf., der schon früher (dies. Zbl. 36, 400) das bekannte Reziprozitätsgesetz der Dynamik der elastischen Körper in eine Form gebracht hat, in der die Trägheitskräfte nicht auftreten, leitet dieses Ergebnis hier nochmals — mit Hilfe einer Laplace-Transformation — bei verschwindenden Anfangswerten der Verschiebungen und ihrer ersten Ableitungen her, wendet es auf zwei

spezielle Arten von Kräftesystemen an (Kräfte, die als Produkt eine Ortsfunktion mit der für alle Kräfte gleichen Zeitfunktion erscheinen, und konzentrierte Kräfte) und zeigt, daß es auch noch bei Anwesenheit von Reibungskraften gilt, die proportional zur Ableitung der Dehnungen vorausgesetzt werden. *M. J. De Schwarz.*

Colonetti, Gustavo: A proposito del secondo principio di reciprocità. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 17, 3—4 (1954).*

Huth, J. H.: A note on the elastic wedge problem. *J. appl. Phys. 25, 929 (1954).*

Plainevaux, J. E.: Sur le profil optimum à donner aux tôles ondulées et aux palplanches. *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 40, 962—969 (1954).*

Plainevaux, J. E.: Guidage rectiligne sur lames élastiques. Comparaison de divers types connus et nouveaux. *Nuovo Cimento, IX. Ser. 12, 37—59 (1954).*

Selig, F.: Der Potentialbegriff in der Motorrechnung und seine Anwendung in der Theorie dünner Stäbe. *Z. angew. Math. Mech. 34, 327—328 (1954).*

Islinskij, A. Ju.: Betrachtung von Fragen der Stabilität des Gleichgewichts elastischer Körper vom Standpunkt der mathematischen Elastizitätstheorie. *Ukrain. mat. Žurn. 6, 140—146 (1954) [Russisch].*

Stabilitätsprobleme werden allgemein im Rahmen gewisser Näherungsgleichungen der Elastostatik behandelt, welche nur solange gelten, als eine oder zwei Abmessungen des elastischen Körpers klein sind gegen die anderen. Verf. zeigt am Beispiel einer unter gleichförmigem einachsigen Druck stehenden dicken Platte von konstanter Stärke, daß man die Verzweigungsstelle des Gleichgewichts auch auf Grund der allgemeinen Gleichgewichts- und Kompatibilitätsgleichungen des elastischen Körpers finden kann, wenn man dabei die Grenzbedingungen für die Oberfläche des deformierten Körpers anschreibt. Durch diesen letzteren Vorgang wird zugleich das Prinzip der Eindeutigkeit des Gleichgewichtszustandes umgangen. Auf ältere Erörterungen dieser Frage, z. B. bei R. V. Southwell [*Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A. 213, 187 (1913)*] wird in der Arbeit nicht hingewiesen. *S. Woinowsky-Krieger.*

Islinskij, A. Ju.: Über einen Grenzübergang in der Theorie der Stabilität elastischer rechteckiger Platten. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 95, 477—479 (1954) [Russisch].*

Eine dünne rechteckige Platte von konstanter Biegesteifigkeit D besitze zwei gestützte Ränder auf $x = \pm l/2$ und zwei kräftefreie Ränder auf $y = \pm b$. Steht die Platte unter einem gleichförmigen Druck p in Richtung x , so läßt sich der Beuldruck p_k aus der Differentialgleichung der Plattenbiegung leicht finden. Schreibt man dann $-p_k = (\pi^2 D / l^2) \mu(\beta)$ mit $\beta = bl$, so ergibt sich für $\beta \rightarrow 0$ der Eulerwert für p_k . Für $\beta \rightarrow \infty$ strebt aber $\mu(\beta)$ wider Erwarten nicht gegen eins. Wie Verf. zeigt, erhält man vielmehr für μ eine algebraische Gleichung, die etwa für $\beta = 0.3$ die Wurzel $\mu = 0.9962 \dots$ hat. Verf. erklärt diese Tatsache durch das Versagen des St. Venantschen Prinzips im Falle eines Plattenstreifens. *S. Woinowsky-Krieger.*

Islinskij, A. Ju.: Über die Gleichung der Längsbewegungen eines Seiles (elastischen Fadens) veränderlicher Länge. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 95, 939—941 (1954) [Russisch].*

Verf. untersucht die Längsschwingungen eines schweren elastischen, dehnbaren Seiles, das von einem Rad abrollt und am Ende eine Einzelmasse trägt. Bezeichnet $u(x, t)$ die Längsverschiebung eines im Abstände x von der Einzelmasse befindlichen Seilelementes zur Zeit t und $l(t)$ die Seillänge zwischen Rad und Einzelmasse, so führen die Gleichgewichts-, Grenz- und Anfangsbedingungen des Problems auf eine Integrodifferentialgleichung für u und l . Mit dem Näherungsansatz $u(x, t) = xq(t)$ erhält man hieraus eine gewöhnliche Differentialgleichung für q und l . Eine weitere Beziehung zwischen diesen Zeitfunktionen ist durch die Umfangsgeschwindigkeit des Rades gegeben. Diese Ergebnisse finden im Rahmen der Arbeit keinerlei Anwendung auf Sonderprobleme. *S. Woinowsky-Krieger.*

Chen, Yian-Nian: Torsionsschwingungen unter Berücksichtigung der Masse und der Dämpfung der elastischen Glieder. *Z. angew. Math. Phys.* **5**, 293—316 (1954).

Es werden Torsionsschwingungen in Mehrmassensystemen mit langen elastischen Wellen (Schiffsmaschinenanlagen) unter Berücksichtigung von Masse und Dämpfung in den Wellen untersucht. Die partielle Differentialgleichung wird durch komplexen Ansatz zweier gegenläufiger abklingender Wellenzüge gelöst. Die Bestimmung der komplexen Amplituden wird graphisch durchgeführt, und auch der Wellenverlauf wird zeichnerisch mittels Charakteristiken dargestellt. Es werden verschiedene Anordnungen von Mehrmassensystemen behandelt. Bei fehlender Dämpfung führt das Vorgehen auf ein neues zeichnerisches Verfahren zur Bestimmung von Eigenfrequenzen. *R. Zurmühl.*

Benscoter, S. U.: A theory of torsion bending for multicell beams. *J. appl. Mech.* **21**, 25—34 (1954).

Es wird für das sogen. Torsion-Biege-Problem dünnwandiger Träger mit mehrfach zusammenhängendem Querschnitt eine Näherungslösung beschrieben, welche auf der Annahme beruht, daß die Verteilung der axialen Verschiebungen (Verwölbungen), deren Ableitung in axialer Richtung die (Biege-)Dehnungen liefert, der Verteilung der beim reinen Torsionsproblem auftretenden Verwölbung der Querschnitte analog ist. Hieraus ergibt sich eine Berechnungsmethode mit relativ mäßigem Rechenaufwand und einer — wie Verf. meint — für technische Zwecke ausreichenden Genauigkeit, die an einem Zahlenbeispiel diskutiert wird. *H. Neuber.*

Manukjan, R. A.: Berechnung hoher Balken unter der Wirkung von Punktkräften, die in Punkten der oberen Begrenzungsfläche angreifen. *Akad. Nauk Armjan. SSR, Izvestija, fiz.-mat. estest. techn. Nauki* **7**, Nr. 1, 35—58 (1954) [Russisch].

Für die Spannungsverteilung in hohen, durch transversale Einzelkräfte belasteten Balken entwickelt Verf. Lösungen in trigonometrischen Reihen, in denen die durch die Einzelkraft in ihrem Angriffspunkt verursachte Singularität von den übrigen Einflüssen auf die Umgebung des nämlichen Punktes abgesondert wird. Drei Sonderfunktionen, die somit in den Spannungsausdrücken den trigonometrischen Reihen vorangehen, sind vom Verf. tabuliert. Als Beispiele für die Anwendung dieses Verfahrens werden der freigestützte, sowie der beiderseits eingespannte Balken, die an beliebiger Stelle ihrer oberen Kante eine Einzelkraft tragen, behandelt.

S. Woinowsky-Krieger.

Wu, Ning-Gau and C. W. Nelson: The stresses in a flat curved bar resulting from concentrated tangential boundary loads. *J. appl. Mech.* **21**, 151—159 (1954).

Für den einseitig eingespannten offenen Kreisringstab, dessen Querschnitt ein flaches Rechteck ist, dessen lange Seite in der Ringebene liegt, wird die Spannungsverteilung für eine an einer beliebigen Randstelle tangential angreifende Einzelkraft mit Hilfe der Fourier-Integral-Methode angegeben. Die Lösung ist numerisch ausgewertet; die Ergebnisse sind in übersichtlichen Diagrammen dargestellt.

H. Neuber.

Seide, Paul: Comments on „ripple-type buckling of sandwich columns“. *J. aeronaut. Sci.* **21**, 282—286 (1954).

Verf. beschäftigt sich kritisch mit einer Arbeit von Eringen (dies. Zbl. **48**, 181), insbesondere mit der behaupteten Asymmetrie der Faltung, die s. E. bei Deckschichten von gleicher Dicke, gleichem Material und bei gleichen Randbedingungen nicht möglich ist.

F. Reutter.

Seidenfaden, J.: Über die Tragfähigkeit dünnwandiger gedrückter U-Profile. *Z. Flugwissenschaften* **2**, 169—179 (1954).

Davidson, J. F.: The dynamic lateral instability of beams. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **226**, 111—128 (1954).

Berger, E. R.: Obere und untere Schranken für den Drillwiderstand. *Z. angew. Math. Mech.* **34**, 313—314 (1954).

Pestel, E.: Ein neues Strömungsgleichnis der Torsion. *Z. angew. Math. Mech.* **34**, 322—323 (1954).

Scalan, R. H.: Electrical resistance networks for beam and column problems. *J. aeronaut. Sci.* **21**, 787—789 (1954).

Sonntag, G.: Ersatz der Lochrandbelastung einer elliptisch gelochten Scheibe durch eine Belastung der ungelochten Scheibe. *Z. angew. Math. Mech.* **34**, 330—331 (1954).

Aggarwala, B. D.: Singularly loaded rectilinear plates. I. *Z. angew. Math. Mech.* **34**, 226—237 (1954).

The problem of bending of rectilinear plates loaded by an isolated force can be easily handled with help of conformal mapping. S. Timoshenko (Theory of plates and shells, New York 1940, 294—298) has applied the method of images and solved the problem for an equilateral triangular and an isosceles right angled triangular plate, the load acting at the centre in the first case and at an arbitrary point in the second one. However, the method becomes rather cumbersome by passing on to more complicated boundaries. In the present paper author has developed a method making use of conformal mapping by means of which he is able to tackle certain types of singular loadings even when the boundary is fairly complicated and apply it to some particular problems. In the case of a concentrated load at any point A of the plate, the expression Δw (w = deflection, $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$) is identified with the stream function of a vortex at A in a cylinder of the same cross-section as the boundary of the plate. This leads to an expression for Δw , the integration of which gives w . The expression for Δw is very useful because it yields closed expressions for the shearing forces Q_x and Q_y in terms of Weierstrass elliptic functions. These forces may therefore be calculated to any desired degree of accuracy. The method is applied to calculate the shearing forces in terms of elliptic functions for the following boundaries: 1. Rectangle. 2. Equilateral triangle. 3. Isosceles triangle containing an angle of $2\pi/3$. 4. Right angled isosceles triangle. 5. Right angle triangle containing an angle of $\pi/6$. The special case of a circle is also treated. There are some smaller misprints in the paper (w_0 instead of ω_0 , q instead of P on p. 235).

R. Gran Olsson.

Woinowsky-Krieger, S.: On bending of a flat slab supported by square-shaped columns and clamped. *J. appl. Mech.* **21**, 263—270 (1954).

The application of complex variable theory leads to a solution sufficiently accurate for the purpose of design of the slab and appearing in a closed form, convenient for the numerical computation of the stresses. The bending moments throughout the panels of the slab prove to be smaller than those obtained by the usual theory. As for the moments at the support, a considerable stress concentration, although of a localized character, must be taken into account at the corners of the supporting capitals. The foregoing method appears also applicable to flat slabs with rectangular panels or rectangular shaped columns, as well as in the event of an alternating distribution of the load. All results previously obtained hold as well for a „reversed flat slab“ i. e. for a mat foundation carrying a system of equidistant columns in rigid connection with the slab, provided the soil pressure is distributed uniformly.

R. Gran Olsson.

Solomon, L.: Die eindimensionale Aufgabe für eine helikoidale Schale. *Priklad. Mat. Mech.* **18**, 43—54 (1954) [Russisch].

Es erweist sich zunächst als zweckmäßig, die helikoidale Schale auf das System (x, y) der Erzeugenden und der Schraubenlinien gemäß $\bar{x} = \xi \sin x \cos y$, $\bar{y} = \xi \sin x \sin y$, $\bar{z} = y$ zu beziehen. Verf. befaßt sich mit einer unendlich erstreckten Schale, deren Belastung längs der Schraubenlinie konstant bleibt. Das Problem der

Schalenbiegung wird somit auf die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen in x allein reduziert. Grenzfälle eines kleinen und eines sehr großen x ermöglichen einfachere Näherungslösungen, während der allgemeine Fall auf hypergeometrische Differentialgleichungen führt. Verf. kommt u. a. zum Schluß, daß gewisse von J. N. Rabotnov und V. S. Vlasov in die Theorie der Schalenbiegung eingeführten Vereinfachungen nicht unbedingt für die Schalen negativer Krümmung gelten.

S. Woinowsky-Krieger.

Feodosjev, V. I.: Über die Stabilität einer sphärischen Schale unter Einwirkung eines äußeren, gleichmäßig verteilten Druckes. Priklad. Mat. Mech. 18, 35—42 (1954) [Russisch].

Es ist bekannt, daß sich die Zoellysche Formel für den Beuldruck der Kugelschale auf der Annahme unendlich kleiner Abweichungen von der ursprünglichen Schalenform gründet und daß die Einführung endlicher Ausweichungen der Schale zu wesentlich kleineren Beuldrücken führt. Verf. setzt nun die Bildung einer örtlichen Ausbeulung mit nichtlinearem Deformationsgesetz voraus und bringt die Randbedingungen der Beule mit den Randstörungen des restlichen, sich linear verhaltenden Gebietes der Schale zur Deckung. Die Integration der Differentialgleichungen für die Ausbeulung wird durch den Galerkinschen Vorgang ersetzt. Unter gewissen vereinfachenden Annahmen, die ein Verhältnis $Rh > 100$ (R = Schalenradius, h = Dicke) bedingen, kommt Verf. zu einem unteren Wert der kritischen Druckspannung von $\sigma_k = -0.13 EhR$. Dieses Resultat scheint zu beweisen, daß die durch örtliche Ausbeulung gekennzeichnete Gleichgewichtsform der Schale selbst bei un- und unterbelasteter Kugelschale möglich ist, wodurch rein theoretische Formeln als Basis für die praktische Schalenbemessung illusorisch werden müßten. Auf Grund der vorliegenden Versuchsergebnisse, die im Durchschnitt etwa $\sigma_k = 0.16 EhR$ ergeben, empfiehlt Verf., bei praktischen Ausführungen nicht über $\sigma_k \sim 0.1 EhR$ hinauszugehen.

S. Woinowsky-Krieger.

Alumjaé, N. A.: Die kritische Belastung einer kreiszylindrischen Schale bei Torsion. Priklad. Mat. Mech. 18, 27—34 (1954) [Russisch].

Verf. untersucht die Stabilität langer und mittellanger tordierter Kreiszylinderschalen im Zusammenhang mit verschiedenen Randbedingungen an den Enden $x = 0, l$ des Zylinders. Es zeigt sich, daß man bei veränderter Durchbiegung ($w = 0$) nur zwischen dem Fall der ebenfalls verhinderten Wölbung der Ränder ($u = 0$) einerseits und allen sonst noch möglichen Annahmen (wie $v = 0$, w und $x = 0$ usw.) andererseits zu unterscheiden hat. Die Annahme $u = 0$ ergibt eine durchweg etwas (nicht über etwa 20%) höher gelegene Gütandenkurve für die kritische Torsionsspannung als die anderen Annahmen. Diese Ergebnisse stimmen formell mit denen von L. H. Donnell überein, doch gibt ihnen Verf. eine andere mechanische Deutung.

S. Woinowsky-Krieger.

Gol'denvejzer, A. L.: Zur Frage der Berechnung von Schalen unter der Wirkung von Punktkräften. Priklad. Mat. Mech. 18, 181—186 (1954) [Russisch].

Schalen, die Punktlasten ausgesetzt sind, lassen sich in zweierlei Weise behandeln. Eine ausreichende „Glätter“ der Schalenfläche vorausgesetzt, kann man die Last auf ein endliches, den vorgegebenen Punkt enthaltendes Gebiet verteilen und das Gebiet dann um den Lastpunkt zusammenziehen. Analytisch drückt sich dann die so gewählte Belastung in Fourierschen Doppelreihen aus, und entsprechend integrieren sich die Differentialgleichungen der Schalentheorie. Oder aber man wählt diese Integrale so, daß sie von vornherein die durch die vorgegebene Punktkraft bedingte Singularität explizite enthalten. In einer kleinen Entfernung ϱ von einer normalen Punktkraft verhält sich beispielsweise die Durchbiegung der Schale wie $\varrho^2 \ln \varrho$; die gleiche Singularität besitzt die Spannungsfunktion der Schale in der Umgebung einer tangentialen Punktkraft. Verf. befaßt sich insbesondere mit nicht sehr langen Kreiszylinderschalen. Nach Einführung einer komplexen Funktion, die die Durchbiegung und die Spannungsfunktion einschließt, entwickelt Verf. eine quellenmäßig dargestellte Näherungslösung, die die der normalen Punktlast entsprechende Singularität auch wirklich enthält.

S. Woinowsky-Krieger.

Hudson, G. E.: The deformation of a thin material shell of non-uniform thickness by a detonation wave. Commun. pure appl. Math. 7, 207—222 (1954).

Es wird die Verformung einer fast ebenen Schale veränderlicher Wandstärke infolge einer seitlich vorbeigehenden Detonationswelle untersucht, wobei der Winkel der Detonationsfront berücksichtigt wird. *H. Neuber.*

Acharya, Y. V. G. and L. S. Srinath: Determination of principal stresses in an isotropic material under conditions of plane strain. *Appl. sci. Research, A* 5, 45–54 (1954).

Morgan, Antony J. A.: Stress distributions in semi-infinite solids of revolution. *Z. angew. Math. Phys.* 5, 330–341 (1954).

Die in Zylinderkoordinaten geschriebene Bipotentialgleichung für die Spannungsfunktion des rotationsymmetrischen Spannungszustandes bleibt invariant unter einer bestimmten gemeinsamen Transformation der abhängigen und der unabhängigen Variablen. Hieraus folgt, daß durch geeignete Substitutionen die partielle in eine gewöhnliche Differentialgleichung 4. Ordnung übergeführt werden kann. Durch Aufspaltung entsteht die Legendresche Differentialgleichung. Die Transformation der Randbedingungen zeigt, daß die Belastungsfunktionen gewissen Bedingungen genügen müssen. Es werden drei grundsätzlich voneinander verschiedene Fälle des halbinendlichen Kegels behandelt (Platte mit linear veränderlicher Dicke, Hohlkegel mit linear veränderlicher Wandstärke, und Vollkegel). *W. Günther.*

Green, A. E.: A note on second-order effects in the torsion of incompressible cylinders. *Proc. Cambridge philos. Soc.* 50, 488–490 (1954).

Vereinfachung einer von R. S. Rivlin (dies. Zbl. 50, 186) angegebenen Methode zur Auflösung der Gleichungen der Elastizitätstheorie 2. Ordnung für die Torsion von Zylindern aus inkompressiblem Material, die unmittelbar aus den vom Verf. gemeinsam mit R. T. Shield (dies. Zbl. 43, 392) gefundenen Ergebnissen folgt. *Th. Pöschl.*

Green, A. E. and E. W. Wilkes: Finite plane strain for orthotropic bodies. *J. rat. Mech. Analysis* 3, 713–723 (1954).

Eriksen und Rivlin (Rivlin, dies. Zbl. 33, 415; Eriksen und Rivlin, dies. Zbl. 55, 181) hatten die Biegung eines Kuboides für inkompressible isotrope Körper und für transversale Isotropie in der Biegungsebene angegeben. Verff. untersuchen das Biegungsproblem für ein kompressibles orthotropes Kuboid sowie Dehnung und Torsion eines kompressiblen Hohlzylinders, der zur Achse transversal isotrop ist. *J. Pretsch.*

Payne, L. E.: On axially symmetric crack and punch problems for a medium with transverse isotropy. *Proc. Cambridge philos. Soc.* 50, 466–473 (1954).

Das Medium erfüllt den Halbraum $z > 0$ und besitzt Transversalisotropie (eine Achse elastischer Symmetrie, hier in der z -Richtung angenommen). Das achsialsymmetrische Reißproblem (Verrückungen in einem beschränkten Bereich der Oberfläche $z = 0$ vorgeschrieben) und Schlagproblem (Drücke in einem beschränkten Bereich der Oberfläche $z = 0$ vorgeschrieben) wird hier auf direktem Wege gelöst. Im Gegensatz zur Methode von A. E. Green erlaubt das Verfahren des Verf. das sofortige Hinschreiben der Lösung in passenden krummlinigen Koordinaten. Nach Aufstellen der Fundamentalgleichungen, denen die vier Funktionen Φ_r, Ψ_r ($r = 1, 2$), von denen das Problem abhängt, genügen müssen, führt Verf. krummlinige Koordinaten und den Mehlerschen Entwicklungssatz ein. In den letzten Abschnitten werden die einzelnen Probleme in voller Allgemeinheit gelöst. *E. Hardtwig.*

Eubanks, R. A.: Stress concentration due to a hemispherical pit at a free surface. *J. appl. Mech.* 21, 57–62 (1954).

Mit Hilfe des Boussinesq-schen Ansatzes für die Spannungsfunktion des achs-symmetrischen Spannungszustandes wird eine Lösung in Reihenform für den elastischen Halbraum mit einer halbkugelförmigen Höhlung angegeben, die sich auf der freien ebenen Begrenzungsfläche befindet. In großer Entfernung von der Störungsstelle wird gleich großer Zug in den beiden zueinander senkrechten Richtungen parallel zur Randebene angenommen. *H. Neuber.*

Chandra Das, Sisir: Stress concentrations around a small spherical or spheroidal inclusion on the axis of a circular cylinder in torsion. *J. appl. Mech.* 21, 83–87 (1954).

Innerhalb eines tordierten Kreiszylinders befindet sich auf der Achse eine mit elastischem Werkstoff anderer Art ausgefüllte Höhlung. Es wird die Spannungsverteilung für die beiden Fälle angegeben, daß die Höhlung die Form einer Kugel oder eines Ellipsoids hat.

H. Neuber.

Freudenthal, Alfred M.: On inelastic thermal stresses in flight structures. J. aeronaut. Sci. **21**, 772—778 (1954).

The conventional design for thermal stresses is based on an elastic analysis of the stresses and their comparison with a limiting creep rate or creep strain and a time dependent fracture stress, which both are characteristic manifestations of inelastic behaviour. This contradiction between the premises of the stress analysis and of the strength analysis necessarily leads to design procedures of considerable unreality. The effect, on the level of thermal stresses, of inelastic behaviour of the structural material with constant and with temperature dependent parameters has been investigated. The results are compared with those of the elastic analysis. — The importance of design for inelastic thermal stresses is discussed: When loads and temperature differences act jointly on an elastic-plastic plate the moments due to loads and to temperature differences are not independent. Even in the simplest case of a constant load moment M_p and a constant temperature difference T producing a constant temperature moment M_t acting in the direction of the load moment, the dependence of M_t on M_p cannot be easily evaluated. It is shown that if, in the simple case, $M_p > 2/3 M_{pl}$ (M_{pl} = the „flow-moment“ = $\sigma_0 d^2/4$, where d = thickness of the plate, $\sigma_0 = \alpha E T_0/2 (1-\nu)$, α = coefficient of linear thermal expansion, E = modulus of elasticity, T = variable temperature difference, ν = Poisson's ratio) the temperature moment for the same difference T will decrease for increasing load moment if the load moment is applied first. For less simple cases, particularly those of variable load moments with different signs over different portions of the plate a highly interaction must be expected in the elastic-plastic as well as in the non-linear visco-elastic plate. Only in the elastic and linear visco-elastic plate with temperature independent parameters is simple superposition of load and temperature effects permissible.

R. Gran Olsson.

Bordoni, Piero Giorgio: Sopra le trasformazioni termoelastiche finite di certi solidi omogenei. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. **12**, 237—266 (1954).

Verf. zeigt, wie sich eine physikalisch einwandfreie Beziehung zwischen den Spannungen und den endlichen thermoelastischen Deformationen eines homogenen und isotropen Mediums im Anschluß an die klassischen Formulierungen der lineariisierten Elastizitätstheorie herleiten läßt, welche weder mit den einschränkenden Bedingungen der allgemeinen Theoreme noch mit den experimentellen Resultaten im Widerspruch steht.

H. Neuber.

Buckens, M. F.: Théorie limite du flambage d'une plaque circulaire chauffée en son centre. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, I. Sér. **68**, 63—71 (1954).

Es wird das Stabilitätsproblem der Kreisplatte gleicher Dicke unter einer symmetrischen, über die Dicke gleichmäßig verteilten Temperaturerhöhung behandelt. Für eine spezielle Temperaturverteilung ergeben sich Zylinderfunktionen.

H. Neuber.

Abramjan, B. L.: Über die Temperaturspannungen in einem rechteckigen Betonblock. Akad. Nauk Armjan. SSR, Izvestija fiz.-mat. estest. techn. Nauki **7**, Nr. 3, 1—18 (1954) [Russisch].

• **Green, A. E. and W. Zerna:** Theoretical elasticity. Oxford: At the Clarendon Press 1954. XIII, 442 p. 50 s.

Der erste Teil des Buches liefert nach verhältnismäßig ausführlichen mathematischen Vorbereitungen eine Formulierung des elastischen Formänderungsvorganges bei endlichen Verzerrungsgrößen. Anschließend folgt eine Spezialisierung für inkompressible isotrope Medien mit Verwendung einer Formänderungsenergie-Funktion. In den weiteren Abschnitten werden kleine Deformationen behandelt, wobei zweidimensionale Probleme, insbesondere Scheiben, Platten und Schalen im Vordergrund stehen. Hierbei werden vielfach, sowohl bei Isotropie als auch bei Anisotropie, komplexe Variable herangezogen. Etwas ausführlicher sind die Darlegungen über Schalen, insbesondere Rotationschalen, sowie speziell Zylinderschalen. Der weitgehende Gebrauch der tensoriellen Schreibweise wirkt sich vorteilhaft aus.

H. Neuber.

Torre, C.: Kritik und Ergänzung der Maxwellschen Ansatzes für elastisch-zähe Stoffe. Verdrehung von Stäben als Beispiel. Österreich. Ingenieur-Arch **8**, 55—76 (1954).

Für elastisch-zähe Stoffe wird der Ansatz von Maxwell mit der auf Fromm zurückgehenden Annahme diskutiert, daß der Spannungstensor außer vom Ort und der Zeit auch von der Drehung abhängt, wodurch sich für einen auf Torsion beanspruchten Stab eine Verlängerung der Stabachse ergibt, was experimentellen Ergebnissen gegenübergestellt wird.

H. Neuber.

Handelman, G. H. and W. H. Warner: Loading paths and the incremental strain law. *J. Math. Physics* **33**, 157—164 (1954).

Es werden einige Eigenschaften des Spannungs-Dehnungs-Gesetzes für Werkstoffe mit Arbeitsverfestigung betrachtet, die von W. Prager (dies. Zbl. **34**, 266) und D. C. Drucker (dies. Zbl. **35**, 412) herrühren und die dadurch gekennzeichnet sind, daß die Differentiale der Komponenten des Spannungstensors als Funktionen der Spannungen, der Dehnungen und der Differentiale der Spannungen ausdrückbar sind. Derartige Gesetze sind als solche für „Differentialdehnungen“ (incremental strains) bekannt. Ansätze dieser Art sind nur unter bestimmten Bedingungen integrierbar. Für die Ausführungen wird der invariante Differentialkalkül verwendet. Nutzenanwendungen der erhaltenen Ergebnisse werden nicht gegeben.

Th. Pöschl.

Kostjuk, A. G.: Die Spannungen in einem rotierenden Vollzylinder jenseits der Elastizitätsgrenze. *Priklad. Mat. Mech.* **18**, 453—456 (1954) [Russisch].

Davin, Marcel: Sur un modèle mécanique d'éprouvette composée d'éléments idéalement plastiques, à limite de résistance aléatoire. *C. r. Acad. Sci., Paris* **239**, 947—949 (1954).

Wahl, A. M., G. O. Sankey, M. J. Manioine and E. Shoemaker: Creep tests of rotating disks at elevated temperature and comparison with theory. *J. appl. Mech.* **21**, 225—235 (1954).

Colonnetti, G.: Essai de généralisation de la théorie classique de l'équilibre élastique. *J. Math. pur. appl., IX. Sér.* **33**, 187—199 (1954).

Die Wechselbeziehung von elastischer und plastischer Deformation nach dem Einwirken äußerer Kräfte von längerer Dauer wird als „Gleichgewichtszustand der Koaktion“ behandelt. Aus dem Variationsproblem für die potentielle elastische Energie lassen sich als Sonderfälle die Sätze von Betti und von Volterra ableiten.

J. Pretsch.

Ford, Hugh: The theory of plasticity in relation to its engineering applications. *Z. angew. Math. Phys.* **5**, 1—35 (1954).

Das Studium der plastischen Deformation hat auf zwei grundsätzlich voneinander verschiedene Näherungsbetrachtungen geführt: Die mikroskopische, bekannt unter der Bezeichnung „Metallphysik“, und die makroskopische, welche die kristalline Struktur außer acht läßt und die Aufstellung der mathematischen Plastizitätstheorie ermöglichte. Verf. diskutiert zunächst die verschiedenartigen Voraussetzungen der einzelnen Zweige der Plastizitätstheorie, Begriffe des Spannungstensors, der Fließbedingung, der Verfestigung und der gemischt elastisch-plastischen Spannungszustände, sowie der Verschiebungen und Verschiebungsgeschwindigkeiten, und geht anschließend zur knappen Behandlung bekannter Einzelprobleme über, wie: Plastische Biegung mit Überlagerung von Zug, Gleitlinien in krummlinigen Koordinaten (mit Anwendung auf die Schneidvorgänge), Pressen eines Bleches zwischen zwei als starr angenommenen Druckstempeln, Walzen von Metallen (insbesondere nach Kármán); schließlich folgt ein Vergleich mit einigen experimentellen Ergebnissen, sowie eine kurze Diskussion über den Einfluß der Oberflächenreibung.

H. Neuber.

Prager, W.: Three-dimensional plastic flow under uniform stress. *Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A* **19**, 23—27 (1954).

Der Ansatz $\hat{\varepsilon} = \lambda \mathfrak{P}'$, wo der Spannungsdeviator \mathfrak{P}' und der Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeiten $\hat{\varepsilon}$ Hauptachsenform haben und $\lambda(x, y, z)$ eine unbekannte Ortsfunktion ist, gibt für konstantes \mathfrak{P}' nach Elimination der Elemente des Geschwindigkeitsvektors im infinitesimalen Falle 6 partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung für λ mit konstanten Koeffizienten. Im Falle, daß kein Element von \mathfrak{P}' verschwindet, ergibt sich für λ eine lineare Funktion von x, y, z ; ist mindestens ein Element von \mathfrak{P}' Null, so ist λ von der Form $f(x-y) + g(x-y) + cz$, wo f, g

willkürliche Funktionen sind und c eine Konstante ist. In beiden Fällen lassen sich rückwärts die Komponenten der Verschiebungsgeschwindigkeit bestimmen.

R. Moufang.

Thomas, T. Y.: Grid rotation in Lüders bands. Proc. nat. Acad. Sci. USA **40**, 565—572 (1954).

In Weiterführung vorhergehender Arbeiten untersucht der Verf. die Ausbildung und die Abmessungen der Lüdersschen Banden, insbesondere die plastische Kontraktion, die Drehung und die Gleitung der Banden bei der Zugbeanspruchung von flachen Probestäben. Ferner werden die Fließlinien bestimmt, die sich zu beiden Seiten der Banden und durch diese hindurch einstellen.

Th. Pöschl.

Thomas, T. Y.: A discussion of the load drop and related matters associated with the formation of a Lüders band. Proc. nat. Acad. Sci. USA **40**, 572—576 (1954).

In dieser Note wird vor allem der Abfall der Belastung (drop in the load) im Augenblick des Auftretens einer Lüders-Bande betrachtet und eine Formel aufgestellt, die diesen Abfall mit der Breite der sich ausbildenden Bande verbindet. Für diese Formel wird auch ein Näherungsausdruck angegeben.

Th. Pöschl.

Thomas, T. Y.: Interdependence of the yield condition and the stress-strain relations for plastic flow. Proc. nat. Acad. Sci. USA **40**, 593—597 (1954).

Für die Bestimmungsgrößen, die die Lüdersschen Banden bei der Belastung eines flachen Probestabes kennzeichnen, werden allgemeine Ansätze unter Verwendung des invarianten Tensorkalküls entwickelt und eine anscheinend neue Form der Fließbedingung angegeben. In einem Sonderfall stimmt diese Bedingung mit der vor vielen Jahren von Tresca aufgestellten Form der Fließbedingung überein. Hinweise auf ausgeführte Versuche werden nicht gegeben.

Th. Pöschl.

Shield, R. T.: Stress and velocity fields in soil mechanics. J. Math. Physics **33**, 144—156 (1954).

Es werden Lösungen zweidimensionaler Erddruck-Probleme betrachtet unter der Annahme, daß die Erde ein vollkommen plastisches Material ist, in welchem Gleiten oder Fließen vorkommt, wenn die Spannungen der Coulombschen Funktion f genügen, in der auch die Kohäsion der Erde, aber nicht deren Eigengewicht berücksichtigt wird. Für die Erdmasse werden die Komponenten des Verzerrungstensors proportional den Ableitungen von f nach den Komponenten des Spannungstensors gesetzt. Als Sonderprobleme werden der längs einer Seitenfläche belastete Keil und das belastete Trapezoid betrachtet, und die Fließlinien gemäß den allgemeinen Ansätzen bestimmt.

Th. Pöschl.

Seiler, J. A. and P. S. Symonds: Plastic deformation in beams under distributed dynamic loads. J. appl. Phys. **25**, 556—563 (1954).

Das Problem des durch quergerichtete, symmetrisch wirkende dynamische Kräfte beanspruchten Stabes wird im Rahmen der Idealisierung „plastisch-starr“, d. h. mit vorwiegender Berücksichtigung der plastischen und Vernachlässigung der elastischen Deformationen rechnerisch behandelt. Die Endverformungen weisen bei verteilter Belastung gegenüber der Einzelkraft zwar nur wenig qualitative, jedoch erhebliche quantitative Unterschiede auf.

H. Neuber.

Onat, E. T. and W. Prager: The necking of a tension specimen in plane plastic flow. J. appl. Phys. **25**, 491—493 (1954).

Zur Deutung des plastischen symmetrisch eintretenden Zerreiß- bzw. Abgleitvorganges eines schmalen Zugstabes wird eine linearisierte Modifikation der Plastizitätsgleichungen verwendet, wodurch für die Ausbreitung des Fließgebietes einfache Gesetzmäßigkeiten gewonnen werden.

H. Neuber.

Hopkins, H. Geoffrey and William Prager: On the dynamics of plastic circular plates. Z. angew. Math. Phys. **5**, 317—330 (1954).

In Weiterführung einer früheren Arbeit [J. Mech. Phys. Solids, II. Ser. **1** (1953)] berechnen Verff. die Durchbiegung und die Momente einer dünnen, am Rand gestützten Kreisplatte vom

Radius R unter stoßartiger Beanspruchung durch eine konstante, gleichförmige Normalbelastung p , die zur Zeit $t = 0$ aufgebracht und zur Zeit $t = \tau$ weggenommen wird. Dabei ist die in der Theorie der dünnen Platten übliche Vernachlässigung der Querkraft gegen die Biege- und Schubspannungen parallel zur Plattenoberfläche in der Fließbedingung vorgenommen, jedoch nicht in der Bedingung des dynamischen Gleichgewichts. Als Fließbedingung wird in der M, N -Ebene (M ist radiales, N tangenciales Biegemoment) das Sechseck von Tresca zugrunde gelegt. Die Bestimmung der Durchbiegung $w(r, t)$ und der Momente aus den Rand- und Anfangsbedingungen, aus gewissen Sprungbedingungen, aus der Gleichgewichts- und der Fließbedingung erfordert die Fallunterscheidungen $p_0 \cdot p < 2p_0$ und $p > 2p_0$, wo $p_0 = 6M_0/R^2$ und M_0 der Maximalwert von N auf der Fließkurve ist. Im 1. Fall ist der Vorgang durch die Phasen $0 < t < \tau$ und $\tau < t < T$ charakterisiert, wo $T = p\tau/p_0$ die Zeit ist, zu der die Platte zur Ruhe kommt. Für die bleibende Durchbiegung ergibt sich $w(r, T) = [p(p - p_0)/p_0] \tau^2 (1 - r/R)$. Im 2. Fall besteht die Platte zunächst aus zwei konzentrischen Gebieten $0 \leq r < \varrho(t)$ und $\varrho(t) \leq r \leq R$, die verschiedenen Zuständen auf der Fließkurve entsprechen und die Betrachtung der drei zeitlichen Phasen $0 < t < \tau$, $\tau < t < T_1 = p\tau/2p_0$, $T_1 < t < 2T_1$ erforderlich machen; in der 1. Phase ist $\varrho(t) = \varrho_0 = \text{konst.}$ und bestimmt durch p/p_0 ; in der 2. Phase nimmt $\varrho(t)$ von ϱ_0 bis 0 ab. Zur Zeit $2T_1$ ist die Platte zur Ruhe gekommen, und die bleibende Durchbiegung ist

$$w(r, 2T_1) = (p\tau^2/2\mu) [(p/2p_0)(3 - r/R - r^2/R^2 - r^3/R^3) - 1]$$

für $0 \leq r \leq \varrho_0$; für $\varrho_0 \leq r \leq R$ ist $w(r, 2T_1)$ linear, aber in $r = \varrho_0$ ist $\partial w/\partial r$ unstetig.

R. Moufang.

Weiss, H. J. and W. Prager: The bursting speed of a rotating plastic disc. J. aeronaut. Sci. 21, 196—200 (1954).

Für die rotierende Kreisscheibe mit anfänglich konstanter Dicke wird unter der Annahme voller Plastizierung mit Verfestigung die kritische Drehzahl errechnet, bei welcher Zerstörung infolge Instabilität eintritt (elastische Deformationen können gegenüber den plastischen als vernachlässigbar klein angesehen werden). Die kritische Drehzahl erscheint als bestimmtes Integral, dessen Berechnung die Kenntnis der Verfestigungsfunktion voraussetzt. Für gewisse Verfestigungsfunktionen ist die analytische Lösung möglich.

H. Neuber.

Frankland, J. M. and R. E. Roach: Strength under combined tension and bending in the plastic range. J. aeronaut. Sci. 21, 449—453, 474 (1954).

Odqvist, F. K. G.: Influence of primary creep on column buckling. J. appl. Mech. 21, 295 (1954).

Manukjan, M. M.: Über die Schrumpfungsspannung in symmetrisch armierten Eisenbetonelementen mit Berücksichtigung des nicht-linearen Kriechens des Betons. Akad. Nauk Armjan. SSR. Izvestija fiz.-mat. estest. techn. Nauki 7, Nr. 3, 19—32 (1954) [Russisch].

Truesdell, C.: The present status of the controversy regarding the bulk viscosity of fluids. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 226, 59—65 (1954)

Savin, G. N.: Über die dynamischen Kräfte im Aufzugsseil eines Schachtes (Aufheben der Last). Doklady Akad. Nauk. SSSR, n. Ser. 97, 991—994 (1954) [Russisch].

Savin, G. N. und V. N. Sevelo: Über die Schwingung einer Last, die an einem zäh-elastischen Faden veränderlicher Länge hängt. Ukrain. mat. žurn. 6, 457—462 (1954) [Russisch].

Schultze, Ernst: On the excitation of pure natural modes. J. aeronaut. Sci. 21, 566—567 (1954).

Zur experimentellen Bestimmung der Eigenschwingungen von elastischen, annähernd ebenen Bauteilen (vornehmlich Flugzeugflügeln) benutzen Lewis und Wrisley [J. aeronaut. Sci. 17, 705—722, 735 (1950)] ein System von Schwingungserregern und geben an, daß die erregenden Kräfte alle in Phase sein und ihre Amplituden proportional zum Produkt aus Massendichte und Schwingungsweite sein müssen. Zur Begründung gehen sie von einem Flügel mit innerer Dämpfung aus. Verf. beweist den geschilderten Sachverhalt besonders elegant, indem er nachweist, daß das Problem durch eine lineare Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art mit symmetrisierbarem Kern beschrieben wird. Aus den allgemeinen Sätzen über die

zugehörigen Eigenwerte, Eigenfunktionen und die Lösung der inhomogenen Integralgleichung gewinnt er sofort die Behauptung, und zwar unabhängig von jeder inneren Dämpfung. *K. Nickel.*

Nazarov, A. G.: Die Gleichungen der Theorie der Widerstandsfähigkeit gegen Erdbeben bei Berücksichtigung der Dispersion der Energie. Akad. Nauk. Armjan. SSR, Doklady 18, 69—74 (1954) [Russisch].

Denisjuk, I. N.: Über die Polynome bei der Aufgabe des Dehnungsstoßes. Ukrain. mat. Žurn. 6, 423—429 (1954) [Russisch].

Raher, W.: Das d'Alembertsche Prinzip in Motorsymbolik und seine Anwendung auf Stoßprobleme. Z. angew. Math. Mech. 34, 323—324 (1954).

Thomson, W. T.: Impulsive response of beams in the elastic and plastic regions. J. appl. Mech. 21, 271—278 (1954).

Hydrodynamik:

● **Kotschin, N. J., I. A. Kibel und N. W. Rose:** Theoretische Hydromechanik. Band I. Berlin: Akademie-Verlag 1954. IX, 507 S. 179 Abb. im Text.

Vergleiche die Besprechung des Originals in dies. Zbl. 41, 539.

● **Truesdell, C.:** The kinematics of vorticity. (Indiana University Publ. Sci. Ser. 19). Bloomington: Indiana University Press 1954. 232 p. \$ 6,—.

Der Verf. stellt sich in diesem Werk das Ziel, die hydrodynamischen Wirbelsätze unter möglichst weitgehender Betonung ihres kinematischen Inhalts abzuleiten. Die physikalischen Gesetzmäßigkeiten werden, wenn überhaupt, so erst ganz zum Schluß der Ableitung herangezogen. Damit ergibt sich eine lehrreiche Trennung des kinematischen Bildes von den physikalischen Aussagen. Infolge dieser Zielsetzung werden die Wirbelsätze der Gasdynamik nur gestreift, sie wurden in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 46, 190) behandelt. Auch der Einfluß innerer Reibung wird nicht behandelt. Das Buch beginnt mit einer Vorbereitung der mathematischen Grundlagen und einer Einführung in die Vektorsymbolik, letztere ist wohl immer etwas geschmacklos und gewohnheitsbedingt. Dennoch erscheint sie dem Ref. mit Rücksicht auf den breiten internationalen Leserkreis im Vergleich zu den übrigen Teilen des Buches ein wenig kurz gefaßt. Das zweite Kapitel ist einer kinematischen Vorbereitung gewidmet. Hier werden Teilchenkoordinaten eingeführt, welche für die Herleitungen im ganzen Buch dienen. Nach Einführung des Wirbelbegriffes werden dann in knappen Unterteilungen die zahlreichen Wirbelsätze äußerst klar und systematisch abgeleitet. Folgende Einteilung ist dabei getroffen: Wirbelfeld, Wirbelmaß, Mittelwerte, Bernoulli-Theorem, Konvektion und Diffusion von Wirbeln, Erhaltung der Zirkulation. Der Verf. hat zahlreiche eigene Arbeiten in das Werk verwoben. Rund 300 in historischer Reihenfolge zitierte Arbeiten sowie ein Namens- und ein Sachregister geben dem Leser den Zugang zu diesem außerordentlich alten und breiten Teil der Hydrodynamik. Das auch in der äußeren Form sehr übersichtliche Werk füllt eine große Lücke der hydrodynamischen Literatur. Es ist ein unerläßliches Hilfsmittel für den Forscher auf einschlägigem Gebiete. Auch dem Hochschullehrer wird es für historische Hinweise und zur Vereinfachung seiner Beweisführungen sehr willkommene Dienste leisten. *K. Oswatitsch.*

Garabedian, P. R., Edward McLeod jr., and Martin Vitousek: Recent advances at Stanford in the application of conformal mapping to hydrodynamics. Amer. math. Monthly 61, Nr. 7, Teil 2, 8—10 (1954).

Žukov, A. I.: Über eine Familie von exakten Lösungen der Gleichungen der Hydrodynamik. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 97, 985—986 (1954) [Russisch].

Maruhn, K.: Eine hydrodynamische Existenzbetrachtung. Z. angew. Math. Mech. 34, 338—339 (1954).

Görtler, H.: Neuere Anwendungen der Charakteristikentheorie in der Hydrodynamik. Acad. Roy. Belgique, Cl. Sci., Mém. Coll. 8^e 28, Nr. 6, 9—16 (1954).

Michael, D. H.: The stability of an incompressible electrically conducting fluid rotating about an axis when current flows parallel to the axis. Mathematika, London 1, 45—50 (1954).

Die Stabilität einer rotierenden, reibungsfreien Flüssigkeit gegenüber axial-symmetrischen Störungen ist von Rayleigh diskutiert worden. Hier wird dieses Kriterium erweitert unter Berücksichtigung der Wirkung eines Magnetfeldes, das

durch einen achsenparallelen Strom in der als leitend angenommenen Flüssigkeit entsteht. Bei konstanter Stromdichte gibt das Magnetfeld nur Anlaß zu einer Modifikation des hydrostatischen Druckes, die Stabilität wird nicht verändert. Das allgemeine Kriterium für beliebige axial-symmetrische Magnetfelder wird gefunden durch Lösung der Strömungsgleichungen unter Annahme kleiner Störungen. Eine hydrodynamisch instabile Strömung kann durch einen elektrischen Strom genügender Stärke stabilisiert werden.

G. Burkhardt.

Höiland, Einar: Ein mathematisches Problem der hydrodynamischen Störungstheorie. 12. Skand. Mat.-Kongr., Lund 1953, 101–104 (1954) [Norwegisch].

Verf. betrachtet eine lineare Strömung einer reibungslosen Flüssigkeit zwischen zwei parallelen Platten („Scherströmung“). Die Geschwindigkeit U der Hauptströmung ist durch zweckmäßige Wahl der Zeiteinheit durch $U = z$ gegeben. Die Dichte der Flüssigkeit möge dem Gesetz $q = q_0 \exp(-\beta z)$ gehorchen, wo q_0 und β Konstanten sind; $\beta = 0$ entspricht Schwerestabilität, $\beta > 0$ Schwerkinstabilität. Durch geeignete Wahl des Koordinatensystems und der Längeneinheit genügen $z = \pm 1$ den Gleichungen der beiden Begrenzungsflächen. Für die Störungsbeziehung ergibt sich die Gleichung der Stromfunktion ψ , indem Bewegungen, die harmonisch von z mit der Wellenzahl h abhängen, betrachtet werden ($i = \sqrt{-1}$): $\mathcal{L}(\psi) = (ikz + i\partial/\partial t)(\partial^2\psi/\partial z^2 - k^2\psi) - r k^2\psi = 0$, wo $r = \beta g$ die Richardson'sche Zahl bezeichnet. Die Randbedingungen sind $\psi(1, t) = \psi(-1, t) = 0$, während die Anfangsbedingungen ($t = 0$) sich schreiben lassen: $(\partial^2\psi/\partial z^2 - k^2\psi)|_{t=0} = F(z)$, $\{(1/ik)(ikz + i\partial/\partial t)(\partial^2\psi/\partial z^2 - k^2\psi)\}|_{t=0} = G(z)$, wo $F(z)$ und $G(z)$ bekannte Funktionen sind. Es sind einige kleinere Druckfehler vorhanden.

R. Gran Olsson.

Rahnberg, Gösta: On the rectilinear vortex filament in a cylinder. Appl. sci. Research, A 5, 12–30 (1954).

Der Verf. untersucht die ebene Bewegung der Flüssigkeit in einem Zylinder, welche durch einen geradlinigen Wirbelfaden induziert wird, also ohne Einfluß der äußeren Kräfte. Er betrachtet dabei ein Strömungsmuster, das etwas verschieden ist vom klassischen Schema der wirbelfreien Bewegung der inkompressiblen nichtviskosen Flüssigkeit, welche durch einen geradlinigen Wirbelfaden induziert wird. Er setzt nämlich voraus, daß alle Flüssigkeitsteilchen, die nicht ruhen, eine Geschwindigkeit besitzen, die größer als eine für die Flüssigkeit charakteristische Konstante k ist; außerdem werden die ganze Zeit nur solche Wirbel betrachtet, deren Stärke $z = 0$ ist. Unter diesen Voraussetzungen ist die Strömung der inkompressiblen nichtviskosen Flüssigkeit in der Nähe des Wirbels wirbelfrei, wobei dieser Teil der Flüssigkeit durch Diskontinuitätsflächen von der nichtströmenden Flüssigkeit getrennt wird. Dabei ist eine solche Diskontinuitätsfläche eine momentane Strömungsfläche, und überall auf ihr ist die Geschwindigkeit $= k$. Der Verf. nennt eine solche Diskontinuitätsfläche die innere Begrenzung (inner boundary). Er behandelt klar und ausführlich durch die sogenannte Hodographenmethode verschiedene Strömungsfälle, je nach der Zahl dieser inneren Begrenzungen sowie der zusätzlichen starren Begrenzungen.

T. P. Angelitch.

Cheng, H. K. and N. Rott: Generalizations of the inversion formula of thin airfoil theory. J. rat. Mech. Analysis 3, 357–382 (1954).

Verf. behandeln das folgende der Aerodynamik entnommene Problem: Gesucht ist eine in der oberen Halbebene reguläre analytische Funktion $w(z) = u + iv$, die die Bedeutung eines Geschwindigkeitsfeldes hat, und die längs den durch $z = a_1, a_2, \dots, a_N, \dots$ beschriebenen Intervallen abwechselnd für u und v vorgegebene Randwerte annimmt. Diese Aufgabe ist nicht eindeutig lösbar. Das homogene Problem führt auf Grund der Voraussetzung, daß es sich um ein Geschwindigkeitsfeld handelt, zu der Lösung

$$H(z) = i(A_0 + A_1 z + \dots + A_N z^N) \quad \{ (z = a_1)(z = a_2) \dots (z = a_N) \}$$

mit $N = [N/2] - 1$, wobei die A_j beliebig sind. Sind Abflußbedingungen vorgegeben, so bedeuten diese Nullstellen für $H(z)$ auf der reellen Achse. Übersteigt die Anzahl dieser Bedingungen N , so hat das homogene Problem nur die triviale Lösung. In jedem Fall versteht man aber

unter $H_0(z)$ denjenigen Ausdruck der oben stehenden Form, der evtl. unter Verletzung der Bedingung für v auch noch den Nebenbedingungen genügt, und dessen Zähler von möglichst kleinem Grad ist. Von der Funktion $F(z) = w(z) H_0(z)$ ist dann der Imaginärteil längs der reellen Achse bekannt. Diese kann also angegeben werden, und man erhält in $F(z) H_0(z) + H(z)$ die allgemeine Lösung des Problems. Es wird auch noch der Fall behandelt, daß $w(z)$ eine Ableitung eines Geschwindigkeitsfeldes ist, bzw. ein gemischtes Randwertproblem vorliegt. *H. Söhngen.*

Tehen, Chan-Mou: Motion of small particles in skew shape suspended in a viscous liquid. *J. appl. Phys.* **25**, 463—473 (1954).

Zwecks späterer Anwendung auf Kettenmoleküle betrachtet Verf. die geradlinige, stationäre, langsame Bewegung eines kleinen Körpers in zäher Flüssigkeit (Oseensche Näherung). Der Körper ist ein „verbogener Rotationskörper“, bei dem die „Achse“ ein Kreisbogen von beliebigem Radius a und Öffnungswinkel $2\chi_0$ ist und die Querschnitte senkrecht zur Achse Kreise mit variablem Radius $b(\chi)$ ($-\chi_0 \leq \chi \leq \chi_0$) mit kleinem $\varepsilon = b/2a$ sind; die Grenzfälle $\chi_0 = 0$ bzw. $\chi_0 = \pi$ entsprechen einem Rotations- bzw. einem Ringkörper. Die von einer stetigen Kraftbelegung der Achse in einem beliebigen Raumpunkt hervorgerufenen Störgeschwindigkeiten werden in Integralform dargestellt und über den Umfang der Kreisquerschnitte gemittelt, die Mittel durch Fourierentwicklung der gesuchten Kraftbelegung unter Linearisierung nach ε als Funktionen von χ berechnet. Die Randbedingungen an der Körperoberfläche werden nun auch noch über χ gemittelt, wodurch unter Zuhilfenahme gewisser Symmetrien eine Bestimmung einiger der unbekannten Fourier-Koeffizienten und damit des Gesamtwiderstandes möglich wird. Durch weitere Vernachlässigungen ergeben sich einfache Formeln für den Widerstand bei beliebiger Bewegungsrichtung.

J. Weissinger.

Coburn, N.: Discontinuities in compressible fluid flow. *Math. Mag.* **27**, 245—264 (1954).

This is a neat, expository article which gives a more unified approach to the study of the discontinuities which propagate in the compressible flows. Non-viscous fluids are considered. The discontinuities are in the terms of the Euler's variables and their derivatives with respect to the space and time variables. The main point of the treatment is to use the integrated form of the equations of motion, rather than the differential equations themselves. The discontinuities of the first derivatives and the characteristic manifolds are treated in § 3, the discontinuities of the variables themselves and the contact and shock manifolds in § 4, and finally, the propagation of small disturbances (omission of quadratic and cubic jumps) studied briefly at the end of the paper, § 5.

Y. W. Chen.

Sestopalov, V. P.: Über das Problem der Strömung einer zähen Flüssigkeit um eine halbbunendliche Platte. *Priklad. Mat. Mech.* **18**, 445—450 (1954) [Russisch].

Bhagavandin, Kettarnath: On the motion of an infinite cylindrical pendulum in a viscous fluid. *Norske Vid. Selsk. Forhdl.* **27**, Nr. 11, 5 p. (1954).

Für die Bewegung eines unendlich langen Pendels, das senkrecht zu seiner Achse in zäher Flüssigkeit schwingt, wird aus der Laplace-Gleichung die Stromfunktion in erster Näherung berechnet; höhere Näherungen sollen in späteren Mitteilungen behandelt werden.

J. Pretsch.

Muggia, Aldo: Sulla trasmissione termica per una piastra piana in corrente incompressibile non permanente: applicazione all'anemometria elettrica. *Atti Acad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII, Ser. **16**, 335—340 (1954).

L'A. studia la distribuzione della temperatura in una corrente fluida, non stazionaria, bidimensionale, che investe una lamina piana parallela alla corrente. In base ad alcune ipotesi semplificatrici, riconduce il problema alla ricerca delle soluzioni periodiche della equazione valida

per x e y positivi: $\frac{V(t) \partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial t} = x k^2 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ in cui k^2 è una costante, $V(t)$ funzione periodica come la temperatura $T(t)$; suppone inoltre $T(t)$ nulla per $y = \infty$ e per $x = 0$, $y > 0$, uguale alla temperatura della lamina per $y = 0$, $x > 0$. Applica infine i risultati ottenuti alla teoria della misura di una corrente turbolenta mediante un anemometro a filo caldo.

D. Graffi.

Herbeck, M.: Approximate solutions for heat transfer with convection flows. J. aeronaut. Sci. **21**, 142—144 (1954).

Die von M. J. Lighthill (dies. Zbl. **38**, 115) und H. Schuh [J. aeronaut. Sci. **20** (1953)] vorgeschlagenen Lösungen für den Wärmeübergang in Konvektionsströmungen werden von dem Fall einer Stromfunktion $y^2 \cdot f(x)$ auf den allgemeineren Fall $y^{r-1} f(x)$ ($r \geq 2$) übertragen, so daß der Wärmeübergang in Strömungen mit Ablösung ($r = 4$) erfaßt wird. J. Pretsch.

Finston, Morton: Forced convection from surfaces at non-uniform temperatures. J. aeronaut. Sci. **21**, 779 (1954).

Schulz, Werner und Rudolf Ludwig: Die Koordinatensysteme der Flugmechanik. Z. Flugwissenschaften **2**, 96—104 (1954).

Zusammenstellung der in der Flugmechanik auftretenden Koordinatensysteme und der zwischen ihnen bestehenden Transformationsregeln.

● **Kaufmann, Walther:** Technische Hydro- und Aeromechanik. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1954. VIII, 352 S. 254 Abb. DM 36. —.

Das Buch ist keine Neuauflage der vergriffenen „Angewandten Hydromechanik“ (Berlin 1931/34), sondern ein völlig neues, aus Vorlesungen des Verf. an der T. H. München entstandenes Werk, das laut Verlagsankündigung in erster Linie für Studierende der Ingenieur-Wissenschaften und der Physik geschrieben ist, aber auch dem Praktiker von Nutzen sein wird. Dementsprechend legt Verf. mehr Wert darauf, die grundlegenden Gesetze herauszustellen, als möglichst viele Anwendungen zu bringen. Auch der Gebrauch mathematischer Begriffe und Methoden ist auf den genannten Leserkreis abgestimmt, so werden z. B. die Elemente der Profil- und Gittertheorie ausführlich in der komplexen Darstellungsweise behandelt, während etwa die Tollmien-Schlichting'sche Stabilitätstheorie unter kurzer Herleitung der Störungs-Differentialgleichung und des zugehörigen Eigenwertproblems auf 5 Seiten nur referiert werden kann. Durch zahlreiche Zitate der modernen (im wesentlichen allerdings nur deutschen) Literatur wird dem Leser die Vertiefung in Einzelfragen erleichtert. So füllt das hervorragend ausgestattete Buch — neben der reichhaltigeren, aber weniger detaillierten „Strömungslehre“ von Prandtl und der ganz auf die Anwendungen abgestimmten „Technischen Strömungslehre“ von Eck — eine fühlbare Lücke im heutigen deutschen Schrifttum aus. — Begrifflich nicht ganz sauber scheint dem Ref. die Herleitung der Formel (125) für die turbulente Schubspannung: in (123) und (124) sollten nicht die (verschwindenden) Mittelwerte der Schwankungsgeschwindigkeiten, sondern diese selbst stehen; vielleicht wäre in der Turbulenztheorie auch eine deutlichere begriffliche Unterscheidung zwischen räumlicher und zeitlicher Mittelbildung angebracht. — Inhalt: I. Eigenschaften der Flüssigkeiten und Gase (4 S.). II. Hydro- bzw. Aerostatik (25 S.). III. Hydro- bzw. Aerodynamik: 1. Eindimensionale Strömung [A. Reibungsfreie Strömung (21 S.), B. Strömung mit Energieverlusten, Einfluß der Zähigkeit (67 S.)], 2. Allgemeine Theorie der zwei- und dreidimensionalen Strömung [A. Grundbegriffe und Grundgesetze der idealen Strömung (75 S.), B. Bewegung zäher Flüssigkeiten (117 S.)] III. Gasdynamik (35 S.). An technisch wichtigen Teilgebieten werden eingehend behandelt die Rohr- und Gerinnesströmung, Grundwasserbewegung, Schmiermittelreibung, Wellenbewegung, Tragflügel- und Gitterprobleme, Propellertheorie u. a. m., vor allem aber alle mit der Grenzschichttheorie zusammenhängenden Fragen. In der Gasdynamik beschränkt sich Verf. im Hinblick auf die Lehrbücher von Sauer und Oswatitsch auf die eindimensionale und ebene stationäre Strömung. J. Weissinger.

Naylor, Derek: The simple wave in rotational gas flow. J. rat. Mech. Analysis **3**, 415—433 (1954).

Es hat sich eingebürgert, Strömungen kompressibler Medien, deren Geschwindigkeitsvektor w als Funktion einer einzigen unabhängigen Variablen, z , geschrieben werden kann,

als einfache Wellen zu bezeichnen. Solche einfachen Wellen sind z. B. die ebenen, drehungsfreien, isoeenergetischen Überschallströmungen um eine einseitig begrenzende Wand. In vorliegender Note werden die einfachen Wellen untersucht in ebenen und drehsymmetrischen isoeenergetischen Strömungen, die anisotrop (also wirbelig) sind. Für sie folgt im ebenen Fall aus Croccos Wirbelsatz leicht das Bestehen einer Relation $W = G(\psi) a^{2\kappa-1}$ (W = Geschwindigkeitsbetrag, a = Schallgeschwindigkeit, κ = Adiabatenexponent), wo G Funktion allein der Stromfunktion ψ ist. [Wichtig ist für die Untersuchung, daß man die Croccosche statt der Stokesschen Stromfunktion wählt.] Da hieraus die Entropieverteilung auf die Stromlinien sich zu $S - S_0 = \kappa(\kappa - 1) c$, $g(\psi)$ (c , spez. Wärme bei konst. Volumen) ergibt mit $g'(\psi) = G(\psi)$, und da man aus den Untersuchungen von M. H. Martin (dies. Zbl. 38, 118) weiß, daß $g(\psi)$ linear oder logarithmisch ist, so gibt es nur zwei Typen von Funktionen $G(\psi)$, nämlich $G = \text{const}$ ($= A$) und $G = A \cdot \psi$. Da mit ψ auch a Funktionen allein von λ sind, gilt das gleiche auch für die aus ψ durch Anwendung der Legendreschen Berührungstransformation hervorgehende Funktion Ψ . Mit τ als Ortsvektor des Punktes x, y gilt $\Psi_\lambda - \tau \cdot (\text{grad } \psi)_\lambda = 0$, und dies stellt eine einparametrische Schar von Geraden $\lambda = \text{const}$, die Parameterlinien, dar, die sich somit als Isotachen und Isoklinen für den Geschwindigkeitsvektor und auch als Iso- a -Linien erweisen. Ist $G(\psi) = A$, so sind die Parameterlinien eine Schar paralleler Geraden; wenn $G = A/\psi$, so gehen sie alle durch einen Punkt. Die Stromlinien sind daher alle „ähnlicher“ Kurven. Ihre Krümmung kann leicht angegeben werden. Im Fall konkurrierender Parameterlinien wird die Differentialgleichung für W als Funktion der Stromlinienneigung aufgestellt und in einigen speziellen Fällen geschlossen integriert. Der Fall paralleler Parameterlinien kann allgemein einer geschlossenen Lösung zugänglich gemacht werden. Schließlich können die Überlegungen weitgehend auf achsensymmetrische Strömungen übertragen werden. Doch läßt sich die analytische Durchführung nicht so weit treiben wie im ebenen Fall. — Bem. des Ref.: Da die Parameterlinien in jedem Fall (entweder im Endlichen oder im Unendlichen) konkurrieren, gibt es in keinem Fall nicht-entartete Enveloppen dieser Scharen (es sei denn $g(\psi) = 0$; dies ist aber gerade der ebene wirbelfreie Fall) — und damit zeigt sich eigentlich klar, daß Untersuchungen der in dieser Note angeschnittenen Art wenig allgemeine Bedeutung haben können. Denn aus dem angegebenen Grunde kann eine solche Theorie nicht dazu verwendet werden, die Strömung zur Erfüllung der Umströmungsbedingung von Wänden zu zwingen. Vielmehr ergeben sich stets nur Einzelfälle jeweils irgendwie kranker Strömungen; ein einziger, im Endlichen nichtsingulärer Fall entspricht der wirbeligen Verallgemeinerung der Prandtl-Meyerschen Eckenströmung und ist schon von M. H. Martin angegeben worden (loc. cit.). — Dieses Resultat über die nicht existierenden Enveloppen wird dann nicht überraschen, wenn man die in der Note angeschnittene Frage unter dem Gesichtswinkel der intermediären Lösungen der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Croccosche Stromfunktion sieht. In der Tat hat sich Ref. schon vor Jahren (mit den in dies. Zbl. 42, 198 dargestellten Methoden) einen Beweis dafür zurechtgelegt, daß nur im isentropen Fall, und dort auch nur für ebene Strömung, intermediäre Lösungen existieren können.

H. Behrbohm.

Lin, C. C.: Some physical aspects of the stability of parallel flows. Proc. nat. Acad. Sci. USA 40, 741—747.

Aus der Stabilitätstheorie der Laminarströmung ist bekannt, daß die Anfachung oder Dämpfung von Störungen zustande kommt durch Zusammenwirken der Energieübertragung von der Haupt- auf die Nebenbewegung und durch Dissipation der Energie der Nebenbewegung. Für beide Anteile existieren in der Literatur allgemeine Formeln, die bisher aus undurchsichtigen mathematischen Überlegungen hergeleitet wurden. Hier wird für ein besonders einfaches Modell einer Störungsbewegung eine physikalisch anschauliche Herleitung dieser Formeln gegeben.

H. Schlichting.

Riabouchinsky, Dimitri: Application de la méthode des variables topographiques à l'étude des mouvements fluides non-permanents. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 636—638 (1954).

For three-dimensional, non-steady gas flow problems the author suggests a perturbation scheme for subsonic, supersonic as well as sonic flows. The space variables x, y, z are represented as functions of the velocity potential q and the stream functions ψ_1, ψ_2 in a similar manner as that presented in the author's earlier works on steady flows [Publ. sci. Tech. Minist. Air No. 157 (Paris 1939); this Zbl. 42, 197]. In order to take care of the dependence on the time, coefficients are added to the previous representation, these coefficients being functions of time only. They are not entirely arbitrary, because of the differential equations. The extent of the validity of the general scheme and its applicability to special problems are not further discussed in the paper.

Y. W. Chen.

Riabouchinsky, Dimitri: Quelques remarques complémentaires sur la correspondance entre les champs gazodynamique et électromagnétique. C. r. Acad. Sci., Paris **239**, 216—218 (1954).

Basch, A.: Zur Differentialgeometrie der ebenen Strömung von Gasen. Z. angew. Math. Mech. **34**, 332—334 (1954).

Morhgen, Karl und Kurt Rothe: Beitrag zur Berechnung der Strömung im Axiallader. Z. Flugwissenschaften **2**, 149—154 (1954).

Gusejn-Zade, M. A.: Die Umströmung zweier durchlässiger Profile, die in bezug auf eine gewisse Ebene gegenseitige Spiegelbilder sind. Vestnik Moskovsk. Univ. **9**, Nr. 8 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 5), 45—49 (1954) [Russisch].

Fil'čakov, P. F.: Bestimmung der Konstanten des Christoffel-Schwarzschen Integrals bei der hydromechanischen Berechnung eines zweispuntigen Flutbettes. Ukrain. mat. Žurn. **6**, 463—475 (1954) [Russisch].

Singh, K. R.: Path of a vortex round the rectangular bend of a channel with a uniform flow. Z. angew. Math. Mech. **34**, 432—435 (1954).

Woods, L. C.: Compressible subsonic flow in two-dimensional channels with mixed boundary conditions. Quart. J. Mech. appl. Math. **7**, 263—282 (1954).

Die kompressible Unterschallströmung in zweidimensionalen Kanälen, bei welcher die Drücke über einigen benachbarten Wandquerschnitten oder Randstromlinien und die Form der übrigen Querschnitte gegeben sind, wird mit Hilfe der folgenden konformen Abbildung der Ebene des komplexen Strömungspotentials auf eine einfache Hilfsebene berechnet: Intervalle der Randstromlinien, auf denen die tangentiale Geschwindigkeitskomponente bekannt ist, werden auf die reelle Achse, und die übrigen Intervalle auf die Parallele zu ihr im Abstand $i\pi/2$ abgebildet. In dieser Hilfsebene führt die Laplace-Gleichung auf eine Integralgleichung, welche sich durch ein schnell konvergierendes Iterationsverfahren lösen läßt, es wird am Beispiel der Strömung eines Strahls durchgerechnet, der um eine Fläche bekannter Krümmung umgelenkt wird (speziell: numerische Lösung der inkompressiblen Strömung eines Strahls hinter einem Kreiszylinder). Weitere Beispiele sind: Entwurf eines Kanalkrümmers, Strömung eines Strahls gegen eine ebene Platte, Verallgemeinerung der Borda-Mündung. J. Pretsch.

Haase, D.: Strömung in einem 90°-Knie. Ingenieur-Arch. **22**, 282—292 (1954).

Ausgehend von der Potentialströmung mit Diskontinuitätsfläche in einem Knie, wie sie von von Mises (Franck-von Mises, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. 2. Auflage, Band II, Braunschweig 1935, S. 417, dies. Zbl. **11**, 23) angegeben worden sind, wird hier angenommen, daß diese Fläche nicht stabil ist und daß stromabwärts eine Vermischung des strömenden Mediums mit dem Totwasser auftritt. Es läßt sich dann dort ein Stoßverlust berechnen. Die Druckverteilung wird dann berechnet. Es zeigt sich, daß gute Übereinstimmung mit dem Experiment besteht wenigstens in der Umgebung der Umlenkung, wenn vor der Umlenkung die Geschwindigkeit über den Querschnitt nahezu konstant ist. Die Bestimmung des Ablösepunktes vor der äußeren Knieecke nach Gruschwitz führt zu guter Übereinstimmung mit dem Versuch. A. van Heemert.

Glansdorff, P.: Sur la puissance des forces intérieures dans un circuit de ventilation à parois perméables. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **40**, 731—736 (1954).

L'A. considère un fluide en mouvement de pression p , de vitesse \vec{u} , et un tube géométrique fixe V engendré par une section S supposée fonction d'un paramètre τ variant de τ_1 à τ_2 . À un instant donné, il suppose p constante en tout point d'une même section S . Désignant par Φ le flux en volume à travers S , par $\delta\Phi$ l'accroissement de Φ d'une section à une section voisine, par $d\Phi$ le flux élémentaire latéral entre deux sections voisines, il démontre que la puissance des forces élastiques internes

$\int_V p \operatorname{div} \vec{u} dV$ s'écrit alors $\int_{\tau_1}^{\tau_2} p(\delta\Phi + d\Phi)$. Le calcul s'applique au cas où V est le circuit de ventilation d'une mine, la surface latérale présentant des apports continus par diffusion à travers les parois, bifurcations, échappement d'air des marteaux

pics. Signalons que l'A. utilise une orientation de l'espace opposée à celle qui est habituelle aujourd'hui, et qu'il désigne le produit vectoriel de \vec{a} et \vec{b} par $M \vec{a} \vec{b}$.
R. de Possel.

Müller, Werner: *Hodographenmethode der Gasdynamik bei quadratisch approximierter Adiabate.* S. Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1953, 313—330 (1954).

Zur Untersuchung zweidimensionaler, stationärer, isentropischer Unterschallströmungen kompressibler Medien approximiert der Verf. nach einem Vorschlag des Ref. (dies. Zbl. 46, 425) die Druck-Dichte-Kurve nicht wie Tschapligin, v. Karman und Busemann durch eine Gerade, sondern durch eine Parabel. Er verallgemeinert für diese quadratische Approximation die Tschapliginsche Hodographenmethode. Dadurch gewinnt er ein verhältnismäßig einfaches Verfahren, das aus inkompressiblen Strömungen kompressible Strömungen herzuleiten gestattet, welche bei Ausschluß der Staupunkte die Strömungen realer Gase in guter Näherung darstellen. Als Beispiel behandelt der Verf. die staupunktfreie Strömung mit Zirkulation um ein Kreisbogenprofil.
R. Sauer.

Frank, Wilhelm: *Zur Berechnung von Potentialströmungsfeldern.* Österreich. Ingenieur-Arch. 8, 97—107 (1954).

Es scheint Verf. entgangen zu sein, daß Ref. in seiner Dissertation [Jahrb. Deutsch. Luftfahrtforsch. 1938 I. 60 (1938)] bereits die Berechnung der natürlichen Druckverteilung aus der Potentialströmung im ebenen Fall mit Hilfe einer Singularitätenbelegung der umströmten Kontur allgemein gelöst hat, indem die Verdrängungsdicke der Grenzschicht benutzt wurde; Voraussetzung war auch hier geringe Ablösungswirkung.
J. Pretsch.

Wu, Y. T.: *A theory for hydrofoils of finite span.* J. Math. Physics 33, 207—248 (1954).

Nach einer auf 23. zum Teil experimentelle Arbeiten eingehenden Darstellung des Entwicklungsstandes der Theorie des Unterwassertragflügels, werden die (linearisierten) Grundgleichungen: $\nabla^2 \varphi = 0$, $\partial \varphi / \partial z = -U \partial \zeta / \partial x$ und $U \partial \varphi / \partial x = -g \zeta$ für $z = 0$, sowie $\partial \varphi / \partial n = -U \cos(n, x)$ am Flügel, für das Störgeschwindigkeitspotential $\varphi(x, y, z)$ des in der Tiefe h unter der Oberfläche $z = 0$ befindlichen mit der Geschwindigkeit U in x -Richtung angeströmten Flügels der Spannweite $2b$ aufgestellt [$z = \zeta(x, y)$ gestörte Wasseroberfläche]. Mit der v. Kármánschen Integraldarstellung für das Potential q_1 des Prandtlschen Traglinienmodells (im unbegrenzten Raum) wird $\varphi = q_1 + q_2 + q_3 + q_4$ angesetzt, wo q_2 das Potential des (mit gleicher Zirkulation) an der Ebene $z = 0$ gespiegelten Wirbelsystems bedeutet, während q_3 der Randbedingung $U \partial q_3 / \partial x = -g \zeta$ genügt und das Potential eines durch den Flügel hervorgerufenen Wellensystems dargestellt, für welches aber ζ weit vor dem Flügel nicht verschwindet, so daß ein Wellenpotential q_4 (ohne Störkörper) zur Kompensation addiert werden muß. Bei bekannter Zirkulationsverteilung $\Gamma(y)$ lassen sich alle Potentiale in Form von Fourierintegralen angeben, desgleichen der Gesamt Widerstand und (unter Berücksichtigung der Tangentialkomponente der Störgeschwindigkeit) der Auftrieb. Die Randbedingung am Flügel wird wie in der Traglinientheorie am Ort der tragenden Linie erfüllt, was zu einer linearen Integralgleichung für $\Gamma(y)$ führt, die in Analogie zum Verfahren von Glauert (aber mit erheblich größerem Rechenaufwand wegen der komplizierten Fourierentwicklungen) näherungsweise gelöst werden kann. Auch das Problem des Minimalwiderstandes läßt sich analog behandeln. — Im folgenden wird elliptische Zirkulationsverteilung zugrunde gelegt. Die Integrale für Widerstand, Auftrieb und für die am Flügel induzierten Geschwindigkeiten werden für die Grenzfälle $\sigma = U^2 g h \rightarrow 0$ und $\sigma \rightarrow \infty$ in Reihen entwickelt und in ihrer Abhängigkeit vom Parameter $\lambda = h/b$ untersucht, zumeist unter Aufspaltung der einzelnen Einflüsse entsprechend den

Potentialen q_v . Als Ergebnis dieser Rechnungen sind die Beiwerte von Auftrieb und Widerstand (sowohl bezogen auf U wie auf die Geschwindigkeit $U + \partial q_v / \partial x$ am Flügel) über $\lambda (0 \leq \lambda \leq 0,9$ für große σ , $0 \leq \lambda \leq 2$ für kleine σ) aufgetragen und diskutiert. Z. B. nimmt mit abnehmendem h der Auftrieb bei großem σ monoton ab, während er bei kleinem σ zunächst zu-, dann abnimmt. — Bezüglich mathematischer Einzelheiten wird gelegentlich auf eine ausführlichere Darstellung (Hydrodynamics Laboratory Rep. No. 26 —8, California Institute of Technology, 1953) verwiesen.

J. Weissinger.

Spence, D. A.: Prediction of the characteristics of two-dimensional airfoils. J. aeronaut. Sci. 21, 577—587, 620 (1954).

Methods have been developed for calculating the incompressible flow past airfoil sections, taking full account of the boundary layer and wake. It may be hoped that systematic use of these will enable quantitative predictions to be made of the influence of transition position, Reynolds Number, thickness ratio and trailing edge angle on the reduction of coefficients of lift, etc., below their values for ideal fluid. The circulation and the surface pressure distribution are found by potential theory. The boundary layer and wake are represented in the calculation by a source distribution, whose effect is found by transforming the flow to the plane of the complex potential of ideal flow past the airfoil. An equation expressing the constancy of total pressure outside the boundary layer and wake then gives the circulation. With measured boundary layer data for two airfoils of different shapes, the method predicts lift coefficients agreeing closely with those observed. *A priori* predictions of boundary-layer growth and thence of lift coefficients, pitching moments, and hinge moments on plain flaps of several sizes, have been made for a Joukowski airfoil at three Reynolds Numbers. Direct experimental verification of the results has not been possible, but they accord well with expectation. Autoreferat.

Hawthorne, W. R.: The secondary flow about struts and airfoils. J. aeronaut. Sci. 21, 588—608, 648 (1954).

The flow about a strut when the approaching velocity varies in the spanwise direction has been examined theoretically and experimentally. The theory supposes that the fluid is inviscid and incompressible and that the flow is a small disturbance of the two-dimensional potential pattern appropriate to the profile. It is found that the shape of the profile at the nose influences the size of the disturbances appreciably. A rounded nose causes such large disturbances that the original assumptions of the theory are invalidated. The disturbances are much less with a wedge-shaped nose and least with a cusped nose. A method of designing profiles to minimize the disturbances is described and an example — a bicusped strut — is given. The flow about the bicusped strut is examined in detail and the energy in the secondary flow normal to the direction of the approaching flow is determined for one type of initial velocity distribution. This energy is found to vary as the fourth power of the thickness of the strut and to be a maximum at a certain value of the displacement thickness of the original nonuniform stream. The secondary flows produced by a biconvex profile are shown to be small. Calculations for a thin circular airfoil are presented to show the effect of lift and the existence of vortex sheet trailing off such an airfoil indicated. Ling's experiments with a bicusped and conventional profile placed in a nonuniform stream are summarized to show their confirmation of the major effects predicted by the theory. The drag due to secondary effects is appreciably less with the bicusped strut and so is the general disturbance of the flow as shown by wake traverses. The energy in the secondary flow is of the order of that predicted by the theory for the bicusped strut but the drag is much greater than would be deduced from measured or calculated energy. Some experiments with struts placed in an hydraulic channel with a sandy bottom show that the scouring of the beds of rivers may be attributed to secondary flows. The use of a bicusped profile reduces the scouring considerably compared to an elliptic profile of the same thickness and chord. Autoreferat.

Manwell, A. R.: The variation of compressible flows. Quart. J. Mech. appl. Math. 7, 40—50 (1954).

Zur Untersuchung der Stabilität schallnaher ebener stationärer Potentialströmungen werden die Störungsgleichungen für Potential- und Stromfunktion in der Hodographen- und der Strömungsebene angegeben. Es zeigt sich, daß, wenn auch die Funktionaldeterminante der Abbildung der Strömungsebene in der Hodographenebene verschwindet, die Potentialströmung nicht zusammenzubrechen braucht. Andererseits wird aber am Beispiel eines Wirbels mit Schalldurchgang gezeigt, daß für gewisse Geschwindigkeiten am umströmten Zylinder kleine Störungen der Randbedingungen verhältnismäßig große Störungen der Strömung verursachen können („Resonanz“). C. Heinz.

Nickel, K.: Über spezielle Systeme von Tragflügelgittern. I. (Theorie der tragenden Linie.) Ingenieur-Arch. 22, 108—120 (1954).

Unter einem Tragflügelgitter wird hier eine Anordnung von unendlich vielen, äquidistanten

Tragflügeln gleicher endlicher Spannweite verstanden, die untereinander parallel sind und deren Vorderkanten alle in einer zur Anströmungsrichtung senkrechten Ebene liegen. Auf ein solches Gitter wird die Prandtl'sche Traglinientheorie des Einzelflügels übertragen. Abgesehen von den beiden Sonderfällen vertikal übereinander und horizontal nebeneinander angeordneter Tragflügel induzieren die freien Wirbel neben Abwind- auch Querwindgeschwindigkeiten, so daß eine Behandlung der 2. und 3. Grundaufgabe zunächst noch nicht möglich ist. Für die Aufgabe, aus der Auftriebsverteilung Ab- und Querwind zu berechnen, sowie für deren Umkehrung werden Formeln zusammengestellt, die für den Fall sehr großen Abstandes zwischen den Tragflügeln in die bekannten Formeln für den Einzelflügel übergehen. Wegen der mathematischen Begründung wird auf eine frühere Arbeit verwiesen (dies. Zbl. 50, 103). Eine Erweiterung auf endlich viele solcher Tragflügelgitter liefert ganz analoge Formeln, die der Verf. für einen Sonderfall schon an anderer Stelle mitgeteilt hat (dies. Zbl. 48, 189). Die auch für die Praxis interessanten Systeme von Profiligittern, die in enger Beziehung zu den hier untersuchten Systemen stehen, sollen in Teil II behandelt werden.

K. Gersten.

Isay, W.-H.: Beitrag zur Potentialströmung durch radiale Schaufelgitter. Ingenieur-Arch. 22, 203—210 (1954).

Die für Axialgitter entwickelte Theorie zur Berechnung der Potentialströmung nach der direkten Singularitätenmethode (dies. Zbl. 52, 213) wird auf Radialgitter, und zwar Einzelgitter und Gitterstufen mit linienhaften bzw. endlich dicken Profilen übertragen.

J. Pretsch.

Lance, G. N.: The kernel function of the integral equation relating the lift and downwash distribution of oscillating finite wings in subsonic flow. J. aeronaut. Sci. 21, 635—636 (1954).

Die von Watkins, Runyan und Woolston [NACA Techn. Note Nr. 3131 (1954)] angegebene Entwicklung der Kernfunktion eines endlichen, schwingenden Unterschallflügels nach Potenzen der Kreisfrequenz wird einfacher mittels Laplace-Transformation hergeleitet, insbesondere auch für die Grenzfälle $\omega \rightarrow \infty$ und $M \rightarrow 1$.

J. Weissinger.

Mollo-Christensen, Erik and Holt Ashley: Applicability of piston theory to the flow around wings in unsteady motion. J. aeronaut. Sci. 21, 779—781 (1954).

Bulach, B. M.: Zur Theorie der konischen Strömungen. Priklad. Mat. Mech. 18, 451—452 (1954) [Russisch].

Soucek, E.: Zur Berechnung der Unterwassertragfläche. (Ebenes Problem.) Österreich. Ingenieur-Arch. 8, 214—221 (1954).

Verf. ersetzt das Tragflügelprofil durch eine Wirbelbelegung der Sehne und befriedigt die Randbedingung an der Wasseroberfläche — unter der Annahme genügend großer Tauchtiefe — durch Spiegelung der Wirbel (unter Erhaltung ihres Drehsinns) an der Oberfläche. Die gespiegelte Wirbelverteilung wird durch einen Einzelwirbel im Zirkulationsmittelpunkt ersetzt. Schreibt man mittels eines trigonometrischen Ansatzes zweiter Ordnung die Randbedingungen am Profil für Vorder- und Hinterkante sowie die Profilmitte hin, so ergibt sich bei Berücksichtigung der induzierten Vertikal- und Horizontalkomponenten der Geschwindigkeit ein nichtlineares Gleichungssystem, das durch Iteration gelöst werden kann. I. a. genügt schon der erste Iterationsschritt, so daß sich explizite Formeln für Auftrieb und Moment ergeben. Ein Zahlenbeispiel für das Profil NACA N60 mit der relativen Tauchtiefe $h/t = 0,5$ schließt die Arbeit ab.

J. Weissinger.

Müller, W.: Die Bewegung eines Rotationskörpers in der reibungslosen Flüssigkeit und das instabile Moment der Druckkräfte. Österreich. Ingenieur-Arch. 8, 171—184 (1954).

Für das Moment der Druckkräfte an einem in einer reibungslosen Flüssigkeit bewegten Körper leitet Verf. erneut eine Vektorformel ab, die im Fall eines Rotationskörpers in einen Integralausdruck umgeformt werden kann, der nicht mehr die Geschwindigkeiten sondern als maßgebende Größen nur die beiden Funktionen enthält, die unmittelbar von der Quell- und Dipolverteilung längs der Achse abhängen. Bei Kenntnis der erzeugenden Funktionen kann man auch die Koeffizienten k_1 und k_2 des auf die Längs- und Querbewegung entfallenden virtuellen Volumens bestimmen, die eine weitere Bedeutung für die beschleunigte Bewegung des Rotationskörpers haben. Zur Bestätigung der Formeln und zur Vorbereitung für die Behandlung allgemeinerer Fälle wird das Beispiel des Rotationsellipsoids unter-

sucht, bei dem ja eine exakte Lösung möglich ist. Die Trägheitskoeffizienten k_1 und k_2 werden in Abhängigkeit vom Achsenverhältnis berechnet. W. Wuest.

Dean, W. R.: Note on the motion of an infinite cylinder in rotating viscous liquid. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **7**, 257—262 (1954).

G. J. Taylor (1916) hat die zweidimensionale Bewegung eines zylindrischen Körpers in einer reibungslosen ruhenden Flüssigkeit verglichen mit folgenden Bewegungen: a) Die Flüssigkeit rotiert mit gleichförmiger Drehgeschwindigkeit um eine feste Achse, wobei die Bewegung des Körpers relativ zu einem ruhenden Bezugssystem gleich geblieben ist. b) Der Körper führt die gleiche Bewegung wie anfangs relativ zu einem rotierenden Bezugssystem aus. — Verf. leitet die Taylorschen Beziehungen für die Druckspannungen, die Kraftkomponenten und das Moment in den verglichenen Fällen erneut ab und zeigt in einer kurzen Notiz, daß die gleichen Beziehungen auch für eine zähe Flüssigkeit gelten. Die kurze Beweisführung läßt allerdings nicht erkennen, ob auch die verschiedenartigen Randbedingungen in ausreichendem Maße berücksichtigt worden sind. W. Wuest.

Kelly, Howard R.: The estimation of normal-force, drag, and pitching-moment coefficients for blunt-based bodies of revolution at large angles of attack. *J. aeronaut. Sci.* **21**, 549—555, 565 (1954).

Die von H. J. Allen [NACA Rep. 1048 (1951)] entwickelten halbempirischen Formeln für Luftkräfte und Luftkraftmomente an rotationssymmetrischen Körpern bei größeren Anstellwinkeln werden kritisch geprüft; die Möglichkeit einer Extrapolation der neuen Formeln von kleinen Modellen mit laminarer Grenzschicht auf Freiflugbedingungen mit turbulenter Grenzschicht erscheint nicht ausreichend begründet. J. Pretsch.

Woods, L. C.: The lift and moment acting on a thick aerofoil in unsteady motion. *Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A* **247**, 131—162 (1954).

A new approach to the problem is presented. First of all, the problem is stated using as a dependent variable the function $f = \ln(U e^{i\theta} q^{-1})$, U being the velocity at infinity and (q, θ) the velocity vector in polar coordinates. This function is considered in the plane ζ defined by $w_0 = -2a \cosh \zeta$, $w_0 = q_0 + i\psi_0$ being the ordinary complex velocity potential of the steady flow for zero-circulation. f is expressed in the boundary values using classical functiontheory. It is assumed that vorticity moves downstream with the local velocity of the mean steady flow. Further the condition of smooth flow at the trailing edge is replaced by the Kelvin circulation theorem. Two viscosity effects are allowed for: (i) viscous slip at the trailing edge and (ii) a modification of the velocity distribution of the mean steady flow, especially near the trailing edge. Blasius theorem for unsteady flow is used for the calculation of lift and moment. In Part II the theory is applied to harmonic oscillations. The results reduce to classical flat plate theory if the aerofoil degenerates to a flat plate and the viscous slip at the trailing edge is zero. A comparison with experiment shows that the theory satisfactorily accounts for some of the discrepancies between classical theory and experimental results. A. van Heemert.

Lawrence, H. R. and A. H. Flax: Wing-body interference at subsonic and supersonic speeds. Survey and new developments. *J. aeronaut. Sci.* **21**, 289—324, 328 (1954).

Verff. geben eine vollständige und systematische Darstellung der verschiedenen zur Zeit vorhandenen oder in Entwicklung befindlichen linearen Theorien zur Berechnung der Auftriebsverteilung bzw. der Kräfte und Momente an Flügel-Rumpf-Kombinationen in Unter- und Überschallströmung unter Beschränkung (aus Platzgründen) auf symmetrische Verteilungen. Die Gültigkeitsbereiche der Theorien hinsichtlich mathematischer Exaktheit und Übereinstimmung mit dem Experiment werden umrissen, wozu eine genaue Formulierung der Voraussetzungen und Vernachlässigungen wesentlich beiträgt. Die konsequente Heranziehung allgemein-

gültiger Beziehungen in der Trefftzischen Strömungsebene und von Reziprozitätssätzen (reverse-flow-theorems) sowie die Formulierung der Aufgabe als Variationsproblem ermöglicht das Aufzeigen von Zusammenhängen zwischen den verschiedenen Theorien und eine gewisse Einheitlichkeit der Darstellung, aber auch die Gewinnung neuer Sätze und Methoden. An bisher unveröffentlichten Ergebnissen werden besonders hervorgehoben: 1. Eine Näherungstheorie für Flügel kleiner Streckung (< 4) mit gerader Hinterkante in Unterschallströmung, 2. Eine einfache, halbempirische Methode zur Berechnung der Beiwerte bei kleiner Flügelstreckung im Unterschallbereich, 3. Eine Berechnungsmethode der Beiwerte bei großer Flügelstreckung (Traglinientheorie) mittels Variationsrechnung, 4. Theoretische und experimentelle Ergebnisse für eine Flügel-Serie mit Überschallvorderkante und Streckungen zwischen 0,5 und 5,0 unter besonderer Betonung der Auftriebsverteilung des Rumpfes, 5. Rasch arbeitende Näherungsmethoden zur Berechnung der Auftriebsverteilung des Rumpfes unter den in 4. genannten Verhältnissen, 6. Allgemeine Integralbeziehungen in der linearisierten Theorie der Flügel-Rumpf-Interferenz. — Das Literaturverzeichnis umfaßt 56, zum Teil noch unpublizierte Arbeiten. *J. Weissinger.*

Ghosh, N. L.: A theory of resistance in potential flows. I.—IV. Proc. nat. Inst. Sci. India **20**, 74—103 (1954).

Die Abhandlung gibt eine knappe Übersicht über die Theorie des Widerstandes in Potentialströmungen. Sie beschreibt das d'Alembertsche Paradoxon und seine Auflösung in integraler Betrachtungsweise, die Dissipation in der Potentialströmung, den geschlossenen Nachlauf in ebener Strömung, auch Ablösungserscheinungen und schließlich Widerstand und Dissipation in Bewegungen mit geschlossenem Nachlauf.

J. Pretsch.

Just, Walter: Über den Einfluß der konstruktiven Größen und Flugdaten eines Flugzeuges auf seine Seitenstabilitätseigenschaften. Z. Flugwissenschaften **2**, 259—277 (1954).

Dolapčiev, Bl.: Über eine angenäherte Bestimmung des Wirbelwiderstandes. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **98**, 743—746 (1954) [Russisch].

Abzug, Malcolm J.: Effects of certain steady motions on small-disturbance airplane dynamics. J. aeronaut. Sci. **21**, 749—752, 762 (1954).

Saelman, B.: Airplane stopping distance. J. aeronaut. Sci. **21**, 790—792 (1954).

Miele, Angelo: On the non-steady climb of turbojet aircraft. J. aeronaut. Sci. **21**, 781—783 (1954).

Hedgepeth, John M., Bernard Budiansky and Robert W. Leonard: Analysis of flutter in compressible flow of a panel on many supports. J. aeronaut. Sci. **21**, 475—486 (1954).

Morris, D. N. and J. W. Smith: Ein Näherungsverfahren für die Integration der laminaren, kompressiblen Grenzschichtgleichungen. Z. angew. Math. Mech. **34**, 193—194 (1954).

Kurzbericht über ein von den Verff. entwickeltes Pohlhausen-Verfahren [Bell Aircraft Corp., Rep. No. 02-978-010 (1952)]. Bemerkenswert ist die Einführung der Dorodnitsynschen Variablen η , die durch die Transformation $d\eta = (\varrho/\varrho_\infty) dy$ mit $\eta(0) = 0$ (y Wandabstand, ϱ lokale Dichte, Index ∞ Staubedingungen der ungestörten Strömung) bestimmt wird.

W. Szablewski.

Illingworth, C. R.: Boundary layer growth on a spinning body. Philos. Mag., VII. Ser. **45**, 1—8 (1954).

Es wird eine Lösung der Prandtl'schen Grenzschichtgleichung für den Fall des aus der Ruhe heraus bewegten, in Achsrichtung angeströmten Rotations-Körpers $R(x)$ hergeleitet für den allgemeinen Fall, daß dieser außer einer axialen Bewegung mit der Geschwindigkeit U eine Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit Ω um seine Achse ausführt. Die Lösungsmethode entspricht der des von Bolze (Diss. Göttingen 1908) schon behandelten spezielleren Problems ohne Rotation des

Körpers. Die Berechnungen sind für die Schubspannungskomponenten τ_x und τ_z bis zu einem numerischen Ergebnis durchgeführt und in Form einer Reihenentwicklung angegeben, die nach dem Gliede l^2 abbricht und deren Koeffizienten von der Geschwindigkeitsverteilung $U(x)$ der reibungslosen Strömung am Körper, der Winkelgeschwindigkeit Ω und der Körperform $R(x)$ abhängen. Am Beispiel der Kugel (vom Radius a) wird gezeigt, daß die Rotation des Körpers eine frühere Ablösung bedingt, wobei diesbezügliche Zahlenangaben für verschiedene Werte des Parameters $\Omega^2 a^2 / U^2$ gemacht werden. Das entsprechende stationäre Problem ist übrigens vor kurzem durch H. Schlichting (dies. Zbl. 51, 416) behandelt worden.

F. W. Riegels.

Kelly, Howard R.: A note on the laminar boundary layer on a circular cylinder in axial incompressible flow. *J. aeronaut. Sci.* 21, 634 (1954).

In dieser kurzen Bemerkung gibt Verf. einige Ergebnisse von neuen Rechnungen bekannt, die mit der Analogie-Rechenmaschine REAC gewonnen sind und erhebliche Verbesserungen gegenüber einer von Seban und Bond (dies. Zbl. 43, 400) durchgeführten Berechnung zeigen. Nach Einführung einer geeigneten Definition für die Verdrängungsdicke ergibt sich $\delta^* = \delta_0^* (1 - 0.204 \xi - 0.146 \xi^2)$, wobei der Index 0 den entsprechenden Wert für die ebene Platte bedeutet und $\xi = (4a)(\nu x/U)^{1/2}$ gesetzt ist mit a als Zylinderradius und U als axialer Anströmgeschwindigkeit. Für den Reibungswiderstand findet Verf.: $c_f = c_{f_0} (1 + 0.525 \xi - 0.120 \xi^2)$.

F. W. Riegels.

Tani, Itiro: On the approximate solution of the laminar boundary-layer equations. *J. aeronaut. Sci.* 21, 487—495, 504 (1954).

Zunächst wird für die ebene laminare Grenzschicht bei inkompressibler Strömung das bekannte Kármán-Pohlhausensche Näherungsverfahren dadurch in seiner Genauigkeit verbessert, daß außer dem Impulssatz auch der Energiesatz erfüllt wird. Dabei wird für die Impulsverlustdicke eine bequeme Quadraturformel erhalten (wie bei anderen neueren Näherungsverfahren). — Das neue Näherungsverfahren wird sodann auf die laminare Grenzschicht bei kompressibler Strömung übertragen für den Fall der warmendurchlässigen Wand. Die Prandtl-Zahl kann dabei von eins verschieden sein, und für die Temperaturabhängigkeit des Zähigkeitsbeiwertes wird die allgemeine Sutherlandsche Formel zugrunde gelegt. Die Übertragung des Näherungsverfahrens auf kompressible Grenzschichten stützt sich auf die Stewartson'sche Transformation, durch welche die Impulsgleichung der kompressiblen Grenzschicht auf diejenige der inkompressiblen Grenzschicht zurückgeführt wird. Sowohl für inkompressible als auch für kompressible Strömung wird das neue Näherungsverfahren mit exakten Lösungen verglichen, wobei gute Übereinstimmung erhalten wird.

H. Schlichting.

Schuh, H.: Ein neues Verfahren zum Berechnen des Wärmeüberganges in ebenen und rotationssymmetrischen laminaren Grenzschichten bei konstanter und veränderlicher Wandtemperatur. *Forsch. Gebiete Ingenieurwes.* 20, 37—47 (1954).

Das Verfahren beruht auf dem Energieintegralsatz. Die Stoffwerte werden konstant vorausgesetzt; Reibungs- und Kompressionswärme werden vernachlässigt. Geschwindigkeits- und Temperaturprofile werden den exakten Lösungen für symmetrisch umströmte Keilkörper entnommen. Durch Einführung passender Variabler wird das Problem auf eine Differentialgleichung vom Typ $(d/dx)[F(x)p^h] = p^j H(x)$ (h, j konstante Exponenten) für $p(x)$ transformiert, die sich exakt lösen läßt. Die erhaltene Lösung ermöglicht dann einen Iterationsformalismus mit meist rascher Konvergenz. Beispielergebnisse ergeben im Fall konstanter Wandtemperatur gute Übereinstimmung mit anderen Verfahren und Meßergebnissen; im Fall konstanten Wärme-flusses an der Wand zeigen sich stärkere Abweichungen vom Experiment. *W. Szablowski.*

Merk, H. J. and J. A. Prins: Thermal convection in laminar boundary layers. II, III. *App. Sci. Research, A* 4, 195—206, 207—221 (1954).

Weiterbehandlung des dies. Zbl. 51, 417 besprochenen Problems durch Verbesserung einer schon von Squire sowie Eckert (E. Eckert, Einführung in den

Wärme- und Stoffaustausch, Berlin 1949) angewandten Iterationsmethode und Vergleich mit bereits bekannten Näherungslösungen von Schmidt und Beckmann, Herrmann, Schell, Sugawara und Michiyoshi, der exakten Lösung von Schuh für die ebene Platte sowie mit Experimenten von Jodlbauer, Jakob und Linke. Behandelte Körperformen: Die ebene Platte, der vertikale Kegel, der horizontale Zylinder, die Kugel. *F. W. Riegels.*

Merk, H. J.: The influence of melting and anomalous expansion on the thermal convection in laminar boundary layers. Appl. sci. Research, A **4**, 435–452 (1954).

Behandelt wird eine Anwendung der Grenzschichttheorie in der Gestalt des vom Verf. gemeinsam mit J. A. Prins (vorsteh. Referat) entwickelten Iterationsverfahrens für die natürliche Strömung entlang einer warmen Körperwand auf das Problem eines an seiner Oberfläche schmelzenden festen Körpers, wobei die Oberflächentemperatur gleich der Schmelztemperatur angenommen ist. Die Theorie wird weiter ausgedehnt auf den Fall, daß es sich um Eis als schmelzenden Körper handelt, wobei der Einfluß der thermischen Anomalie bei 4°C untersucht wird. Die Ergebnisse sind in Form von Diagrammen dargestellt, die die lokale Nusselt-Zahl im Verhältnis zur Nusselt-Zahl des nicht schmelzenden Körpers angeben. *F. W. Riegels.*

Levy, Solomon: Effect of large temperature changes (including viscous heating) upon laminar boundary layers with variable freestream velocity. J. aeronaut. Sci. **21**, 459–474 (1954).

Schlichting, H. and E. Truckenbrodt: The flow on a rotating body of revolution in axial flow. J. aeronaut. Sci. **21**, 417–418 (1954).

The flow in the boundary layer of a rotating body of revolution including the rotating disc in an axial main flow has been calculated by the authors both for laminar and turbulent incompressible flow in several German publications. A summary of the results is given here.

Tchen, Chan-Mou: Transport processes as foundations of the Heisenberg and Obukhoff theories of turbulence. Phys. Review, II. Ser. **93**, 4–14 (1954).

Nach Anwendung von Fourier-Transformationen auf die Navier-Stokesschen Gleichungen für die Schwankungsgeschwindigkeiten eines homogenen isotropen Geschwindigkeitsfeldes versucht Verf. zu zeigen und zu erklären, warum die Heisenberg-Theorie mehr auf den Bereich größerer Wellenzahlen (bis zum k^{-7} -Gesetz) hin ausgedehnt werden kann, während die Obukhoffsche dies nicht gestattet, aber den Bereich kleinerer Wellenzahlen etwas weiter umfaßt. – Die Ergebnisse werden angewandt auf die Bestimmung des Spektrums in einer Scherströmung, wobei eine Beziehung zum Boussinesq-Prandtlischen Ansatz hergestellt wird und mit Versuchsergebnissen (anderer Autoren) verglichen wird. *F. W. Riegels.*

Hunt, J. N.: The turbulent transport of suspended sediment in open channels. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **224**, 322–335 (1954).

Nach einer Darstellung und Kritik der Theorie von Rouse [Trans. Amer. Soc. Civ. Engrs. **102**, 463], in der das endliche Volumen der Teilchen nicht berücksichtigt und die Schubspannung τ teils konstant, teils linear abhängig vom Wandabstand y angenommen wird, leitet Verf. eine sehr allgemeine Gleichung für die turbulente Diffusion her, welche sich für den Fall kleiner Teilchen schwacher Konzentration vereinfacht zu (1) $\epsilon \, dc/dy + (1-c) \, c \, w = 0$ (c = Konzentration, w = Sinkgeschwindigkeit). Mit dem im wesentlichen auf v. Karman zurückgehenden Geschwindigkeitsgesetz

$$(U_m - U)/(g h S)^{1/2} = -(1/k) \{ (1 - y/h)^{1/2} + B \ln [(B - (1 - y/h)^{1/2})/B] \}$$

(U_m = Maximalgeschwindigkeit, h = Kanaltiefe, S = Energiegradient der Wassers, k und B empirische Konstante) und dem von Boussinesq stammenden Ansatz $\epsilon = \tau (q \, dU/dy)^{-1} = \tau_0 (1 - y/h) (q \, dU/dy)^{-1}$ ergibt sich für (1) die Lösung

$$c(1-c)^{-1} (1 - c_a) \, c_a^{-1} = \{ (1 - y/h)^{1/2} (1 - a/h)^{-1/2} [B - (1 - a/h)^{1/2}] / [B - (1 - y/h)^{1/2}] \},$$

$q = w/k \, B (g h S)^{1/2}$ (c_a = Konzentration im Wandabstand a), die bei geeigneter Wahl von k und B besser mit Meßergebnissen von Vanoni übereinstimmt als die Rousesche.

J. Weissinger.

Proudman, I. and W. H. Reid: On the decay of a normally distributed and homogeneous turbulent velocity field. *Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser A* **247**, 163—189 (1954).

Les AA. étudient un écoulement turbulent homogène dans lequel la loi de probabilité des composantes de la vitesse en trois points est normale, au moins en ce qui concerne les moments d'ordre 2, 3, 4. Dans la première partie, ils définissent les divers tenseurs de corrélation et tenseurs spectraux qui seront utilisés dans la suite. Ces tenseurs obéissent à des équations dynamiques qui se simplifient grâce à l'hypothèse de normalité, suivant laquelle les moments d'ordre 4 en trois points s'expriment à l'aide des moments d'ordre 2 en deux points. Dans le cas de l'isotropie, ces corrélations triples ne dépendent plus que de deux fonctions indépendantes. La deuxième partie est consacrée à la décroissance de la turbulence isotrope aux grands nombres de Reynolds. Il est alors possible de calculer en fonction du temps le tourbillon quadratique moyen $\overline{\omega^2}$. Après une longue durée t , $\overline{\omega^2}$ décroît comme t^{-2} , conformément à la théorie de la similitude locale de Kolmogoroff. En donnant a priori au spectre d'énergie la forme analytique $E(k) = E_0 x^4 e^{-x^2}$, $x = k/k_0$, il est possible de discuter la structure du transfert d'énergie dans le spectre et de préciser la forme des corrélations triples. La troisième partie est relative au comportement du spectre l'énergie aux petits nombres d'ondes. Dans le cas de la turbulence isotrope, des divergences notables apparaissent avec certaines conclusions antérieures de C. C. Lin et G. K. Batchelor. Moyennant des hypothèses raisonnables, on trouve que la fonction des corrélations triples $k(r)$ est, pour les grandes valeurs de la distance r , de l'ordre de r^{-4} , et que $E(k)$ est de la forme $E(k) = C_1(t)k^4 + O(k^5)$, $C_1(t)$ dépendant effectivement du temps. Par suite, l'intégrale de Loitsiansky n'est pas un invariant et les grands tourbillons ne se conservent pas au cours de la décroissance. Le cas de la turbulence homogène non isotrope est enfin rapidement examiné. *J. Bass.*

Frost, Richard C.: Supersonic flap lift effectiveness for some general plan forms. *J. aeronaut. Sci.* **21**, 609—614, 620 (1954).

Roberts, Richard C. and James D. Riley: A guide to the use of the M. I. T. cone tables. *J. aeronaut. Sci.* **21**, 336—342 (1954).

Der zweite und dritte Band der M. I. T.-Tafeln für die Überschallströmung an schräg gestellten Kreiskegeln hat einerseits wegen der unbequemen Koordinatenwahl Kritik gefunden, andererseits auch, weil die theoretischen Grundlagen dieser Tafeln (nach einem Einwand von Ferri) in der Nähe der Kegelfläche nicht mehr gültig sind. Dem ersten Einwand wird durch eine Koordinatentransformation entsprochen, zu der Umrechnungsformeln sowohl für die erste als auch für die zweite Näherung angegeben werden. Der theoretisch an sich berechtigte Einwand von Ferri, daß nach der Stonesschen Theorie die Entropie auf der Kegelfläche nicht konstant ist, hat für die numerische Berechnung der Druckverteilung keine merkliche Bedeutung, wie auch ein Vergleich zwischen gerechneten und gemessenen Druckverteilungen bei Schräganblasung unter Winkeln bis zu 14° zeigt. Verf. weisen noch auf einen systematischen Fehler bei der Berechnung des zweiten Bandes der Kegeltafeln hin und geben eine Korrekturformel an. Abschließend wird eine Rechenanweisung zusammengestellt, um mit Hilfe der Tafeln und der angegebenen Umrechnungsformeln das Strömungsfeld auf der Kegeloberfläche, zwischen der Oberfläche und der Stoßfront, sowie an der Stoßfläche zu berechnen. *W. Wuest.*

Lin, C. C.: On a perturbation theory based on the method of characteristics. *J. Math. Physics* **33**, 117—134 (1954).

Es wird eine Störungstheorie der stationären, ebenen, isentropischen Überschallströmung entwickelt, bei der die charakteristischen Parameter konsequent als unabhängige Variable benutzt werden. Dadurch werden manche, bei früheren Autoren aufgetretenen Schwierigkeiten vermieden. Als Beispiele werden die Überlagerung zweier einfacher Wellen und die Reflexion einer einfachen Welle an einer festen Wand und an einer freien Grenze diskutiert und die Wellenlänge eines ebenen Überschallstrahles berechnet. Letztere ergibt sich in guter Übereinstimmung mit der Erfahrung. *C. Heinz.*

Miles, John W.: Linearization of the equations of non-steady flow in a compressible fluid. *J. Math. Physics* **33**, 135—143 (1954).

Es werden verschiedene Systeme von hinreichenden Linearisierungsbedingungen für die Überschallströmung um flache Körper angegeben. Dabei wird auch die Annäherung an die Schallgeschwindigkeit mit in Betracht gezogen. Die angegebenen Bedingungen sind nicht durchweg notwendig. *C. Heinz.*

Tricomi, F. G.: Beispiel einer Strömung mit Durchgang durch die Schallgeschwindigkeit. *Monatsh. Math.* **58**, 160—171 (1954).

Die erste Hälfte dieser Note beschreibt die bekannte Transformation der gasdynamischen Grundgleichung in Schallnähe auf die sogen. Tricomi-Gleichung. Die Linearisierung wird dabei durch Übergang zur Geschwindigkeitsebene erreicht. In der zweiten Hälfte der Arbeit wird durch einen Separationsansatz in Polarkoordinaten (die in dem Strömungswinkel θ und dem geeignet verzerrten Geschwindigkeitsbetrag W zu bilden sind) für θ und W eine in Geschwindigkeitspotential und Stromfunktion (die ihrerseits dem schallnahen Ähnlichkeitsgesetz entsprechend zu verzerren sind) polynomiale Lösung gewonnen. Bei der Rücktransformation in die Strömungsebene erweist sie sich als eine Strömung durch den Hals einer geeigneten Lavaldüse mit Schalldurchgang vom Meyerschen Typ. — Ref. erlaubt sich zu bemerken, daß dies Strömungsbeispiel schon als spezieller Sonderfall seiner „parabolischen“ Näherungstheorie des Schalldurchgangs von ihm (dies. Zbl. 36, 118) gegeben und sowohl mathematisch als auch physikalisch eingehend diskutiert wurde. Die die Strömung beschreibenden Formeln (17) des Verf. sind nichts anderes als die Formeln (4.12) des Ref., wenn man die verschiedenen gewählten Normierungen beachtet. [Man beachte auch den Druckfehler ($k - 1$) 6 statt des richtigen und in Gl. (4.12) und in allen folgenden benutzten ($k - 1$) 2 in der 1. Formel (4.8)].

H. Behrbohm.

Tricomi, Francesco G.: Stranezze del „Tricomi-gas“. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 16, 423—426 (1954).

Nello studio del moto bidimensionale di un gas compressibile nelle vicinanze della velocità del suono u , la funzione di corrente ψ soddisfa l'equazione di tipo misto (1) $A(w)\psi_{\theta\theta} + \psi_{ww} = 0$, dove θ è l'angolo che la velocità forma con una direzione fissa, w è legata alla velocità

scalare v dalla $w = - \int_{v_c}^v \frac{\rho}{\rho_0} \frac{dr}{r}$ ($v_c = u$ velocità critica, ρ densità del gas, $\rho = \rho_0$ per $v = 0$)

e $A(w) = (\rho_0/\rho)^2 (1 - M^2)$ ($M = v/u$ è il numero di Mach). La (1) coincide coll'equazione di Tricomi (2) $w\psi_{\theta\theta} + \psi_{ww} = 0$ solo approssimativamente nell'intorno di $M = 1$. Si può ottenere rigorosamente $A(w) = w$, se si sostituisce al gas effettivo, per cui vale l'equazione di stato adiabatica, un gas fittizio (detto da alcuni autori americani Tricomi-gas), per il quale vale una equazione di stato opportuna, che nelle vicinanze di $M = 1$ non differisce molto dall'equazione adiabatica. L'A. mostra che tale gas fittizio ha un comportamento molto strano, tranne che nelle vicinanze di $M = 1$. Esso non ammette una velocità limite finita; al crescere di v oltre la velocità del suono, il numero di Mach M cresce fino a raggiungere un massimo (1,14 circa) poi decresce ed è $\lim_{v \rightarrow \infty} M = 1$.

M. Cinquini-Cibrario.

Thomas, T. Y.: Sonic point on supersonic airfoils. Proc. nat. Acad. Sci. USA 40, 76—83 (1954).

Das Resultat dieser Arbeit ist in einer theoretisch ermittelten Kurve enthalten, welche als Funktion der Anströmungsmachzahl $M = 1$ die Neigung der Kontur eines glatten Profils in demjenigen Punkt P seiner Oberfläche angibt, in dem für den Fall der abgelösten Kopfwellen die Schallgeschwindigkeit erreicht wird. Auf einem Profil mit stumpfer Nase und mit monoton abnehmender Konturneigung kann damit bei Überschallanströmung der Schallpunkt ermittelt werden. — Die Herleitung dieses Resultats benützt reibungsfreie Strömung ohne Wärmeleitvermögen und geht davon aus, daß die Neigung ω der Stromlinien längs der Schalllinie als Funktion der Entropie S gegeben und daß bei Annahme nicht zu starker Entropievariation im Feld hinter dem Stoß approximativ (1) $\omega_P = \omega_Q + (d\omega/dS)_Q (S_0 - S_Q)$ gesetzt werden kann. Dabei ist Q derjenige Punkt der Stoßfront, in dem auf der dem stromabwärtigen Ufer Schallgeschwindigkeit angenommen wird. Die Indizes P und Q bedeuten Werte der indizierten Größen in diesen Punkten. S_0 ist die Entropie längs der Verzweigungsstromlinie, d. h. auf der Kontur. Mittels eines umfangreichen Formelapparates, der z. T. auch Ergebnisse früherer Arbeiten des Verf. benötigt (dies. Zbl. 35, 418, 421; 38, 120), werden die in (1) rechts stehenden Größen ω_Q , $(d\omega/dS)_Q$ und $S_0 - S_Q$ durch M ausgedrückt. Die Numerik wurde auf dem SWAC des Institute for Numerical Analysis, Los Angeles, ausgeführt.

H. Behrbohm.

Pai, Shih-I.: On the stability of a vortex sheet in an inviscid compressible fluid. J. aeronaut. Sci. 21, 325—328 (1954).

Es wird die Stabilität einer Wirbelstraße in einer reibungslosen kompressiblen Strömung gegen zweidimensionale kleine Störungen untersucht. Es wurde ge-

funden, daß nur solche neutralen Störungen, die sich relativ zur lokalen Strömungsgeschwindigkeit mit Überschallgeschwindigkeit fortpflanzen (sog. „Überschallstörungen“) ein kontinuierliches Spektrum von Eigenwerten besitzen. Für alle anderen (angefachten oder gedämpften) Überschallstörungen werden diskrete Eigenwerte erhalten, ebenso wie für Unterschall- oder Schallstörungen. *H. Schlichting.*

Walsh, J. G. Zartarian and H. M. Voss: Generalized aerodynamic forces on the delta wing with supersonic leading edges. *J. aeronaut. Sci.* **21**, 739—748 (1954).

Es wird die an einem dünnen Flügel geleistete virtuelle Arbeit („generalisierte Kraft“) infolge einer durch aerodynamische Kräfte bewirkten gedachten virtuellen Verschiebung einer generalisierten Koordinate studiert, d. h. ein Ausdruck der Form $(1) Q_{ij} = l^2 \iint_{(A)} \Delta p_i(x, y) f_j(x, y) dx dy$, wo Δp_i der lokale resultierende Druck infolge der Deformationsform $f_i(x, y)$, l die Flügeltiefe und $f_i(x, y)$ diejenige Deformationsform ist, für welche die virtuelle Arbeit berechnet werden soll. Nicht nur in der Theorie der elastischen Verformungen sondern auch in der instationären Flattertheorie wird man auf solche Ausdrücke (1) geführt, wenn man die gesamte Flatteramplitude in die Amplituden $q_i(x, y, t)$ der den vorhandenen Freiheitsgraden entsprechenden einzelnen Schwingungsformen additiv zerlegt und den Ansatz $q_i(x, y, t) = q_i(t) f_i(x, y)$ macht (x = Tiefen-, y = Spannweitenkoordinate, t = Zeit). Der Flügel dreieckigen Grundrisses werde von einer Überschallströmung angeblasen, alle seine Kanten seien Überschallkanten. Die Deformationen werden als so klein angenommen, daß die linearisierte Tragflächentheorie angewandt werden kann. Unter der Bezeichnung „Streifentheorie“ versteht man, daß jeder schmale Parallelstreifen in Tiefenrichtung aerodynamisch als Teil eines zweidimensionalen ungeföhlten Flügels angesehen wird. Durch elementare Betrachtungen wird gezeigt, daß die Streifentheorie immer dann korrekte Resultate gibt für die generalisierte Gesamtkraft Q_{ij} , wenn bei beliebigem i -ter Deformationsform die in x, y reguläre j -te Deformationsform, für welche die generalisierte Kraft berechnet werden soll, zwar in x beliebig aber in y von höchstens erstem Grade ist. Die Streifentheorie wird angewandt auf die harmonische Bewegung des Dreiecksflügels mit Schwingungsformen, die polynomial in x und y sind. Für solche Bewegungen kann mit Hilfe der Theorie der Umkehrströmungen die generalisierte Kraft auch exakt berechnet werden. Auf diese Weise wird das oben genannte elementar gewonnene Resultat noch einmal analytisch bewiesen. Zugleich ergibt sich dabei dann ein analytischer Ausdruck für den Fehler, den man macht, wenn man die Streifentheorie auch bei in Spannweitenrichtung nicht linearen Schwingungsformen anwendet. Für einige Fälle harmonischer Bewegungen (bis zum 4. Grad in y) eines um 45° geföhlten Dreiecksflügels bei Machzahl $M = 1.2$ wird dieser Fehler für Q_{ij} berechnet. Er bleibt für die praktische Anwendung in tragbaren Grenzen. *H. Behrbohm.*

Asaka, Saburō: On the velocity distribution over the surface of a symmetrical aerofoil at high speeds. *I. Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ.* **4**, 213—226 (1954).

Verf. bespricht eine Erwähnung zahlreicher bis 1930 zurückreichender Arbeiten von deutschen, amerikanischen, englischen und russischen Autoren, eine spezielle, von Imai stammende Methode zur schrittweisen näherungsweise Berechnung der stationären zweidimensionalen kompressiblen Unterschall-Potentialströmung um dünne Körper und wendet die erste und zweite Näherung auf symmetrische Profile an. Die funktionentheoretischen Methoden zur Erlangung der Abbildungsfunktionen werden ausführlich dargestellt. Die Kompressibilitätseffekte werden in ihrer Abhängigkeit von der Profilform ebenso wie das Taylorsche Problem (Existenz und Stabilität von Schallströmungen) besprochen. Das Verfahren von Imai ist im wesentlichen eine Weiterführung der Prandtl'schen Linearisierungsmethode [*J. aeronaut. Research Inst. Tokyo*, Nr. 65, 14 (1930); Glauert, *Proc. roy. Soc. London, Ser. A* **118**, 113 (1928)] auf höhere Näherungen unter Verwendung anderer funktionentheoretischer Methoden. *F. Cap.*

Etkin, Bernard and Frank A. Woodward: Lift distribution on supersonic wings with subsonic leading edges and arbitrary angle of attack distribution. *J. aeronaut. Sci.* **21**, 783—785 (1954).

Brown, W. F. and T. Y. Thomas: Rear shock and pressure on supersonic airfoils. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **40**, 83—87 (1954).

Es wird ein stetig gekrümmtes Profil betrachtet, längs dessen die Neigung ω eine monoton abnehmende Funktion der Bogenlänge ist. An der spitzen Nase soll die bei Überschallströmung sich einstellende Kopfwellen anliegen. Reibungseinflüsse, Wärmeleitvermögen und Strömungsablösung bleiben außer Betracht, so daß auch die Schwanzwelle an der Hinterkante anliegt. Ferner wird von der Variation der Entropie von Stromlinie zu Stromlinie abgesehen, so daß der Druck p lediglich Funktion $p(\omega)$ von ω wird. Die Isoklinen $\omega = \text{const}$ stellen eine (1,1)-Korrespondenz zwischen den Punkten der Kopfwellen und den Punkten des Profilvorderteils (von Nase bis zu $\omega = 0$ auf dem Profil) her. In entsprechenden Punkten herrscht dann der gleiche Druck, der somit aus der bekannten Druckbeziehung $p = p(\omega)$ an der Kopfwellen auf das Profilvorderteil

übertragen werden kann. Diese Approximation war von den Verff. (dies. Zbl. 55 106) angegeben worden. — Eine analoge (1,1)-Korrespondenz zwischen den Punkten der Schwanzwelle und den Punkten des Profilhinterteils und daher auch eine entsprechende Druckformel für das Profilhinterteil wird in dieser Note angegeben. Dabei wird die Annahme gemacht, daß stromab der Schwanzwelle der Anströmungszustand herrscht. Daß damit dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik widersprochen wird, soll nach Ansicht der Verff. nicht viel auf die Druckverteilung ausmachen.

H. Behrbohm.

Shapiro, A. H. and S. J. Kline: On the thickness of normal shock waves in a perfect gas. *J. appl. Mech.* 21, 185—192 (1954).

Die Stoßwellendicke liegt nach früheren Untersuchungen von R. Becker (1922) u. a. in der Größenordnung einiger freien Weglängen. Wenn man zur Untersuchung der Struktur der Stoßwelle trotzdem an der Kontinuumsvorstellung festhält, lohnt offenbar der Rechenaufwand einer „exakten“ Lösung nicht. Verf. haben daher ein Näherungsverfahren ähnlich dem „Pohlhausen-Verfahren“ bei der Berechnung von Grenzschichten entwickelt, bei dem für die Geschwindigkeitsverteilung in der Stoßwelle eine plausible Annahme gemacht wird und die Bewegungs- und Energiegleichung nur als Integralbedingung erfüllt werden. Es werden so explizite Formeln für die Beziehungen zwischen der mit der Stoßwellendicke gebildeten Reynoldsschen Zahl, der Prandtlschen Zahl, dem Verhältnis der spezifischen Wärmen und der Machschen Zahl vor dem Stoß gewonnen. Die Änderung der Zähigkeit mit der Temperatur wird dabei berücksichtigt. Die Ergebnisse der Näherungsrechnung sind in guter Übereinstimmung mit den bisher bekannten Lösungen für Sonderfälle ($Pr = 0,75$; Zähigkeit und Wärmeleitfähigkeit konstant; schwacher Stoß; nur Zähigkeit berücksichtigt, aber Wärmeleitfähigkeit vernachlässigt). Eine Übereinstimmung liegt ferner vor mit den auf einer Integriermaschine von Meyerhoff (1950) berechneten Lösungen für verschiedene Prandtlsche Zahlen. Die Ergebnisse werden auch als Verhältnisse der Stoßwellendicke zur mittleren freien Weglänge ausgedrückt, wobei sich zeigt, daß die Kontinuumsvorstellung etwa bis zu Anströmmachzahlen $Ma = 1,5$ ausreicht, während für höhere Geschwindigkeiten durch diese Annahme nur eine Größenordnung vermittelt werden kann.

W. Wuest.

Weizsäcker, C. F. v.: Genäherte Darstellung starker instationärer Stoßwellen durch Homologie-Lösungen. *Z. Naturforsch.* 9a, 269—275 (1954).

Die Grundgleichungen für die eindimensionale instationäre Strömung eines idealen Gases werden durch einen Ansatz nach Guderley [*Luftf.-Forsch.* 19, 302 (1942)] auf gewöhnliche Differentialgleichungen mit der unabhängigen Veränderlichen $x t^{k-1}$ reduziert. Unter den möglichen Lösungen („Homologie-Lösungen“, in USA „progressing waves“ genannt) werden nur solche mit einer starken Stoßwelle betrachtet. Jedem reellen k entspricht eine Lösung, die sich hinter der Stoßfront ein Stück weit regulär verhält. Durch zwei kritische Werte $k = 0$ und $k = 1/3$ werden drei k -Bereiche mit qualitativ verschiedenen Lösungstypen abgegrenzt, aus denen je ein Beispiel graphisch angegeben ist. Physikalisch erscheint auch $k = 1$ als kritischer Wert. Jede Lösung ist nur gebietsweise (oder näherungsweise) realisierbar und muß „heterolog“ fortgesetzt werden. — Bei weitgehend beliebiger Anfangsbedingung nähert sich die strenge Lösung für $t \rightarrow \infty$ in der Nähe der Stoßfront asymptotisch einer Homologielösung mit $k \approx 0,39$ an. — Z. T. sind die noch nicht veröffentlichten Ergebnisse verschiedener Mitarbeiter referiert.

F. Wecken.

Berry, F. J. and M. Holt: The initial propagation of spherical blast from certain explosives. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* 224, 236—251 (1954).

Theoretische Untersuchung über die Stoßwellenentstehung bei der Detonation einer Sprengstoffkugel, die im Mittelpunkt gezündet wurde. Die unabhängigen Veränderlichen r, t sowie die abhängigen p, u, a sind dimensionslos gemacht. Bei $r = t = 1$ ist die Detonation beendet, und es beginnt die Luftstoßwelle sowie die zweite, in den Schwaden laufende Stoßwelle. Für die Umgebung dieses Punktes werden Reihenentwicklungen der Form (1) $u = u_0(\theta) + u_1(\theta)\xi + u_2(\theta)\xi^2 + \dots$ benutzt, wobei $r = 1 - \xi^2 \sin \theta$, $t = 1 - \xi^2 \cos \theta$ ist. — Voraussetzungen und Methoden sind weitgehend dieselben wie bei Ref. [*Lab. Rech. St. Louis, Rapp.* 8 50 (1950); dies. Zbl. 37, 277], jedoch werden einfachere Zustandsgleichungen für Schwaden und Luft verwendet. Die Ergebnisse des Ref. werden bestätigt und hinsichtlich der zweiten ξ -Näherung sowie der zweiten Stoßwelle verschärft. Bei der singulären Charakteristik C , aus der sich alsbald die zweite Stoßwelle entwickelt, versagt der Ansatz (1). Hier findet ein auf Lighthill zurückgehender Kunstgriff Anwendung: anstatt θ wird eine auf C konstante Hilfskoordinate z eingeführt. Jetzt sind exakte Aussagen bis zur Ordnung ξ^2 möglich, insbesondere über die Intensität der zweiten Stoßwelle. — In einem Zahlenbeispiel ist die Detonationsgeschwindigkeit mit 8 km/s, der Detonationsdruck mit 240 000 atm angenommen.

F. Wecken.

Lidov, M. L.: Exakte Lösungen der Gleichungen der eindimensionalen, instationären Bewegungen eines Gases unter Berücksichtigung der Newtonschen Gravitationskräfte. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* 97, 409—410 (1954) [Russisch].

Kožina, N. N.: Über eine partikuläre exakte Lösung der Gleichungen der instationären eindimensionalen Bewegung eines Gases. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 97, 407 (1954) [Russisch].

Munakata, Ken-iti: On the interaction of a plane shock wave with a wedge. J. aeronaut. Sci. 21, 501—504 (1954).

Das Auftreffen einer ebenen Stoßwelle auf eine Keilfläche ist bisher nur für sehr kleine Keilwinkel oder für einen Keilwinkel nahe π theoretisch untersucht worden. Verf. versucht das allgemeine Problem mit beliebigem Keilwinkel und starkem Stoß dadurch näherungsweise zu lösen, daß die Unterschiede zwischen der Geschwindigkeit und dem Druck an irgendeiner Stelle gegenüber der Geschwindigkeit und dem Druck an einer vorgegebenen mit dem Stoß mitwandernden Stelle als klein von erster Ordnung im Vergleich zu diesen Größen selbst angenommen werden. Auf die Zulässigkeit dieser Näherungsannahme im vorliegenden Fall wird nicht eingegangen. Die Lösungen der linearisierten Gleichungen lassen sich durch hypergeometrische Funktionen ausdrücken. Es wird gezeigt, daß eine Singularität mit rascher Expansion an der Einflußgrenze der Keilkante vorhanden ist, die auch durch frühere Messungen von D. R. White (1951) bestätigt ist. W. Wuest.

Fung, Y. C.: The static stability of a two-dimensional curved panel in a supersonic flow, with an application to panel flutter. J. aeronaut. Sci. 21, 556—565 (1954).

Eine in Spannweitenrichtung unendlich lange, dünne Platte konstanter Tiefe, konstanter Dicke und aus elastischem Material, sei längs der Vorder- und Hinterkante an zwei starren Trägern momentenfrei angelenkt und (z. B. durch gleichmäßiges Aufheizen) mit einer in Tiefenrichtung wirkenden Spannung H versehen. Von einem Temperaturgradienten in Dickenrichtung werde zunächst abgesehen. Die Platte sei ferner auf einer Seite einer Überschallparallelanströmung senkrecht zur Vorderkante (ohne Anstellwinkel in dieser ersten Analyse) ausgesetzt. Wird bei wachsender Aufheizung die kritische Eulerspannung S erreicht; so beult die Platte ohne Anströmung sinusförmig aus. Welches ist die statische Gleichgewichtskonfiguration der Platte unter H und der aerodynamischen Druckverteilung? — Für die durch $H = S$ bewirkte Auslenkung der Plattenmittellinie wird ein Fourierreihenansatz (sinus-Reihe wegen der Gelenklenkung) gemacht, das gleiche auch für ihre durch die zusätzliche Tangentialspannung (infolge aerodynamischer Kräfte bewirkte Auslenkung. Diese Auslenkungen werden als so klein angenommen, daß Ackeret's linearisierte Theorie der aerodynamischen Druckverteilung angewendet werden kann. Die Kármánsche Differentialgleichung vierter Ordnung für solche Auslenkungen und die sie bewirkenden Kräfte führt dann durch Koeffizientenvergleich in den Reihen zu einem System von unendlich vielen simultanen Gleichgewichtsbedingungen, und die Aufgabe ist, das Verhalten der Amplituden der einzelnen Harmonischen der resultierenden Auslenkung in Abhängigkeit vom Staudruck der Anströmung (und von den elastischen Eigenschaften der Platte) zu studieren. Wird ein Temperaturgradient in Dickenrichtung berücksichtigt, so beult die Platte auch ohne Erreichen der Eulerspannung S aus. Ohne auf den Mechanismus der Wärmespannungsverteilung näher einzugehen (die Form der anfänglichen Auslenkung und der Anfangsspannung wird als gegeben hingenommen), wird auch die anfänglich ausgebeulte Platte unterhalb der kritischen Eulerspannung untersucht. Es ergibt sich, daß eine kritische Überschallgeschwindigkeit existiert, oberhalb derer es für eine einmal ausgelenkte Platte keine statische Gleichgewichtskonfiguration mehr gibt. Der ihr entsprechende Staudruck kann als eine obere Schranke des Staudrucks für Blechfeldflattern angesehen werden und wäre als solcher technisch uninteressant, wenn nicht überraschenderweise unter gewissen Bedingungen, die praktisch keinesfalls ausgeschlossen zu sein scheinen, dieser kritische Staudruck alarmierend klein wäre. H. Behrbohm.

Schuh, H.: On the calculation of temperature distribution and thermal stresses in parts of aircraft structures at supersonic speeds. J. aeronaut. Sci. 21, 575—576 (1954).

Drucker, D. C. and E. T. Onat: On the concept of stability of inelastic systems. J. aeronaut. Sci. 21, 543—548, 565 (1954).

Pepping, R. A.: A theoretical investigation of the oscillating control surface frequency response technique of flight flutter testing. J. aeronaut. Sci. 21, 533—542 (1954).

Chaskind, M. D.: Über Wellenbewegungen einer schweren Flüssigkeit. Priklad. Mat. Mech. 18, 15—26 (1954) [Russisch].

Im ersten Teil wird eine Lösung des räumlichen Problems der Wellenbewegung einer schweren Flüssigkeit, die bei Schwingungen von Körpern oder bei pulsierenden Singularitäten ent-

steht, konstruiert. Das Geschwindigkeitspotential der Wellenbewegung drückt sich durch eine gewisse Funktionalkombination aus. Diese läßt sich im Falle pulsierender Singularitäten leicht bestimmen; für den Fall von horizontal und vertikal schwimmenden Platten kann sie mittels mathematischer Verfahren, die für eine unendliche Flüssigkeit ausgearbeitet worden sind, bestimmt werden. — Im zweiten Teil werden planparallele Wellen betrachtet, die von pulsierenden und sich bewegenden Singularitäten in einer schweren Flüssigkeit ausgestrahlt werden. Zur Untersuchung ebener Aufgaben der Wellentheorie hat M. V. Keldyš (dies. Zbl. 12, 302) eine Funktionalkombination eingeführt, mit deren Hilfe die von Singularitäten unter der Wasseroberfläche erregten Wellenströmungen sich leicht bestimmen lassen. Mit Hilfe dieser Kombination sind die Wellenströmungen, die sich bei unter Wasser gelegenen, pulsierenden festen Singularitäten bilden, untersucht worden [vgl. N. E. Kočín, dies. Zbl. 22, 87, und Verh. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otdel. techn. Nauk, Nr. 11—12 (1942)]. Dort wurden entweder zwei Funktionen eingeführt, oder eine von zwei imaginären Einheiten $i = \sqrt{-1}$ und $j = \sqrt{-1}$, die aufeinander nicht operieren, abhängende Funktion. Hier wird dieses Hilfsmittel modifiziert und die Bestimmung der Wellenströmungen mittels einer einzigen Funktion, die nur eine imaginäre Einheit $i = \sqrt{-1}$ enthält, durchgeführt. Autoreferat.

Marnjanskij, I. A.: Die Beugung der Wellen um eine unter Wasser befindliche, vertikale Platte. Priklad. Mat. Mech. 18, 233—238 (1954) [Russisch].

Es wird die ebene Aufgabe der Ausbreitung fortschreitender Wellen über die Oberfläche einer schweren Flüssigkeit, in der sich eine vertikale, nach unten unbeschränkt ausgedehnte Platte befindet, untersucht. Es wird der Effekt der Beugung der Wellen über die ganze freie Oberfläche hin geklärt und die Druckverteilung längs der Platte in Abhängigkeit von den Parametern der Wellen und von der Eintauchtiefe der oberen Kante der Platte bestimmt. Die Lösung erfolgt mit derselben Methode wie in einer Arbeit von Chaskind [Ingeniornyj Sbornik 4, Nr. 2 (1948)]. Autoreferat.

Brillouet, Georges: Ondes liquides de gravité en présence d'une falaise verticale. C. r. Acad. Sci., Paris 239, 860—862 (1954).

Für das Geschwindigkeitspotential der schweren Flüssigkeitwellen in der Nähe einer senkrechten Steilküste ergeben sich nach der linearen Theorie zwei Gruppen von Lösungen, von denen eine an der Schnittkante von Wasseroberfläche und Steilwand regulär, die andere singular ist, wie schon J. J. Stoker (dies. Zbl. 29, 179, insbesondere S. 10) gezeigt hat. J. Pretsch.

Kahane, A., W. R. Warren, W. C. Griffith and A. A. Marino: A theoretical and experimental study of finite amplitude wave interactions with channels of varying area. J. aeronaut. Sci. 21, 505—524, 565 (1954).

Serini, Rocco: Risultante e momento risultante delle azioni capillari su un pezzo di superficie. Bull. Un. mat. Ital., III. Ser. 9, 235—236 (1954).

Mchitarjan, A. M.: Über die Filtration von Wasser durch einen Erddamm mit Abschirmung und undurchlässiger Abdeckung auf durchlässiger Grundlage mit geneigter Wassersperre. Ukrain. mat. Žurn. 6, 448—456 (1954) [Russisch].

Boreli, Mladen: Sur une solution rigoureuse d'un problème d'écoulement plan en milieu poreux avec barrage souterrain. C. r. Acad. Sci., Paris 239, 1020—1021 (1954).

Scheidegger, Adrian E.: Statistical hydrodynamics in porous media. J. appl. Phys. 25, 994—1001 (1954).

Wärmelehre:

Fujita, Shigeichi: Criticism on the expressions of the second law of thermodynamics. Kumamoto J. Sci., Ser. A 1, Nr. 4, 31—39 (1954).

Verf. kritisiert die fehlerhafte Behandlung der thermodynamischen Gleichgewichtsbedingungen in einigen verbreiteten Lehrbüchern der theoretischen Physik. Die Fehler entstehen dadurch, daß in der Definition der inneren Energie: $dU = T dS - p dV - \sum X_i dx_i$ und dem ersten Hauptsatz $dU = d'Q + d'A + d'W$ die jeweils letzten Terme identifiziert werden, daneben aber der 2. Hauptsatz in der dem widersprechenden Form $T dS = d'Q$ (statt nur $= !$) benutzt wird. Insbesondere sind sämtliche thermodynamischen Potentiale eines einfachen Systems (mit zwei

Zustandsparametern) konstant, wenn irgend zwei Zustandsgrößen festgehalten werden. Die Formeln der kritisierten Verfasser stehen zu diesen Feststellungen in offensichtlichem Widerspruch. *F. Penzlin.*

Serini, Rocco: *Adiabaticità nel movimento dei gas perfetti.* Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 9, 241—243 (1954).

Beweis, daß bei der Bewegung idealer Gase unter Vernachlässigung der Wärmeleitung und der inneren Reibung für jedes mitbewegte Volumenelement die adiabatische Zustandsgleichung gilt. — Diese Tatsache folgt viel einfacher und allgemeiner aus der Thermodynamik der irreversiblen Prozesse. D. Ref. *J. Meixner.*

Salter, L.: *The Simon melting equation.* Philos. Mag., VII. Ser. 45, 369—378 (1954).

Simons Schmelzpunktsgleichung wird aus der Lindemannschen Schmelzpunktformel und der Zustandsgleichung von Grüneisen für den festen Zustand abgeleitet. *G. Leibfried.*

Verschaffelt, J. E.: *Sur la stabilité de l'équilibre chimique.* Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 40, 888—895 (1954).

Forster, H. K. and N. Zuber: *Growth of a vapor bubble in a superheated liquid.* J. appl. Phys. 25, 474—478 (1954).

Plesset, M. S. and S. A. Zwick: *The growth of vapor bubbles in superheated liquids.* J. appl. Phys. 25, 493—500 (1954).

Die beiden Arbeiten befassen sich mit dem gleichen Problem unter denselben Voraussetzungen, sie entstanden gleichzeitig und anscheinend unabhängig voneinander und liefern im wesentlichen dieselben Ergebnisse. Daher erscheint ein gemeinsames Referat angebracht. — Das Wachstum einer Dampfblase in einer überhitzten Flüssigkeit wird durch eine Integro-Differentialgleichung beschrieben. Bei ihrer Lösung sind zwei verschiedene Zeitabschnitte zu beachten: Im ersten (Größenordnung 10^{-4} sec.) spielen die Massenträgheit der Flüssigkeit, ihre Oberflächenspannung und der Dampfdruck eine wesentliche Rolle. Beim weiteren Wachstum treten diese hydrodynamischen Größen hinter das Wärmediffusionsproblem zurück. Es zeigt sich, daß in diesem zweiten, wichtigeren Zeitraum eine „asymptotische“ Lösung der Integrodifferentialgleichung existiert, die nicht mehr von den Anfangsbedingungen des ersten Zeitabschnitts abhängt. Forster und Zuber befassen sich besonders mit dem ersten Zeitabschnitt, ihre (auf einer Integrieranlage gewonnenen) Wachstumskurven schnellen, wie zu erwarten, nach einer langsamen Anfangszunahme steil in die Höhe, um anschließend wieder zu kleineren Steigungen überzugehen (Wirkung der Abkühlung durch die Verdampfungswärme). Die „asymptotischen“ Lösungen stimmen bei beiden Arbeiten gut untereinander und mit Versuchsergebnissen überein. Plesset und Zwick zeigen noch, daß die Vernachlässigung des Einflusses der Verdampfungswärme (Lösung von Rayleigh) ein vollständig abweichendes Resultat liefert. *K. Nickel.*

Morgenstern, Dietrich: *General existence and uniqueness proof for spatially homogeneous solutions of the Maxwell-Boltzmann equations in the case of Maxwellian molecules.* Proc. nat. Acad. Sci. USA 40, 719—721 (1954).

L'A. généralise un résultat de E. Wild (ce Zbl. 43, 437) relatif au problème mentionné dans le titre. Il construit par itération une solution valable pour tout t , et montre qu'elle est l'unique solution spatialement homogène. *Ch. Blanc.*

Morrey jr., Charles B.: *On the derivation of the equations of hydrodynamics from statistical mechanics.* Proc. nat. Acad. Sci. USA 40, 317—322 (1954).

Cette note est le résumé d'un mémoire plus détaillé qui doit paraître aux „Communications on pure and applied Mathematics“. L'A. y expose les principales idées, et indique sans démonstrations les principaux résultats qu'il a obtenus, en vue de déduire les équations des milieux continus de celles d'un système contenant un nombre fini de points, lorsque ce nombre augmente indéfiniment. Étant donné un système de N points de masses m_N , l'A. définit les distributions de masse, de quantité de mouvement (moment) et d'énergie. Deux points s'attirent avec une force qui dérive d'un potentiel $\Phi_N(r)$ fonction de leur distance r , et soumis à certaines conditions. Le passage à la limite s'opère en posant $m_N = D \sigma_N$, $m_N \Phi_N(r) = K \Phi(r \sigma_N)$, où σ_N tend vers 0 avec $1/N$. Il peut se faire soit par des transformations de Fourier, soit par la méthode de Gibbs. Les distributions de masse, moment, énergie sont remplacées par des densités, qui vérifient des équations analogues à celles de Born et Green. Un échangeement de variables permet de passer à la limite lorsque $N \rightarrow \infty$. On obtient un système infini d'équations dont on peut construire des solutions ayant la forme souhaitable. *J. Bass.*

Maravall Casesnoves, Dario: Theoretische Untersuchungen über die aleatorischen Funktionen der Mikrophysik. *Revista mat. Hisp.-Amer.*, IV. Ser. **14**, 118—137 (1954) [Spanisch].

Leigh-Dugmore, C. H.: Simplified particle-size calculations. *Nature* **174**, 567 (1954).

Ferrari, F. and C. C. Villi: A note on the generalized statistics. *Progress theor. Phys.* **11**, 328—329 (1954).

MacDonald, III, William M. and John M. Richardson: Approximate variational principle in quantum statistics. *Phys. Review*, II. Ser. **96**, 18—21 (1954).

Die Hartree-Fock'schen Gleichungen für von Null Grad verschiedene Temperaturen werden aus einem Variationsverfahren hergeleitet. *W. Brenig.*

Verschaffelt, J. E.: Sur la thermomécanique du courant électrique. *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci.*, V. Sér. **40**, 574—587 (1954).

Verschaffelt, J. E.: Sur les minima de production d'entropie et de dissipation d'énergie. *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci.*, V. Sér. **40**, 779—783 (1954).

Popoff, Kyrille: La thermodynamique des processus irréversibles et la théorie des phases. *C. r. Acad. Sci., Paris* **238**, 331—333 (1954).

Popoff, Kyrille, Emmanuel Dimitroff et Kyrille Dotcheff: Sur une propriété des intégrales d'un système d'équations différentielles de la thermodynamique des processus irréversibles. *C. R. Acad. Sci., Paris* **239**, 1361—1363 (1954).

Oldroyd, J. G.: Note on the hydrodynamic and thermodynamic pressures. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **226**, 57—58 (1954).

Mel, H. C.: Entropy production and the stationary state of chemical reactions. *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci.*, V. Sér. **40**, 834—845 (1954).

Der Prigoginesche Satz vom Minimum der Entropieerzeugung im stationären Zustand gilt zwar nur bei kleinen Abweichungen des stationären Zustandes vom Gleichgewicht. Für eine Klasse von nichtlinearen reaktionskinetischen Gesetzen wird jedoch gezeigt, daß die Entropieerzeugung in jedem Fall zunächst abnimmt, wenn nur der Ausgangszustand genügend weit vom stationären Zustand entfernt ist, unabhängig davon ob dieser in Gleichgewichtsnähe liegt oder nicht.

J. Meixner.

Hoppe, H.: Berechnung der Wärmeübertragung in Regeneratoren bei Kreuzstromtrieb. *Forsch. Gebiete Ingenieurwes.* **20**, 150—155 (1954).

O'Sullivan, D. G.: A transformation of solutions of diffusion equations valid for certain initial and boundary conditions. *Experientia* **10**, 455—456 (1954).

Elektrodynamik. Optik:

● **Maxwell, James Clerk:** A treatise on electricity and magnetism. Unabridged third edition. Two Vol. bound as one. New York: Dover Publications, Inc. 1954. XXXII, 506 p. u. XXIV, 500 p. 120 Fig. \$ 4,95.

Die vorliegende Ausgabe des berühmten Werkes von Maxwell stellt einen ungekürzten und korrigierten Abdruck der letzten Auflage dar. Es braucht nicht betont zu werden, welchen Wert dieses Werk auch heute noch für jeden Physiker besitzt. Gelegentlich ist es von großem Nutzen, dies oder jenes Kapitel von Neuem zu lesen. So weist nicht ohne Grund beispielsweise Geheimrat Sommerfeld in seinem Buch „Atombau und Spektrallinien“ (dies. Zbl. **22**, 182) auf das instruktive Kapitel über Kugelfunktionen hin, welches die klare und prägnante Formulierung Maxwells besonders schön zum Ausdruck bringt. Interessanterweise findet man aber für jedes Teilgebiet der Theorie der Elektrizität etwas Originelles und Anregendes. Aus diesen Gründen ist es nicht nur für jeden Studierenden, sondern auch für die bereits fertigen Physiker eine äußerst empfehlenswerte Lektüre.

P. Urban.

Szymański, Z.: Electrodynamics with higher derivatives as a particular case of electrodynamics with non-linear equations. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 2, 167—169 (1954).

Verf. gibt eine Verallgemeinerung der nichtlinearen Theorie von Infeld und Plebański (dies. Zbl. 51, 190) an, die als Spezialfall auch lineare Verallgemeinerungen der Maxwell'schen Theorie mit höheren Ableitungen enthält. *G. Höhler.*

Cade, R.: Contributions to the theory of electrostatic forces on immersed bodies. Proc. phys. Soc., Sect. B 67, 689—704 (1954).

Einleitend weist Verf. darauf hin, daß die 1951 von W. F. Brown [dies. Zbl. 42, 445; 44, 221; Reviews modern Phys. 25, 131 (1953)] entwickelte Theorie der mechanischen Wirkung in Dielektrika — abweichend von den älteren Theorien — das hydrostatische Gleichgewicht einer elektrischen Kräfte ausgesetzten Flüssigkeit berücksichtigt und eine Modifikation hydrostatischer Drucke ergibt, die als „sekundäre“ mechanische Wirkung zu betrachten ist. Die Dichte der Gesamtkraft ergibt sich aus einem Drucktensor $T_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + (S_{\mu\nu} - S_{\mu\nu}^*)$, $R_{\mu\nu} = (1/4\pi) [D_{\mu\nu} E_i + (1/2) \delta_{\mu\nu} E_i E_i]$ mit E_i — elektrische Feldstärke, $D_{\mu\nu}$ elektrische Verschiebung, $\delta_{\mu\nu}$ der zusätzliche Tensor, $S_{\mu\nu} = -p \delta_{\mu\nu}$ (in ruhender Flüssigkeit) die sekundäre Kraft, p eine durch die Gleichgewichtsbedingung der der ersten Kraft unterliegenden Flüssigkeit bestimmte skalare Größe. Verf. versucht eine Verbesserung der Brownschen Theorie durch die klassische Betrachtung der Vorgänge an der Grenze eines eingebetteten Körpers, indem er nicht — wie üblich — annimmt, daß der Druck der Flüssigkeit auf den eingebetteten Körper der gleiche ist wie der Druck auf die Flüssigkeit an der Stelle der Oberfläche des Körpers. Denn auch in der Grenzschicht in der Flüssigkeit ändert sich die Materie von der Flüssigkeit zum festen Körper. Wegen der abrupten Änderung der elektrischen und mechanischen Größen in der Grenzschicht werden dort keine Gleichgewichtsbedingungen vorliegen. Es wird eine dünne Übergangsschicht angenommen, innerhalb der sich gewisse Größen stark zwischen Flüssigkeit und festen Körper ändern. Den Grenzflächen entsprechend werden krummlinige Koordinaten x^μ (mit $\mu = 0, 1, 2$) eingeführt, derart, daß $x^0 = c$ bzw. $x^0 = c$ die Gleichungen der Oberflächen der Flüssigkeit bzw. des festen solid Körpers sind mit $c_1 = \text{const}$ und $c_2 = \text{const}$. Für die übrigen Koordinaten werden auf Grund plausibler Überlegungen gewisse Funktionen (Reihen) eingesetzt, die von Potenzen der Dicke Δ der Grenzschicht (Übergangsschicht) abhängen. Die Theorie wird für ein kontinuierliches sowie für ein diskontinuierliches Grenzpotential durchgeführt und zeigt, daß die viskosen Drucke Geschwindigkeitsfunktionen von vorherrschender Bedeutung sind. Diskontinuierliche Grenzpotentiale bedingen das Vorhandensein einer Grenzflächenverteilung von Dipolen. In diesem Falle werden die Brownschen Ergebnisse (wesentlich) modifiziert durch die Diskontinuität der Geschwindigkeit und des Druckes. — Verf. geht weiter auf einen Vergleich (der Ergebnisse) seiner Theorie und anderer Theorien ein. *J. Picht.*

Durand, Émile: Distributions superficielles de charges fixes et vecteur de Poynting dans un système de courants volumiques permanents. C. r. Acad. Sci., Paris 239, 1276—1278 (1954).

Jackson, J. L. and M. C. Yovits: Properties of the quantum statistical impedance. Phys. Review, II. Ser. 96, 15—16 (1954).

MacLean, William: Theory of strong electromagnetic waves in massive iron. J. appl. Phys. 25, 1267—1270 (1954).

Die Maxwell'schen Gleichungen werden für den Fall einer elektromagnetischen Welle streng gelöst, die in ein ferromagnetisches Medium eindringt. Das Medium soll einen Halbraum erfüllen und eine rechteckige Magnetisierungskurve besitzen. Verf. berechnet Eindringtiefe, Impedanz und den durch die Oberfläche des Ferromagnetikums tretenden Energiestrom. *G. Heber.*

Vilenskij, I. M.: Über den Einfluß des Magnetfeldes der Erde auf die Wechselwirkung von Radiowellen in der Ionosphäre. Žurn. eksper. teor. Fiz. 26, 42—56 (1954) [Russisch].

1. Ausgangspunkt ist die Boltzmannsche Gleichung für die Veränderung der statistischen Verteilung im Geschwindigkeitsraum f_0 . Für die Störung durch eine Radiowelle wird meist eine gerichtete Störungswirkung angesetzt. Als nullte Näherung dient die Maxwell'sche Verteilung f_{00} . Bei stärkerer Störung muß aber außer der gerichteten Zusatzfunktion f_1 auch eine ungerichtete f_{01} angesetzt werden. Den Fall der Wechselwirkung hat man, wenn neben einer starken Radiowelle ω_1 noch eine schwächere ω_2 auftritt. Es muß dann eine weitere gerichtete Zusatzfunktion f_2 eingeführt werden, die von der Welle ω_2 herrührt. Aus der Boltzmann-Gleichung folgt dann, daß f_2 drei Anteile enthält: einen unmodulierten und je einen mit ω_1 und ω_2 modulierten. Die

drei Anteile werden explizit (in einem Koordinatensystem, dessen z -Achse in Richtung des Erd-Magnetfeldes fällt) berechnet. Aus der gestörten Verteilungsfunktion wird ein Strom erhalten, der auf eine komplexe Leitfähigkeit schließen läßt. Setzt man andererseits die übliche Dispersionsformel der quasi-longitudinalen Näherung mit einer unbekannten „effektiven Stoßzahl“ ν_{eff} an, so kann letztere durch Vergleich mit dem Ausdruck für die Leitfähigkeit erhalten werden. Es ergibt sich, außer einem konstanten Term, ein mit ω_1 periodischer Zusatz-Term Δr . Für die E - und D -Schicht werden nur Stöße mit neutralen Molekülen herangezogen; ν_{eff} wird als klein gegen ω_1 , ω_2 und die Gyro-Kreis-Frequenz ω_H vorausgesetzt. Δr wird für folgende sechs Fälle berechnet (alle Abschätzungen mit ν_{eff} als Einheit): I. ω_1 , ω_2 und $(\omega_2 \pm 2\omega_1)$ fern von $\pm \omega_H$, II. ω_1 nahe ω_H , III. $(\omega_2 + 2\omega_1)$ nahe ω_H , IV. $(\omega_2 - 2\omega_1)$ nahe ω_H , V. $(\omega_2 - 2\omega_1)$ nahe $-\omega_H$, VI. ω_2 nahe $2\omega_1$. Eine erhebliche Stoßzahlmodulation (großes Δr) wird für III bis VI erhalten. Soweit das Magnetfeld mitspielt, ist der Effekt gerichtet, also abhängig von der Polarisierung der Wellen. Nur Fall VI tritt auch ohne Magnetfeld auf. 2. Die Wirkung auf die Welle ω_2 besteht zunächst im Auftreten von „Seitenwellen“ ($\omega_2 \pm 2\omega_1$). Die Wellengleichung für jede dieser drei Frequenzen (für die ordentliche und die außerordentliche Komponente) kann im homogenen, anisotropen Medium gelöst werden; die relative Leitfähigkeitsänderung geht mit $\Delta r/\nu_{\text{eff}}$. Daraus folgen die Amplituden der Seitenwellen. Starke Effekte ergeben sich für die außerordentliche Komponente im Fall III und IV, für die ordentliche im Fall V und jedenfalls für die dem Magnetfeld parallele Richtung im Fall VI. 3. Ist die Welle ω_1 moduliert (Modulationstiefe M), so werden die Seitenwellen es auch. Ihre Modulationstiefe ergibt sich aus deren Amplitude zu $2M/(1 + M^2/2)$ für Ω und zu $M^2/(2 - M^2)$ für die Oberwelle 2Ω . Zu Δr tritt nun ein mit Ω periodischer Term Δr_Ω . Die Modulationstiefe M_Ω der effektiven Stoßzahl wird daraus berechnet. Sie ist proportional der ungestörten Stoßzahl und der Energie der Störwelle ω_1 . Die „cross-modulation“ M_Ω von ω_2 folgt dann durch Integration über den Absorptionskoeffizienten κ_0 längs des Wegs s der Welle ω_2 : $M_\Omega = M_\Omega \int [\kappa_0(\omega_2)/2] ds$. Für die numerische Berechnung kann die quasilongitudinale Näherung benutzt werden. Für den Fall ω_1 nahe ω_H , wo die stärkste Cross-modulation auftritt, liegt die eigentliche Schwierigkeit darin, daß die außerordentliche Komponente von ω_1 in der Ionosphäre sehr stark gedämpft wird, sie dringt nur wenige km in die Schicht ein. Dadurch muß die Cross-modulation von geringen Veränderungen an der Unterseite der E -Schicht sehr stark abhängig werden. So erklären sich wohl die divergierenden experimentellen Ergebnisse.

K. Rawer.

Poincelot, Paul: Sur la répartition du courant le long d'un radiateur cylindrique. C. r. Acad. Sci., Paris **239**, 1365—1367 (1954).

Papas, Charles H.: An application of Sommerfeld's complex order wave functions to antenna theory. J. Math. Physics **33**, 269—275 (1954).

A. Sommerfeld gibt im 6. Band seiner Vorlesungen über Theoretische Physik (dies. Zbl. **35**, 62) bei der Integration der Wellengleichung in Zylinder- oder Kugelkoordinaten den Hinweis, daß bei dem Ansatz für die Lösung in Form einer unendlichen Reihe, deren Glieder die bekannte Produktform haben, auch an solche Fälle gedacht werden sollte, wo das gliedweise Verschwinden an gewissen Grenzflächen durch Wahl komplexer Zeigerwerte erreicht werden kann, über die dann die Reihe zu summieren ist. Der Verf. löst mit Hilfe dieses Kunstgriffes die Aufgabe, in welcher Weise sich die elektromagnetische Strahlung vom Endquerschnitt eines koaxialen Kabels aus ausbreitet, dessen äußerer Leiter in einen unendlich ausgedehnten, ebenen Flansch einmündet, während der innere Leiter von einer metallischen Halbkugel abgeschlossen ist. Bei Verwendung von Kugelkoordinaten (r, θ, φ) läuft die Lösung dieser Aufgabe darauf hinaus, eine Hilfsfunktion $u(r, \theta)$ zu bestimmen, die der Wellengleichung genügt und an der Oberfläche der Halbkugel mit dem Radius $r = a$ sich gemäß der Gleichung $\partial(r \cdot u)/\partial r = 0$ verhält. Der von Sommerfeld angegebene Lösungsweg besteht dann in der Wahl des Lösungsansatzes

$$\sum_{\nu} A_{\nu} \cdot P_{\nu}(\cos \theta) \cdot \left[\frac{\partial (r \cdot h_{\nu}^{(1)}(kr))}{\partial r} \right]_{r=a},$$

worin $h_{\nu}^{(1)}$ die halbzahligen Hankelschen Funktionen sind. In der Reihe ist zu summieren über alle komplexen Werte von ν , die der Gleichung $[\partial(r \cdot h_{\nu}^{(1)}(kr))/\partial r]_{r=a} = 0$ genügen. Für die so erhaltenen Zeigerwerte besteht die Orthogonalitätsrelation

$$\int_{a/k}^{\infty} h_{\nu_n}^{(1)}(x) h_{\nu_m}^{(1)}(x) \cdot dx = \delta_{nm} \cdot N_{\nu_n}(ak)$$
 mit dem Kroneckerschen Zahlenfaktor

γ_{nm} . Zum Schluß wird diese Lösung auf das oben skizzierte Antennenproblem angewandt. *H. Buchholz.*

Hatcher jr., E. C. and A. Leitner: Radiation from a point dipole located at the tip of a prolate spheroid. *J. appl. Phys.* **25**, 1250—1253 (1954).

Es wird eine Reihe von theoretisch berechneten Strahlungsdiagrammen eines elektrischen Dipols gezeigt, der auf der Oberfläche eines vollkommen leitenden Rotationsellipsoids im Endpunkt der großen Achse steht. Es werden die Verhältnisse für vier Sphäroide verschiedener Dicke angegeben. Die Wellenlängen betragen das π -, $\pi/2$ - und $\pi/3$ -fache der großen Achse des Ellipsoids. *H. Buchholz.*

Bekefi, G.: The impedance of an antenna above a circular ground plate laid upon a plane earth. *Canadian J. Phys.* **32**, 205—222 (1954).

Eine von Storer stammende Arbeit (dies. Zbl. **44**, 224), die sich mit der Berechnung der Impedanz einer mit einer kreisförmigen Metallscheibe in Verbindung stehenden vertikalen Antenne befaßt, wird auf den Fall erweitert, daß der darunter liegende Erdkörper nur unvollständig leitet. Der Ausdruck für die Antennenimpedanz wird in verschiedener Form angegeben. In einem Fall wird sie durch die Oberflächenströme ausgedrückt, die in der metallischen Grundplatte fließen. Nach Ansicht des Verf. empfiehlt sich diese Methode besonders, wenn die Grundplatte nicht übermäßig groß ist gegenüber der benutzten Wellenlänge. In der Arbeit werden noch einige numerische Ergebnisse mitgeteilt. So wird z. B. der Einfluß der Erdungen an der Dielektrizitätskonstanten des Erdreichs veranschaulicht. *H. Buchholz.*

● **Klinger, H. H.:** Einführung in die Mikrowellen und ihre wissenschaftlichen Anwendungen. Stuttgart: Hirzel Verlag 1954. VIII, 117 S. 92 Abb. DM 9.60.

Das vorliegende Buch von H. Klinger bringt eine ausgezeichnete Übersicht über den gegenwärtigen Stand der cm-Wellenphysik. Dem Verf. ist es im Rahmen einer verhältnismäßig knappen Darstellung (das Buch ist etwas über 100 Seiten stark) gelungen, neben den Grundzügen der cm-Wellentechnik die modernen physikalischen Hauptanwendungsgebiete, Hochfrequenzspektroskopie und Radioastronomie klar zu umreißen. Ausgehend von den passiven Grundelementen der cm-Wellentechnik — Hohlrohre, Hohlraumresonatoren und den verschiedenen Arten von $2n$ -Polgliedern (Verzweiger, Richtungskoppler usw.) — und der Theorie der hochfrequenten Schwingungserzeuger werden die verschiedenen Anwendungsgebiete der Hochfrequenzspektroskopie der Reihe nach besprochen. Wir nennen hier nur: Die Messung von magnetischen Kernmomenten und die ganze Gruppe magnetischer Resonanzeffekte (paramagnetische Resonanz, ferro- und antiferromagnetische Resonanz). Dazu gehören auch die Absorptionsmessungen, in Medien mit anomaler Dispersion. Das Buch schließt mit einer kurzen Darstellung der Mikrowellenastronomie. Ein sehr gut ausgewähltes Literaturverzeichnis ermöglicht es dem Leser, in jedes der vom Verf. behandelten Gebiete tiefer einzudringen. Das Buch, welches sich an Studierende, Physiker, Naturwissenschaftler und Hochfrequenztechniker wendet, bietet eine Reihe von interessanten Anregungen und kann bestens empfohlen werden. *P. Urban.*

Kunz, K. S.: Propagation of microwaves between a parallel pair of double curved conducting surfaces. *J. appl. Phys.* **25**, 642—653 (1954).

Der Verf. untersucht die Fokussierungseigenschaften eines Antennensystems, welches aus zwei beliebigen (im allgemeinen doppelt gekrümmten) leitenden Flächen besteht, die zueinander im Sinne der Orthogonalflächen einer Strahlenkongruenz parallel angeordnet sind. Das elektromagnetische Feld verläuft innerhalb der beiden Flächen und wird an den Flächenrändern abgestrahlt. Wenn der Normalabstand der beiden Flächen sowie die Hauptkrümmung klein gegen die äußere Wellenlänge angenommen werden, ist der entstehende Wellentyp ein TEM-Typ (Lechertyp) d. h. der Poyntingsche Vektor liegt in jedem Flächenpunkt in der Tangentialebene einer virtuellen Mittelfläche (mean-surface). Die Phasengeschwindigkeit der Lecherwelle ist nur eine Funktion der Dielektrizitätskonstanten des zwischen den Flächen befindlichen Mediums und insbesondere von der Geometrie des Systems unabhängig. Der Brechungsindex $n = \frac{1}{c} v$ wird dabei als Funktion der Flächenkoordinaten der Mittelfläche angenommen. Unter diesen Voraussetzungen darf die Berechnung des Feldes nach geometrisch-optischen Gesichtspunkten mittels des Fermatschen Prinzips erfolgen. Die Lichtwege (d. h. die Flächenkurven in Richtung des Poyntingschen Flusses) genügen daher der Forderung: $\delta \int_A^B d\tilde{z} = \delta \int_A^B n ds = 0$. Durch

die Bedingung $d\tilde{z} = d\tilde{z}$ lassen sich Flächenfamilien mit analogen Fokussierungseigenschaften erfassen, wobei der Verf. insbesondere auf die Äquivalenz der „Luneberglinse“ mit der „Rine-

hardlinse“ eingeht. Ganz allgemein wird ferner in Form von Ungleichungen die Bedingung aufgestellt, wann in einer äquivalenten Flächenfamilie eine „geodätische“ Doppelfläche (eine Linse mit dem konstanten Brechungsexponenten $n = 1$) enthalten ist, der vor allem praktische Bedeutung zukommt. P. Urban.

Rubinowicz, A.: Über die Fortpflanzung unstetiger elektromagnetischer Signale in Wellenleitern. *Acta phys. Polon.* **13**, 115—133 (1954).

Der Verf. behandelt das Problem, daß eine monochromatische elektromagnetische Welle von einem bestimmten Zeitpunkt an in einen Wellenleiter eingestrahlt wird. Er gibt die strenge Lösung für die Fortpflanzung eines solchen unstetigen elektromagnetischen Signals in einem Wellenleiter an und zeigt, daß die fortschreitende Welle sich aus zwei Teilen zusammensetzt, nämlich aus den Vorläufern und der Hauptwelle. In der vorliegenden Arbeit werden konvergente Reihenentwicklungen nach Besselfunktionen und Näherungsformeln zur Berechnung der elektromagnetischen Feldstärken in den Vorläufern und in der Hauptwelle angegeben. Die in der Arbeit angegebenen Entwicklungen ermöglichen die Berechnung der Energieverluste, die bei der Signalübermittlung durch die Abweichungen der Wellenbewegung von dem rein monochromatischen Fall entstehen. P. Urban.

Socio, Marialuisa de: Sulle frequenze critiche in una guida d'onda. *Boll. Un. mat. Ital.*, III. Ser. **9**, 283—285 (1954).

Indicate con v_c e v'_c le più basse frequenze critiche, rispettivamente, dei modi TM e TE , che si propagano in una guida d'onda, dalle disequaglianze isoperimetriche di Polya e Szego si deduce: a) a parità di area della sezione della guida v_c è minimo e v'_c è massimo per la guida a sezione circolare: detta proprietà vale per v_c anche a parità di perimetro, b) per ogni guida $v'_c < v_c$. Vengono poi discusse le limitazioni che così si ottengono per v_c e v'_c , confrontandole con quelle ricavate da altri AA. D. Graffi.

Sheingold, Leonard S. and James E. Storer: Circumferential gap in a circular wave guide excited by a dominant circular-electric wave. *J. appl. Phys.* **25**, 545—552 (1954).

Die Verff. behandeln im Anschluß an eine Arbeit von C. Papas [Cruft Laboratory Tech. Report No. **61** (1950)] die Beugung einer $T = E_{01}$ -Welle (diese besitzt axiale Symmetrie und nur eine E_θ - und H_z -Komponente) in einem kreiszylinderförmigen HR -Leiter an einem durchlaufenden schmalen Querschlitz, der senkrecht zur Zylinderachse liegt und das Hohlrohr in zwei Teile zerlegt. Da die Stromlinien des Oberflächenstromes für den angenommenen Wellentyp längs Parallelkreise des Zylinders verlaufen und daher die Berandung des Schlitzes nicht schneiden, wird die Wechselwirkung zwischen Außen- und Hohlrohrfeld im Vergleich zu anderen Wellentypen klein ausfallen. Im allgemeinen werden Beugungsprobleme dieser Art durch Einführung von Greenschen Tensoren gelöst, welche das Außen- bzw. Innenfeld mit der Feldverteilung in der beugenden Öffnung in Evidenz setzen. Infolge der getroffenen Annahmen restringiert sich hier die Rechnung auf ein skalares Problem. Die Verf. stellen zunächst die E_θ -Komponente des Außen- bzw. Innenraumes quellenmäßig dar und finden durch Anpassung der H_z -Komponente an der Schlitzfläche eine Integralgleichung für die unbekannte E_θ -Verteilung im Schlitz. Die Lösung der Integralgleichung wird auf die Lösung eines Variationsproblems zurückgeführt, das mit der angeführten Integralgleichung äquivalent ist. Das Aufsuchen der stationären Lösung läßt eine approximative Lösung zu, wobei wesentlich von der Annahme einer gegen die äußere Wellenlänge kleinen Schlitzbreite Gebrauch gemacht wird. Im weiteren berechnen die Verf. auf Grund des gefundenen Streufeldes im Hohlrohr die dem Schlitz vom Standpunkt der Leitungstheorie zugeordnete Vierpolmatrix und geben damit den Anschluß an die praktischen Bedürfnisse der Hohlrohrtechnik. Die experimentell bestimmten Durchlaß- und Reflexionskoeffizienten stehen, wie an einigen Beispielen gezeigt, mit den berechneten Werten in guter Übereinstimmung. P. Urban.

Pearson, J. D.: A contribution to the theory of rightangled junctions in wave guides. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **7**, 194—202 (1954).

L'A. tratta il problema della propagazione delle onde elettromagnetiche armoniche in due guide a sezione rettangolare collegate ad angolo retto, riconducendolo a un sistema di infinite equazioni lineari con infinite incognite, sistema di cui indica la soluzione in alcuni casi particolari. D. Graffi.

Lewin, L.: Diffraction of electromagnetic waves by an aperture in a large screen. *J. appl. Phys.* **25**, 1035 (1954).

Grinberg, G. A., N. N. Lebedev, I. P. Skal'skaja und Ja. S. Ufljand: Das Wellenproblem für einen parabolischen Spiegel. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **95**, 961—963 (1954) [Russisch].

Kodis, Ralph D.: Additional comments on „Diffraction of electromagnetic waves by an aperture in a plane screen“. J. appl. Phys. 25, 1342—1343 (1954).

Walker, L. R.: Stored energy and power flow in electron beams. J. appl. Phys. 25, 615—618 (1954).

Zur Berechnung des Wirkungsgrades von Wanderfeldröhren interessiert allgemein die Kenntnis der energetischen Wechselwirkung zwischen Elektronenstrahl und elektromagnetischem Feld. Der Verf. geht zunächst auf die Berechnung der von dem Strahl aus dem Feld aufgenommene Wirkleistung ein. Angenommen wird eine ebene in der z -Richtung fortschreitende Welle und eine ebene Elektronenstromung, welche sich gleichfalls in Richtung der z -Achse bewegt. Im Sinne dieser Behandlungsweise muß dabei von der Lorentzkraft abgesehen werden, so daß das Problem nur durch die eindimensionale Bewegungsgleichung und die Kontinuitätsgleichung bestimmt erscheint. Dabei ist das elektrische Feld in der Form $e^{j(\omega t + F \cdot z)}$ angenommen. Die Linearisierung der Grundgleichung und ihre nachfolgende Integration liefert dann in einfacher Weise die gesuchten Wechselwirkungsterme. Diese Art der Betrachtung setzt einen bereits eingeschwungenen Feldzustand voraus, wobei es zunächst fraglich erscheint, ob dieser in der angenommenen Weise erreicht werden kann. Zur Klärung dieser Frage wird in der Arbeit eine eingehende Analyse des sich durch die Wechselwirkung Feld-Elektronenstrahl einstellenden Zustandes durchgeführt. Dazu nimmt Verf. eine Feldverteilung der Form $a(z, t) \cos(\omega t + Fz)$ an, wobei die Amplitude $a(z, t)$ für t gegen $-\infty$ den Wert Null und für t gegen $+\infty$, gegen 1 streben soll. Die oben angeführten Ausgangsgleichungen werden jetzt einer Störungsrechnung zweiter Ordnung unterworfen. Als Resultat der längeren Rechnung ergibt sich, daß das Wanderfeld von seiner Entstehungsgeschichte, d. h. von der Form der Funktion $a(z, t)$ wesentlich unabhängig ist. Nur in dem besonderen Falle $\partial a / \partial t = 0$ oder $\partial a / \partial z = 0$ erhält man im Limes $t \rightarrow \infty$ die Formeln der elementaren Berechnung wieder. P. Urban.

Gol'danskij, V. I. und G. B. Ždanov: Über die Čerenkov-Strahlung der kosmischen Teilchen in der Atmosphäre. Žurn. eksper. teor. Fiz. 26, 405—416 (1954) [Russisch] (1954).

Eine abschätzende Berechnung des allgemeinen Austritts und der Höhenverteilung des durch die Čerenkov-Strahlung der kosmischen Teilchen in der Atmosphäre bedingten sichtbaren Leuchtens wird angegeben. Die Möglichkeit einer Registrierung von einzelnen Teilchen hoher Energie und der breiten atmosphärischen Schauer auf Grund von Beobachtungen einzelner Lichtaufleuchtungen infolge solch einer Ausstrahlung wird untersucht. Autoreferat.

Franz, Walter: Theorie des Trentinischen Absorptionsgitters. Z. angew. Phys. 6, 449—456 (1954).

Das Trentinische Absorptionsgitter wird als ein unendlich ausgedehntes Gitter aufgefaßt, das aus sehr dünnen homogenen Drähten von komplexem Widerstand besteht und parallel zu einer vollkommen leitenden Platte aufgestellt ist. Die Wirkung des Gitters auf eine senkrecht einfallende ebene Welle läßt sich dann durch Übergang zu komplexen Integralen in einfacher, geschlossener Form angeben. Dabei kann sogar noch angenommen werden, daß zwischen Platte und Gitter eine planparallele, dielektrische Schicht eingebracht ist, die unmittelbar auf der Platte aufliegt. Die Wirkung des Gitters wird dann an Hand der erhaltenen Lösung unter verschiedenen Annahmen über die Lage eingehend diskutiert. H. Buchholz.

Deppermann, K. und W. Franz: Theorie der Beugung an der Kugel unter Berücksichtigung der Kriechwelle. Ann. der Physik, VI. F. 14, 253—264 (1954).

Die in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 47, 202) entwickelte Theorie der Beugung am Zylinder unter Berücksichtigung der Kriechwelle wird in der vorliegenden Arbeit auf den Fall der Kugel erweitert. Es treten dabei gewisse Unterschiede hervor, die durch die Phasensprünge der Kriechwelle beim Überstreichen der Kugelpole entstehen. Diese Kriechwellen geben zu Interferenzerscheinungen mit der geometrisch reflektierten Welle Veranlassung und erzeugen dadurch Maxima und Minima der Intensität. Die Methode, die die Verff. für die Herleitung ihrer Ergebnisse benutzt haben, lehnt sich an die Theorie der Integralgleichungen an. Auf den Zusammenhang dieser Methode mit der von Watson angewandten komplexen Integration soll in einer späteren Arbeit eingegangen werden. H. Buchholz.

Franz, Walter: Über die Greenschen Funktionen des Zylinders und der Kugel. Z. Naturforsch. 9a, 705—716 (1954).

Die Greensche Funktion der Wellengleichung in Zylinder- und Kugelkoordinaten stellt sich zunächst in Form einer unendlichen Reihe dar, deren Glieder die bekannte Produktform haben. Diese Reihen werden der von Watson angegebenen Transformation unterworfen, und in dieser Form gestatten sie eine Aufspaltung in einen geometrisch optischen und einen Kriechwellenanteil. Diese Lösung des Beugungsproblems ist bis zu ziemlich kleinen Objekten herunter auch numerisch bequem verwendbar. Die Kriechwellen sind nach Ansicht des Verf. identisch mit den in der drahtlosen Telegraphie bekannten Residuenwellen nach Watson und van der Bremmer. Mittels der Integralgleichungsmethode ist es möglich, unter Verwendung der erhaltenen Ergebnisse auch die Beugungserscheinungen an beliebigen kantenfreien Objekten zu untersuchen. *H. Buchholz.*

Vandakurov, Ju. V.: Die Beugung elektromagnetischer Wellen, die von einem beliebig orientierten elektrischen oder magnetischen Dipol ausgesandt werden, an einer ideal leitenden Halbebene. *Žurn. éksper. teor. Fiz.* **26**, 3–18 (1954) [Russisch].

Es wird die in dem Titel der Arbeit angegebene Aufgabe speziell für den Fall behandelt, daß sich der strahlende Dipol in endlichem Abstände von der beugenden Kante in irgendeiner Richtung in der zur beugenden Kante senkrechten Ebene befindet und dabei 1. entweder parallel zu jener Kante oder 2. in der zur beugenden Kante senkrechten Ebene in der radialen Richtung oder 3. senkrecht zur radialen Richtung schwingt. Der schwingende Dipol wird durch Ströme der Dichte j bzw. bei einem magnetischen Dipol durch fiktive Ströme der Dichte j^* ersetzt, u. zwar erweist es sich im Fall 1 als vorteilhaft, das Vektorpotential des Feldes zu bestimmen, in den anderen Fällen dagegen, bei einem magnetischen Dipol die elektrischen Komponenten, bei einem elektrischen Dipol die magnetischen Komponenten zu berechnen. *J. Picht.*

Walker, M. J.: Matrix calculus and the Stokes parameters of polarized radiation. *Amer. J. Phys.* **22**, 170–174 (1954).

Da in den letzten Jahren die Behandlung polarisierter Strahlung häufiger mit Benutzung der Matrizen erfolgt, ohne daß die erschienenen Arbeiten eine Einführung in diese Behandlungsweise enthalten, ist es die Absicht des Verf., eine solche Einführung zu geben und gleichzeitig den Zusammenhang der Stokesschen Parameter mit der Poincaréschen Kugeldarstellung zu geben. Die Stokesschen Parameter $I = \langle E_x^2 + E_y^2 \rangle$, $Q = \langle E_x^2 - E_y^2 \rangle$, $U = \langle 2E_x E_y \cos \delta \rangle$, $V = \langle 2E_x E_y \sin \delta \rangle$, in denen die $\langle \rangle$ bedeuten, daß die zeitlichen Mittelwerte gemeint sind und E_x , E_y , δ die Komponenten des elektrischen Vektors bzw. ihre momentane Phasendifferenz ($-\pi \leq \delta \leq \pi$) bedeuten, kennzeichnen Intensität und Polarisationszustand der Welle. Man schreibt $\begin{Bmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{Bmatrix}$, wobei $\{ \}$ andeuten soll, daß sie eigentlich als Spaltenmatrix geschrieben werden sollte. Unpolarisiertes Licht ist gekennzeichnet durch $\begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$, linear-polarisiertes allgemein durch $\begin{Bmatrix} E_x^2 + E_y^2 \\ E_x^2 - E_y^2 \\ 2E_x E_y \cos \delta \\ 2E_x E_y \sin \delta \end{Bmatrix}$, speziell bei linearer Polarisation z. B. längs der y -Achse durch $\begin{Bmatrix} E_x^2 - E_y^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ usw. Neben den Stokesschen Parametern gibt es noch die „modifizierten“ Stokesschen Parameter i , q , u , v , analog – aber mit Momentanwerten – wie I , Q , U , V definiert. q , u , v sind identisch mit den Komponenten des Schwingungsvektors in der Poincaréschen Kugeldarstellung des vollkommen polarisierten Lichtes. Es wird gezeigt, daß optische Anordnungen, die die Polarisation des Bündels ändern, in ihrer Wirkung gleichfalls durch Matrizen darstellbar sind, mit denen die Matrix des einfallenden Strahlenbündels multipliziert die Matrix des polarisationsmäßig geänderten Strahlenbündels ergibt. – Es wird noch darauf hingewiesen, daß von Jones statt dieser (Muellerschen) vierreihig-vierspaltiger Transformationsmatrizen die Benutzung von 2×2 komplexen Matrizen vorgeschlagen wird, auf die Verf. aber nicht näher eingeht. *J. Picht.*

Dumontet, Pierre: Discussion d'un schéma général, applicable en particulier à la théorie de la formation des images d'objets partiellement cohérents. *C. r. Acad. Sci., Paris* **238**, 1109–1111 (1954).

Es wird ein formales mathematisches Schema angegeben – und auf einige spezielle physikalische Fragestellungen angewandt –, mit dem man den Fehler der Beobachtung einer physikalischen Größe berechnen kann, wenn man von dem Beobachtungsapparat bzw. der Beobachtungsmethode und den hierbei benutzten Hilfsmitteln bzw. Hilfsgeräten funktionsmäßig angeben kann, wie sie die Beobachtungen modifizieren. Bezeichnet M einen Punkt eines k -dimensionalen Raumes, $T(M)$ die experimentell zu bestimmende (reelle oder komplexe) Größe in M , und beobachtet man mittels eines Beobachtungsgerätes eine Größe $S(M) \cdot T(M)$, wo $S(M)$ ein bekanntes Signal ist, so findet man eine Beobachtung $D(M)$, wenn der Beobachtungsapparat selbst – z. B. ein lineares Filter – einen Ausschlag $R(M)$ gibt und einen Vergrößerungsfaktor $G(\omega)$ besitzt. – Mit diesen allgemeinen Ausdrücken wird eine Integralformel zur Errechnung des mittleren Fehlers der Beobachtung angegeben. Die Anwendungsbeispiele, die Verf. kurz erwähnt, sind: Untersuchung der zeitlichen Änderung eines Widerstandes; Bilder von partiell kohärent strahlenden Objekten. *J. Picht.*

● **Mach, E.:** The principles of physical optics. Reprint New York: Dover Publications Inc. 1954. X, 324 p. \$ 1,75; cloth \$ 3,50.

● **Stephens, Robert E.:** Computation of achromatic objectives. (National Bureau of Standards Circular 549.) Washington: Government Printing Office 1954. 7 p. 5 fig. 10 cents.

Rogers, G. L.: The Abbe theory of microscopic vision and the Gibbs phenomenon. Amer. J. Phys. **22**, 384—389 (1954).

Ingarden, R. S. and H. Ochman: Optimal optical systems. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III **2**, 271—276.

Verff. versuchen, das Problem, bis zu welchem Grade es prinzipiell möglich ist, die Qualität eines optischen Bildes zu steigern, wenn das abbildende System Aberrationen besitzt, zu präzisieren und für rotationssymmetrische optische Systeme aus homogenen isotropen Medien zu lösen. Dabei beschränken sie sich auf die skalare Lichttheorie, auf Abbildung nichtselbstleuchtender Objekte, vollkommen kohärentes Licht und auf die Erscheinungen innerhalb einer Meridianebene, da sie der Ansicht sind, daß wenigstens qualitativ die Verhältnisse im allgemeinen Fall die gleichen sein werden. Die Wirkung des optischen Systems wird mathematisch als Transformation der Amplitudenfunktion $u(x)$ der Objektebene in eine Amplitudenfunktion $U(\xi)$ der Bildebene aufgefaßt, die durch einen linearen Integraloperator $U(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, \xi) u(x) dx$ darstellbar ist, worin $K(x, \xi)$ nur von dem betreffenden optischen System abhängt und die Koordinaten x, ξ zweckmäßig so gewählt sind, daß in ihnen die lineare Vergrößerung des Instrumentes den Wert 1 hat. $u(x)$ wird als Fourierintegral dargestellt und neben $K(x, \xi)$ — der „Punktharakteristik“ — eine Frequenzcharakteristik $S(b, \beta)$ sowie eine gemischte Charakteristik $R(\xi, b)$ eingeführt. Verff. kommen zu dem Ergebnis, daß das ideale — also fehlerfreie — optische System vom Standpunkt der Wellentheorie des Lichtes nicht das beste abbildende System ist, da es das Objekt nicht vollkommen einwandfrei abbildet. Sie untersuchen weiter, unter welchen Bedingungen ein optisches System ein beliebiges Objekt bestmöglich abbildet.

J. Picht.

Trezona, P. W.: Additivity of colour equations. II. Proc. phys. Soc., Sect. B **67**, 513—522 (1954).

Morito, Nozomu: On the chromatic field aberration of the magnetic electron lens in the electron microscope. J. appl. Phys. **25**, 986—993 (1954).

Der Ausdruck „chromatic field aberration“ ist auf eine ungeschickte Übersetzung des ursprünglichen japanischen Titels der Arbeit [Denshikembikyo **3**, 85—90 (1954)] zurückzuführen. Gemeint ist der Farbfehler bei der Abbildung nicht auf der optischen Achse liegender Objektpunkte, also die Farbabhängigkeit der Vergrößerung und der Bildrehnung. Die Koeffizienten dieser Farbfehler werden für den Fall des Glaser'schen Glockenfeldes berechnet. Die erhaltenen Formeln stimmen mit den von Glaser (dies. Zbl. **24**, 378) angegebenen nicht überein, werden aber durch Messungen des Verf. gut bestätigt. Der Grund für die Abweichungen von Glaser's Ausdrücken liegt darin, daß der Verf. bei der Rechnung berücksichtigt, daß die Objektebene und die Registrierebene (Leuchtschirm bzw. Photoplatte) nicht gleichzeitig für die Linsenstärken k und $k + \Delta k$ zueinander konjugiert sein können und daß er zum Vergleich nur Elektronenbahnen zuläßt, die aus dem Objektraum achsenparallel einfallen. Die Bedeutung der außeraxialen Farbfehler in den verschiedenen Linsen (Objektiv, Projektiv, Zwischenlinse) des Elektronenmikroskops für die elektronenoptische Abbildung wird ausführlich diskutiert.

F. Lenz.

Dain, J. and I. A. D. Lewis: Adiabatic theory of an electron gun for crossed field devices. Proc. phys. Soc., Sect. B **67**, 449—455 (1954).

Die Bewegung eines Elektrons in einem zeitlich konstanten, homogenen elektrischen Feld und einem dazu senkrechten, konstanten, homogenen magnetischen Feld kann bekanntlich als Überlagerung einer Zykloidenbewegung in einer Ebene senkrecht zum Magnetfeld und einer gleichförmigen Bewegung in Richtung desselben angesehen werden. Ist ω die Winkelgeschwindigkeit und r der Radius des die Zykloide erzeugenden Kreises, so ist ωr^2 eine adiabatische Invariante. Sie bleibt also unverändert, wenn sich das Feld entweder mit der Zeit oder räumlich adiabatisch

ändert. In der Arbeit wird die Verknüpfung der Elektronenbahnen in zwei derartigen homogenen Feldern, die durch ein adiabatisches Übergangsgebiet getrennt sind, auf Grund von $\omega_1 r_1^2 = \omega_0 r_0^2$ diskutiert und auf bestimmte Elektronenstrahler angewendet. *W. Glaser.*

Clogston, A. M. and H. Heffner: Focusing of an electron beam by periodic fields. *J. appl. Phys.* **25**, 436—447 (1954).

Die Fokussierung von langen Elektronenbündeln mit längs des Strahls periodisch veränderlichen magnetischen und elektrischen Feldern unter Berücksichtigung der Raumladung wird diskutiert. Es werden axialsymmetrische Felder und solche vom Vierpoltypus behandelt. Durch Integration der Bewegungsgleichungen z. T. mit Hilfe eines Analogie-Rechengerätes werden unter gewissen Bedingungen Lösungen erhalten, die eine wesentlich parallele Elektronenströmung ergeben mit nur geringen Wellungen. Numerische Abschätzungen für praktische Anwendungen werden gegeben. *W. Glaser.*

Walton, E. T. S.: High-order focusing by a uniform magnetic field with straight-line boundaries. *Nature* **173**, 1147—1148 (1954).

Tien, Ping King: Focusing of a long cylindrical electron stream by means of periodic electrostatic fields. *J. appl. Phys.* **25**, 1281—1288 (1954).

Es wird untersucht, unter welchen Voraussetzungen ein durch eine periodische Folge dünner elektrostatischer Linsen fokussierter Elektronenstrom auf seiner Bahn stabil bleibt. Bei der Rechnung wird die abstoßende elektrostatische Wirkung des Elektronenstrahls auf sich selbst berücksichtigt. Ähnlich wie bei der sogenannten starken Fokussierung oder der Mathieuschen Differentialgleichung ergeben sich stabile und instabile Gebiete, welche numerisch berechnet werden. *W. Humbach.*

Bodenstedt, E.: Über die Phasenschwingungen beim Synchrotron mit starker Fokussierung. *Ann. der Physik*, VI. F. **15**, 35—54 (1954).

Es wird eine Analogierechenmaschine zur Behandlung der Phasenschwingungen des Synchrotrons mit starker Fokussierung beschrieben. Das Verhalten der Maschine wird in dem Gebiet untersucht, in dem die Direktionskraft der Phasenschwingung ihr Vorzeichen wechselt. Es werden empirisch einige Methoden angegeben, mit deren Hilfe der Anstieg der Schwingungsamplituden beim Durchgang durch den Vorzeichenwechsel vermieden werden kann. *W. Humbach.*

Barden, S. E.: Space-charge forces in strong-focusing synchrotrons. *Phys. Review*, II. Ser. **93**, 1378—1380 (1954).

Seiden, Joseph: Les amplitudes des oscillations dans le synchrotron à forte convergence. *C. r. Acad. Sci., Paris* **239**, 798—800 (1954).

Blaquière, Augustin: Sur les orbites dans le cosmotron à focalisation forte à l'approximation non linéaire. *C. r. Acad. Sci., Paris* **239**, 1285—1287 (1954).

Grosjean, C. C. and V. J. Vanhuyse: On the properties of a spectrometer for linear electron accelerators. *Nuovo Cimento*, Ser. IX **11**, 639—650 (1954).

Die Energieverteilung der aus einem Linearbeschleuniger kommenden Elektronen soll durch ihre Ablenkung in einem Magnetfeld gemessen werden, welches durch zwei einander gleiche koaxiale stromdurchflossene Spulen erzeugt wird, deren Achse die Achse des aus dem Beschleuniger kommenden Elektronenstrahls senkrecht schneidet. Ein Ausdruck, der die Berechnung des Ablenkwinkels aus der Feldverteilung in der Symmetrieebene gestattet, wird abgeleitet. Für kleine Werte des Parameters $I(E = 2m_0c^2)^{1/2}$ (I Spulendurchflutung, E Elektronenenergie) laufen alle den Beschleuniger auf seiner Achse verlassenden Elektronen durch den Symmetriepunkt des Magnetfeldes. Für große Werte des Parameters nähern sich die Elektronen dagegen dem Symmetriepunkt nur bis auf einen endlichen Abstand. Im Grenzfall (kritischer Wert des Parameters) werden die Elektronen auf eine Kreisbahn eingefangen, und die Definition des Ablenkwinkels als Winkel zwischen Einfalls- und Ausfallsasymptote versagt. Trägt man den Ablenkwinkel als Funktion des Parameters $I(E = 2m_0c^2)^{1/2}$ auf, so hat diese Funktion für den kritischen Wert des Parameters eine Unendlichkeitsstelle. Das bedeutet eine sehr hohe chromatische Dispersion der Ablenkanordnung für Werte in der nahen Umgebung des kritischen Parameters. Als Beispiel wird der Fall eines Ablenksystems aus zwei Kreisströmen behandelt. Die Arbeit ist ein Teil der theoretischen Untersuchungen für einen geplanten Linearbeschleuniger. *F. Lenz.*

Gold, Louis: Relativistic dynamics of a charged particle in crossed magnetic and electric fields with application to the planar magnetron. *J. appl. Phys.* **25**, 683—690 (1954).

Die relativistischen Bewegungsgleichungen eines geladenen Teilchens in einem zeitlich und räumlich homogenen elektrischen und dazu senkrechten magnetischen Feld werden integriert und auf das ebene Magnetron angewendet. (Da statt der Eigenzeit die gewöhnliche Zeit als Bahnparameter verwendet wird, werden die Differentialgleichungen ziemlich kompliziert und der Verf. hatte große mathematische Schwierigkeiten zu überwinden. In vierdimensionaler Schreibweise mit der Eigenzeit als Parameter hätten — wie bekannt — die Lösungen der entsprechenden linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten als trigonometrische bzw. hyperbolische Funktionen unmittelbar angeschrieben werden können. *Ann. d. Ref.*) *W. Glaser.*

Gold, Louis: On the nature of the transcendental curves associated with the relativistic trajectories of charged particles. *J. appl. Phys.* **25**, 691—697 (1954).

Diskussion der nach der Integrationsmethode des Verf. auftretenden Bahnkurven der relativistischen Teilchenbewegung in gekreuzten homogenen Feldern. (Siehe vorstehend. Ref.) *W. Glaser.*

Dirac, P. A. M.: A new classical theory of electrons. III. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **223**, 438—445 (1954).

Während Verf. sich in den beiden ersten Arbeiten (dies. Zbl. **43**, 428; **48**, 204) auf den Fall beschränkte, daß die strömende Raumladung durch ein Geschwindigkeitsfeld beschrieben wird, untersucht er nun mehrere einander durchdringende Strömungen. Jede Strömung gibt gemäß den Maxwell'schen Gleichungen einen Beitrag zum elektromagnetischen Feld und bewegt sich nach den Lorentz'schen Gleichungen im resultierenden elektromagnetischen Feld. Verf. leitet die Bewegungsgleichungen aus einem Wirkungsprinzip her und geht dann zur Hamilton'schen Form über. *G. Höhler.*

Höhler, G.: Zur Bewegung von Raumladungen nach Dirac's Theorie. *Z. Naturforsch.* **9a**, 696 (1954).

Kuznecov, P. I., R. L. Stratonovic und V. I. Tichonov: Über die Wirkung der elektrischen Schwankungen auf einen Röhrengenerator. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **97**, 639—642 (1954) [Russisch].

Weber, J.: Quantum theory of a damped electrical oscillator and noise. II. The radiation resistance. *Phys. Review, II. Ser.* **94**, 211—215 (1954).

Extension d'une étude précédente (ce Zbl. **50**, 433), incluant le cas où l'oscillateur (macroscopique) rayonne. Cas d'une cavité résonnante sur un mode pur. Equivalence entre les formules quantiques (obtenues par la théorie des perturbations au 1^{er} ordre) et les formules semi-classiques. Equivalence entre les effets de la radiation et d'une résistance non rayonnante. Les „fluctuations du vide“ doivent induire à basse température une f. e. m. aléatoire et un „bruit de fond“ mesurables.

O. Costa de Beauregard.

Weber, J.: Vacuum fluctuation noise. *Phys. Review, II. Ser.* **94**, 215—217 (1954).

On couple avec le dispositif précédemment décrit un faisceau d'électrons mono-cinétiques de très faible intensité. A basse température, une perturbation quantique aléatoire doit être induite sur ces électrons, permettant ainsi la mesure de l'effet précédemment étudié.

O. Costa de Beauregard.

Meyer, M. A. and David Middleton: On the distributions of signals and noise after rectification and filtering. *J. appl. Phys.* **25**, 1037—1052 (1954).

Continuation de: M. Kac et A. J. F. Siegert. *J. appl. Phys.* **18**, 383—397 (1947), en introduisant le signal en plus du bruit. *B. Mandelbrot.*

Pierce, J. R.: A theorem concerning noise in electron streams. *J. appl. Phys.* **25**, 931—933 (1954).

Friedman, Henry D.: Coincidence of pulse trains. *J. appl. Phys.* **25**, 1001—1005 (1954).

Hoffman, William C.: The joint distribution of n successive outputs of a linear detector. J. appl. Phys. **25**, 1006—1007 (1954).

Arthur, George R.: The statistical properties of the output of a frequency sensitive device. J. appl. Phys. **25**, 1185—1195 (1954).

Continuation de: M. Kac et A. J. F. Siegert. J. appl. Phys. **18**, 383—397 (1947). *B. Mandelbrot.*

Relativitätstheorie:

Riabouchinsky, Dimitri: Essai d'une interprétation du résultat négatif de l'expérience de Michelson, sans recours à la transformation de Lorentz. C. r. Acad. Sci., Paris **239**, 1260—1262 (1954).

Rayner, C. B.: The application of the Whitehead theory of relativity to non-static, spherically symmetrical systems. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **222**, 509—526 (1954).

L'applicazione della teoria della relatività di Whitehead conduce ad un elemento lineare del campo gravitazionale di un unico punto materiale, dal quale si deducono la rotazione dal periclio e la deflessione della luce come nella teoria di Einstein. J. L. Synge (questo Zbl. **47**, 208) ha esteso il risultato di Whitehead-Eddington al campo gravitazionale di una distribuzione di materia continua e statica e lo ha applicato al campo solare. In questo lavoro l'A. si collega direttamente alla ricerca di Synge e, dopo avere generalizzato la formula fondamentale di Synge al caso di una distribuzione di materia continua non statica, costruisce un modello di universo in espansione uniforme, isotropo omogeneo. Codesto modello è utile perchè, essendo invariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz, può costituire la base di una teoria cosmologica in quanto il moto di recessione delle nebulose extragalattiche si considera come uniforme. L'A. discute i vantaggi che il suo modello presenta in confronto a quello di E. A. Milne (questo Zbl. **11**, 279). *G. Lampariello.*

Chase, D. M.: The equations of motion of charged test particles in general relativity. Phys. Review, II. Ser. **95**, 243—246 (1954).

Es werden die Bewegungsgleichungen eines geladenen Probeteilchens in einem beliebigen Gravitations- und elektromagnetischen Feld abgeleitet. Dabei wird von der Methode Gebrauch gemacht, welche Infeld und Schild (dies. Zbl. **36**, 426) für den Fall eines reinen Gravitationsfeldes entwickelt haben. *A. Papapetrou.*

Bhattacharya, Shambhunath: The general theory of relativity and the expanding universe. Progress theor. Phys. **11**, 613 (1954).

Takeno, Hyōtirō: The problem of many bodies and the superposition of spherically symmetric space-times in general relativity. Progress theor. Phys. **11**, 392—410 (1954).

Mariot, Louis: Le champ électromagnétique singulier. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 2055—2056 (1954).

Muovendo dalla considerazione di un campo elettromagnetico puro in un cronotopo curvo, l'A. caratterizza quei particolari campi che diconsi singolari. Dopo avere osservato che in un conveniente sistema di riferimento esiste una sola direzione propria isotropa, l'A. dimostra che le traiettorie delle derizioni proprie isotrope del campo elettromagnetico singolare sono geodetiche di lunghezza nulla del ds^2 . Successivamente, viene mostrato come un campo di codesto tipo sia assimilabile ad un fluido di fotoni e viene istituito un confronto fra le equazioni di Maxwell del campo e le equazioni dell'idrodinamica pura applicate al fluido di fotoni. *G. Lampariello.*

Fok, V. A.: Über die Arbeit F. I. Frankl's: „Einige prinzipielle Bemerkungen zur allgemeinen Relativitätstheorie“. Uspechi mat. Nauk **9**, Nr. 4 (62), 229—236 (1954) [Russisch].

Vergl. dies. Zbl. **51**, 200.

Kilmister, C. W. and G. Stephenson: An axiomatic criticism of unified field theories. I, II. Nuovo Cimento, IX. Ser. Suppl. **11**, 91—105, 118—140 (1954).

I. Allgemeine Betrachtungen über einheitliche Feldtheorien von Gravitation und Elektromagnetismus. Es wird eine Reihe von Axiomen formuliert und die Forderung gestellt, mit Hilfe dieser Axiome eine erste Wahl der „zulässigen“ einheitlichen Feldtheorie zu treffen. — II. Diskussion der verschiedenen vorgeschlagenen einheitlichen Feldtheorien vom Standpunkt der in Teil I formulierten Axiome. *A. Papapetrou.*

Sáenz, A. W.: Elementare Herleitung der von Hlavatý angegebenen kanonischen Formen für den elektromagnetischen Tensor in der einheitlichen Feldtheorie. *Z. Phys.* **138**, 489—498 (1954).

In der Einsteinschen einheitlichen Feldtheorie mit unsymmetrischem $g_{\mu\nu}$ gilt ein von Hlavatý bewiesener Satz (dies. Zbl. **47**, 210), wonach der elektromagnetische Tensor $g_{\mu\nu}$ in jedem Punkt auf eine von vier verschiedenen, sich gegenseitig ausschließenden Formen gebracht werden kann. In der vorliegenden Arbeit wird ein einfacherer Beweis dieses Satzes gegeben.

A. Papapetrou.

Hlavatý, Václav: Maxwell's field in the Einstein unified field theory. *Nieuw Arch. Wiskunde*, III. R. **2**, 103—114 (1954).

Die einheitliche Einsteinsche Feldtheorie beruht auf einem reellen unsymmetrischen Tensorfeld $g_{\lambda\mu}$, wobei $g_{\lambda\mu}$ die Signatur $- - - +$ besitzt, und dem durch $\partial_\omega g_{\lambda\mu} = \Gamma_{\lambda\omega}^\nu g_{\nu\mu} + \Gamma_{\omega\mu}^\alpha g_{\lambda\alpha}$ daraus abgeleiteten Zusammenhang $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$. Die Feldgleichungen lauten dann (*) $\Gamma_{[\lambda}^\nu{}_{\mu]} = 0$, $R_{\alpha\beta} = 0$, $\partial_\alpha R_{\beta\gamma} = 0$, wenn $R_{\alpha\beta}$ den kontrahierten Krümmungstensor des Zusammenhanges bedeutet (vgl. dies. Zbl. **55**, 209). Über die physikalische Interpretation dieser Theorie gibt nach Einsteins Worten die Erfahrung nur den einen vagen Hinweis: Es muß so etwas wie ein Maxwell'sches elektromagnetisches Feld im Gesamtfeld enthalten sein. Diese Bemerkung kann Verf. durch zwei Theoreme interpretieren: (1) Es existiert genau ein Bivektorfeld $m_{\lambda\mu}$ als Funktion von $g_{\lambda\mu}$ (aber nicht dessen Ableitungen), das die Maxwell'schen Gleichungen $\partial_{[\omega} m_{\mu]\lambda} = 0$ erfüllt. (2) Dagegen gibt es unendlich viele solche Felder $m_{\lambda\mu}$, deren p -te Approximation den Maxwell'schen Gleichungen genügt. — Zum Schluß wird diskutiert, wie sich gewisse interessante Änderungen und Beschränkungen der Feldgleichungen (*) auf diese Fragestellung auswirken.

W. Barthel.

Pastori, Maria: Sullo spazio della recente teoria unitaria di Einstein. *Convegno Internaz. Geometria differenz.*, Italia, 20—26 Sett. 1953, 107—113 (1954).

In der einheitlichen Einsteinschen Feldtheorie wird aus dem unsymmetrischen Fundamentaltensor g_{ik} durch die Gleichungen $g_{i;k;r} = \hat{c}_r g_{ik} - g_{jk} \Gamma_{ir}^j - g_{ij} \Gamma_{rk}^j = 0$ ein ebenfalls unsymmetrischer Zusammenhang Γ_{ik}^j definiert. Zur kovarianten Ableitung kann man dann entweder den Zusammenhang $\Gamma_{ir}^j = \Gamma_{(ir)}^j + \Gamma_{[ir]}^j$ oder seinen konjugierten $\Gamma_{ir}^j = \Gamma_{(ir)}^j - \Gamma_{[ir]}^j$ benutzen. Diese Polarisierung in der Differentiation wird für Vektoren und Tensoren, sowie für Überschiebungen mit dem Fundamentaltensor diskutiert. Verf. veranschaulicht die Betrachtungen, indem der Raum der einheitlichen Einsteinschen Theorie als Raum von Dipolen aufgefaßt wird.

W. Barthel.

Simoni, Franco di: Le soluzioni generali della statica a simmetria sferica nell'ultima teoria unitaria di Einstein. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. Ser. **16**, 348—355 (1954).

Ableitung der allgemeinen statischen, kugelsymmetrischen Lösung der „schwachen“ Feldgleichungen, $g^{\mu\nu}{}_{;\alpha} = 0$, $R_{\mu\nu} = 0$, $R_{[\mu\nu;\alpha]} = 0$, der Einsteinschen einheitlichen Feldtheorie mit nichtsymmetrischem $g_{\mu\nu}$.

A. Papapetrou.

Ikeda, Mineo: On static solutions of Einstein's generalized theory of gravitation. I. *Progress theor. Phys.* **12**, 17—30 (1954).

In Einsteins einheitlicher Feldtheorie mit nichtsymmetrischem $g_{\mu\nu}$ wird mit Hilfe der Beziehung $g^{\mu\nu}{}_{;\alpha} = 0$ ein „elektromagnetisches Vektorpotential“ q_μ eingeführt. Für den Fall der einem „elektrostatischen“ Feld entsprechenden statischen kugelsymmetrischen Lösung wird dieses Potential berechnet und für die Diskussion der Randbedingung für $r \rightarrow \infty$ verwendet.

A. Papapetrou.

Vaidya, P. C.: Spherically symmetric solutions in nonsymmetrical field theories. II. *Phys. Review*, II. Ser. **96**, 5—9 (1954).

Teil I wurde in dies. Zbl. **51**, 204 angezeigt.

Hély, Jean: Sur la représentation d'Einstein du champ unitaire. *C. r. Acad. Sci.*, Paris **239**, 385—387 (1954).

Verf. betont, daß es vorteilhaft ist, in der Einsteinschen Theorie den Fundamental-tensor f^{hi} zu definieren mittels $\sqrt{-f} f^{hi} = \sqrt{-g} g^{hi}$ wo $f = \text{Det}(f_{ij})$, $g = \text{Det}(g_{ij})$ ist, statt durch $f^{hi} = g^{hi}$ oder durch $f_{hi} = g_{hi}$. Denn in diesem Falle hat der zugehörige Riccische Tensor R_{hi} die Eigenschaft, daß $R_{hi}^h = \frac{1}{2} A_i^h R_j^j$ zu dem Energie-Impuls-Tensor proportional ist.

J. Haantjes.

Hély, Jean: Sur une généralisation immédiate des équations d'Einstein. C. r. Acad. Sci., Paris **239**, 747—749 (1954).

Winogradzki, Judith: Sur les λ -transformations de la théorie unitaire d'Einstein-Schrödinger. C. r. Acad. Sci., Paris **239**, 1359—1361 (1954).

Yano, Kentaro and Masayoshi Ohgane: On six-dimensional unified field theories. Rend. Mat. e Appl. **13**, 99—132 (1954).

On sait qu'une théorie unitaire doit contenir d'une part un tenseur quadratique $a_{ij} = a_{ji}$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$) dans quatre variables x^1, x^2, x^3, x^4 à l'aide duquel on peut écrire les équations du champ gravitationnel et un vecteur q_i dans les mêmes variables à l'aide duquel on peut écrire les équations de Maxwell du champ électromagnétique. Ce qui diffère d'une théorie unitaire à une autre, c'est la manière d'introduire les tenseurs a_{ij} et q_i . C'est ainsi que dans la théorie unitaire non holonome, proposée par le Réf. en 1936 et dont un des AA. a considéré à plusieurs reprises, on suppose que l'espace temps est un espace non holonome V_5^4 défini par l'équation

$$(1) \quad dx^5 - \varphi_1 dx^1 - \varphi_2 dx^2 - \varphi_3 dx^3 - \varphi_4 dx^4 = 0$$

la métrique de V_5^4 étant définie par le tenseur a_{ij} . La théorie unitaire qu'on propose maintenant consiste à se donner deux vecteurs q_i , donc un espace non holonome V_6^4 défini par l'équation (1) et une équation analogue où au lieu de variable x^5 intervient la variable x^6 . En ce qui concerne le second vecteur q_i , il est introduit dans le but de pouvoir éventuellement servir pour la description d'un nouvel champ, par exemple celui du meson. Comme les variables x^5 et x^6 n'interviennent que par leurs différentielles dx^5, dx^6 , l'espace possède le groupe de translations $x'^5 = x^5 + a$, $x'^6 = x^6 + b$ où a et b sont des constantes, ce qui permet à caractériser la géométrie de l'espace V_6^4 et l'on montre comment on peut faire rentrer dans ce cadre la plupart des théories unitaires à six dimensions qu'on connaît jusqu'ici.

G. Vranceanu.

Hatakar, M. M.: Theory of elementary particles in general relativity. Phys. Review, II. Ser. **94**, 1472—1475 (1954).

Um die von Bhabha [Reviews modern Phys. **17**, 200 (1945); dies. Zbl. **35**, 424] vorgeschlagene Theorie der Elementarteilchen in die allgemeine Relativitätstheorie einzubauen, führt der Verf. eine „neue“ kovariante Verschreibung ein. Eine übersichtliche Herleitung derselben findet man schon z. B. in G. Ludwig, Fortschritte der projektiven Relativitätstheorie, S. 35 ff. (Wolfenbüttel 1948). Damit bringt dann der Verf. in eine allgemeine kovariante Form: die Feldgleichungen, den Ladungs-Strom-Vektor, den Energie-Impuls-Tensor, die Erhaltungssätze und die charakteristischen Gleichungen der Fundamentalmatrizen der Bhabhaschen Theorie (die im Falle des Spins $\frac{1}{2}$ bzw. 0 oder 1 die Verallgemeinerung der bekannten Diracschen bzw. Kemmerschen Relationen enthalten).

F. Penzlin.

Quantentheorie:

Ayant, Yves: L'extension à une variable quantique des notions de fonction de corrélation et de densité spectrale. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 990—992 (1954).

Bopp, Fritz: Korpuskularstatistische Begründung der Quantenmechanik. Z. Naturforsch. **9a**, 579—600 (1954).

Verf. faßt die Wellen als statistische Angaben über das Verhalten von Teilchen auf und betrachtet Teilchen als das eigentlich Reale, jedoch mit der folgenden Definition: „Wir definieren also Teilchen als Inbegriff der Ursachen möglicher Ereignisse, so, wie man gelegentlich Felder als Inbegriff möglicher Kraftwirkungen verstanden hat“ (S. 582). „Ein Ereignis ist ein räumlich und zeitlich begrenzter Geschehensakt.“ (S. 581). Die vorgetragene Theorie ist formal mit der Quantenmechanik identisch und beansprucht nicht eine Abänderung sondern eine Interpretation und Begründung der Quantenmechanik zu sein. Zur Vereinfachung der Betrachtung teilt Verf. den Raum in Z Zellen ein und charakterisiert einen Zustand durch die $n \cdot Z$ Wahrscheinlichkeiten für jeden möglichen Ausfall von n verschiedenen Experimenten, von denen eines die Ortsmessung ist. Er setzt an, daß der so definierte Zustand zu einer Zeit den ebenso definierten

Zustand zu jeder anderen Zeit vollständig determiniert. Die Funktion, welche die Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeiten zu einer Zeit von den Wahrscheinlichkeiten zu einer anderen Zeit an gibt, muß wegen der Häufigkeitsdeutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs linear sein. Die Quantenmechanik setzt ferner voraus, daß diese Funktion zeitlich umkehrbar ist. Die Zahl n bestimmt Verf. zu $Z = 1$ durch eine Abschätzung, deren Kern nach dem Verständnis des Ref. die zusätzliche Annahme ist, die Zustände zu allen Zeiten seien auch eindeutig determiniert durch die Z^2 Wahrscheinlichkeiten dafür, bei zwei Ortsmessungen zu verschiedenen Zeiten Teilchen in irgend zwei der Zellen vorzufinden. Alle gemachten Annahmen sind mit der Quantenmechanik in Einklang und führen, wie Verf. zeigt, zur Quantenmechanik. Dies wird in Kapitel 5 am einfachen Beispiel $Z = 2$ anschaulich durchgeführt und in den Schlußkapiteln im allgemeinen Fall mathematisch untersucht.

C. F. v. Weizsäcker.

Schönberg, M.: On the hydrodynamical model of the quantum mechanics. *Nuovo Cimento*, IX. Ser. 12, 103—133 (1954).

A new hydrodynamical model for the Schrödinger equation is discussed. The new model differs from that of Madelung by the existence of turbulence. It follows directly from the ordinary interpretation of the quantum mechanics, by the introduction of operators for the charge and current densities and the components of the stress tensor in the one particle formalism. The model is developed for any values of the spin. The Madelung fluid corresponds to the mean motion of the special turbulent medium. The quantum potential appears as a combination of a pressure with terms arising from the turbulence. It is shown that the quantization of the motion of the Madelung fluid introduces the right kind of turbulence. The trajectories of the de Broglie-Bohm theory appear as trajectories of the mean motion of the turbulent medium.

Zusammenfassung des Autors.

Glaser, Walter: Eine neue Begründung der wellenmechanischen Elektronentheorie. Österreich. Ingenieur-Arch. 8, 110—120 (1954).

L'A. se propose de déduire l'équation de Dirac d'un modèle physique dans lequel le vide est traité comme un milieu magnétique. On montre d'abord que l'introduction du vecteur d'intensité magnétique \mathfrak{M} et de la polarisation électrique \mathfrak{P}_0 qui en découle, laissent covariante l'équation de Lorentz régissant le mouvement des électrons. Puis, choisissant le vecteur \mathfrak{M} proportionnel à l'énergie par unité de charge, on écrit les équations fondamentales de la théorie des électrons qui doivent remplacer les équations classiques de Lorentz. On montre alors que les composantes ψ_1 et ψ_2 de la fonction d'ondes de Dirac déterminent $\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + \mathfrak{P}_0$, tandis que ψ_3 et ψ_4 fixent le champ magnétique. L'électron est alors considéré comme une distribution spatiale d'impulsion-énergie qui détermine toutes les grandeurs de champ telles que la charge, l'impulsion et le moment magnétique. Enfin, l'action d'un champ extérieur électromagnétique sur cette répartition d'impulsion-énergie est brièvement étudiée.

A. Visconti.

Kemmer, N.: A remark on quantum-mechanical perturbation theory. *Proc. Cambridge philos. Soc.* 50, 632—633 (1954).

Nach der Voraussetzung, daß der Hamiltonsche Operator H eines quantenmechanischen Problems in der Form $H = H^{(0)} + H^{(1)} + H^{(2)} + \dots$ angegeben werden kann (wo die $H^{(n)}$ mit der n -ten Potenz eines infinitesimalen Parameters abnehmen) und $H^{(0)}$ nicht-degeneriert und diagonal ist, sucht der Verf. nach einer Matrix S , welche den Operator

$$K = e^{iS} H e^{-iS} = H + i[S, H] + (i^2/2!)[S, [S, H]] + (i^3/3!)[S, [S, [S, H]]] + \dots$$

diagonalisiert, wo $[S, H]$ die Poissonsche Klammer bedeutet. Da die Diagonalisierung mit Hilfe einer Matrix S nicht durchgeführt werden kann, nimmt er die Matrix S in der Form $S = \sum S^{(n)}$ auf und gibt eine sukzessive Approximation für die Matrixelemente $H_{kk}^{(1)}, H_{kl}^{(1)}, H_{kk}^{(2)}, H_{kl}^{(2)}, \dots$ an. Unglücklicherweise kann man sehr schwer einsehen, wie schnell das Verfahren konvergiert, was die Benutzbarkeit der angegebenen interessanten Methode von dem Standpunkt der Anwendungen aus einigermaßen fraglich macht.

J. J. Horvath.

Demkov, J. N.: Die Symmetriegruppe eines isotropen Oszillators. *Žurn. eksper. teor. Fiz.* 26, 757 (1954) [Russisch].

Pétiau, Gérard: Sur certaines solutions à singularités localisées des équations d'ondes des corpuscules en mouvement rectiligne et uniforme. *C. r. Acad. Sci., Paris* 238, 998—1001 (1954).

An idea of M. L. de Broglie [*J. Phys. Radium*, VI. Sér. 7, 225—241 (1927)] to represent particles by singular solutions of the wave equations is developed. In

particular, singular solutions of the Klein-Gordon and Dirac equations are found, corresponding to particles with spherical or ellipsoidal symmetry in their restsystem. The singularity determining the position of the particle is supposed to rest or to move uniformly.

J. Rzewuski.

Petiau, Gérard: Sur les solutions à singularités localisées dans le mouvement rectiligne et uniforme du corpuscule de spin \hbar . C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 1568—1570 (1954).

Continuation of preceding paper (Cf. preceding review). Singular solutions for the general wave equation for particles with spin 0 or \hbar are found, corresponding to particles with spherical symmetry moving uniformly with the singularities.

J. Rzewuski.

Petiau, Gérard: Sur la représentation des corpuscules en mouvement rectiligne et uniforme, par des ondes à singularités localisées mobiles le long des trajectoires. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 1973—1975 (1954).

Continuation of preceding work (Cf. preceding reviews). A solution of the Klein-Gordon equation is determined possessing two singularities. This solution is supposed to correspond to a system of two particles moving uniformly or at rest.

J. Rzewuski.

Bertaut, E. F.: L'effet de tunnel et la mécanique classique. J. Phys. Radium **15**, 678—681 (1954).

Der Verf. führt einen komplexen Vierervektor für den Impuls der Teilchen ein, dessen reelle und imaginäre Teile aufeinander senkrecht stehen sollen. Auf die Möglichkeit einer solchen Darstellung — wenigstens im linearen Falle — hat schon L. Brillouin hingewiesen. Der Impuls des Teilchens läßt sich nämlich in der Form $p^2 = 2m(E - V)$ angeben und er wird im Falle $E > V$ eine reelle, bzw. im Falle $E < V$ eine imaginäre Größe sein. Der Verf. verallgemeinert diese Methode auch für den dreidimensionalen Raum und beweist, daß eine solche komplexe Darstellung auch für die Hamilton-Jacobische Wirkungsfunktion möglich ist. Diese komplexen Größen legen auch die Trajektorien des Teilchens eindeutig fest. Mit Hilfe des imaginären Teiles des Impulses kann man einen korrespondierenden Zusammenhang zwischen dem quantenmechanischen Tunneleffekt und den klassischen Bahnen angeben. Es sei aber darauf hingewiesen, daß eine solche komplexe Darstellung des Impulses nur rein formal sein kann, da diese Größe nur entweder reell ($E > V$), oder imaginär ($E < V$) ist, weswegen der komplexe Viererimpuls keine tiefere physikalische Bedeutung besitzt.

J. I. Horváth.

McMaster, William H.: Polarization and the Stokes parameters. Amer. J. Phys. **22**, 351—362 (1954).

Zusammenstellung von Problemen, bei denen Stokessche Parameter Anwendung finden können. Verf. bringt Beispiele aus der Optik und diskutiert Streuversuche für Teilchen mit Spin.

G. Höhler.

Shibata, Takashi: System of differential equations which are equivalent to Dirac's equation for hydrogen atom. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A **17**, 371—376 (1954).

Verf. zeigt, daß die Lösung des folgenden Systems von 16 Gleichungen: $(\partial_i - \Gamma_i) \psi = \Sigma_i \psi$ in der ψ ein Dirac-Spinor, Γ_i und Σ_i vierreihige Matrizen sind, unter (in der Arbeit nicht näher angegebenen) Bedingungen mit den Lösungen der Diracgleichung selbst identisch sind. Explizit gezeigt wird dies nur für die Behandlung des Wasserstoffatoms.

F. Penzlin.

Costa de Beauregard, Olivier: Théorie covariante relativiste de la solution de l'équation de Gordon. C. r. Acad. Sci., Paris **239**, 1357—1359 (1954).

Rubinow, S. I.: Generalized variational principle for the scattering amplitude. Phys. Review, II. Ser. **96**, 218—219 (1954).

Für die Berechnung der Phasenänderungen in der von E. Guth und Th. Sexl

entwickelten Theorie der Streuung von Teilchen an Atomkernen wurden von J. Schwinger, Phys. Review, II. Ser. 72, 742 (1947) und L. Hulthén, dies. Zbl. 31, 401, ein Variationsprinzip formuliert; das in der vorliegenden Arbeit auf die gesamte Streuamplitude $f(\mathbf{f}_i, \mathbf{f})$ ausgedehnt wird, wobei die Wellenfunktion ψ_i die asymptotische Gestalt haben soll $\psi_i \rightarrow e^{i(\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{r})} - f(\mathbf{f}_i, \mathbf{f}) e^{ikr} r$ ($i = 1, 2$).

Th. Seel.

Moses, H. E.: Application of variational principles to scattering problems. Phys. Review, II. Ser. 96, 519—522 (1954).

Der Verf. modifiziert die bekannten Variationsverfahren von Schwinger und Hulthén zur Lösung gewisser Streuprobleme, bei welchen nur ein Teil des Streupotentials als klein anzusehen ist. Es gelingt ihm, Näherungsausdrücke für diesen Term anzugeben, welche die Lösung dieses Problems vereinfachen. *P. Urban.*

Mapleton, Robert A.: Cross-section theorem. Phys. Review, II. Ser. 96, 415—418 (1954).

Der Verf. leitet ein Theorem für den Wirkungsquerschnitt eines Systems ab, das aus mehreren identischen Partikeln besteht. Es ergibt sich der Wirkungsquerschnitt für alle Prozesse, wie elastischen, inelastischen und Ionisierungsprozeß in Form des Imaginärteiles einer Linearkombination der direkten und ausgetauschten Amplituden zum Streuwinkel Null. *P. Urban.*

Baroncini, D.: Un metodo per i problemi d'urto con un potenziale Coulombiano modificato. Nuovo Cimento, Ser. IX 11, 688—691 (1954).

Deprit, André: Problèmes de Cauchy en théorie quantique des champs. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, I. Sér. 68, 119—132 (1954).

L'A. considère les équations d'ondes de particules libres de la théorie quantique des champs (ou les équations du vecteur d'état en première quantification) et étudie la connexion entre les fonctions de Green (propagateurs de particules libres) et le problème de Cauchy relatif à ces équations. Il se place dans le cadre de la théorie des distributions de Schwartz en considérant les fonctions de Green non comme des fonctions, mais comme des distributions. L'étude est faite avec toute la précision dans les définitions et le souci de rigueur que peut souhaiter le mathématicien pur et met en évidence les structures algébriques et topologiques des propagateurs.

A. Visconti.

Bogoljubov, N. N.: Über die Darstellung der Green-Schwingerschen Funktionen mit Hilfe von Funktionalintegralen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 99, 225—226 (1954) [Russisch].

Es wird ein dynamisches System, bestehend aus Fermion- und Bosonfeld, betrachtet und die Lagrange-funktion der Wechselwirkung aufgestellt. Sodann werden für dieses Problem die Schwinger-Green-Funktionen angegeben. Als Ziel der Arbeit wird die Gewinnung der „funktionellen Quadratur“ für die Darstellung der Schwinger-Greenschen Funktionen durch die gewöhnliche Greensche Funktion eines Fermions im klassischen Bosonfeld q angegeben. Mit Hilfe eines Feynman-Integrals werden diese Funktionen ausgerechnet. Am Schluß der rein theoretischen Arbeit wird noch angegeben, daß die Schwinger-Green-Funktionen, welche Strahlungskorrekturen berücksichtigen, durch Mittelung der gewöhnlichen Greenschen Funktionen über die Quantenschwankungen des Bosonfeldes q erhalten werden können. In der Arbeit wird als interessant erwähnt, daß ein Faktor der Endformel der Vakuum-polarisation entspricht, ferner daß man im Fall $M = 0$ (M = Lagrange-funktion, die vom Bosonfeld q allein herrührt) eine Formel erhält, die in einer Arbeit von S. Edwards [Philos. Mag., VII. Ser. 15, 758—761 (1954)] angegeben ist. *F. Cap.*

Jauch, J. M.: A note concerning the quantization of spinor fields. Helvet. phys. Acta 27, 89—98 (1954).

Verf. untersucht die Folgerungen, die man aus den Vertauschungsrelationen $[\psi(x), \psi(x')]_{\pm} = i(\gamma^0 \epsilon - m) D(x - x')$ mit Hilfe der Forderung der Invarianz gegen

Zeitumkehr über die Form des Antikommutators $[\psi(x), \psi(x')]_{\pm}$ ziehen kann. Das Ergebnis lautet: $[\psi(x), \psi(x')]_{\pm} = i \varrho (\gamma \hat{c} - m) D(x - x')$ ($\hat{\psi}$ ist im wesentlichen der transponierte Spinor), wo ϱ eine reelle Zahl mit $0 \leq \varrho \leq 1$ ist. Nur wenn man die Eichinvarianz verlangt, oder zusätzliche Forderungen an die Darstellung der räumlichen Spiegelungen stellt [Caianiello, Phys. Review, II. Ser. **86**, 564 (1952)] ergibt sich die von Schwinger (dies. Zbl. **43**, 422) angegebene Form mit $\varrho = 0$. Die Theorie von Majorana (dies. Zbl. **16**, 427) entspricht dem Wert $\varrho = 1$. [Vgl. hierzu die Diskussion zwischen Burton und Tauschek (dies. Zbl. **50**, 223; **51**, 210) und Schwinger (dies. Zbl. **51**, 210)].

F. Penzlin.

Eden, R. J.: Covariant integral equations for Heisenberg operators. Proc. Cambridge philos. Soc. **50**, 592—603 (1954).

Der Verf. beschäftigt sich mit einem System von Integralgleichungen für Vakuum Erwartungswerte von Produkten von Heisenbergoperatoren. Diese Gleichungen werden in der vorliegenden Arbeit „die Gleichungen von Matthews and Salam“ genannt. Der Verf. gibt sehr ausführliche Regeln an, mit welchen es möglich sein soll, ohne Zwischenrechnungen die M.-S.-Gleichungen für verschiedene Arten von Produkten direkt niederzuschreiben. Nach der Meinung des Ref. wären solche Regeln nützlich, wenn man sich einmal überzeugt hätte, daß die Grundgleichungen und insbesondere die in ihnen gemachten Näherungen einen physikalischen Sinn haben. Soweit es dem Ref. bekannt ist, fehlt bis jetzt eine solche Untersuchung.

G. Källén.

Heisenberg, W.: Zur Quantisierung nichtlinearer Gleichungen. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl., math.-phys.-chem. Abt. **1953**, 111—127 (1953).

Verf. schlägt ein Verfahren zur Behandlung wesentlich nichtlinearer Feldgleichungen vor. In Teil I wird dieses Verfahren am Beispiel des anharmonischen Oszillators demonstriert: Zunächst wird die Bewegungsgleichung übergeführt in ein unendliches Differentialgleichungssystem für die durch

$$(*) \quad \tau(t_1 \cdots t_k | t'_1 \cdots t'_l) = \langle 0 | T \{ q(t_1) \cdots q(t_k) p(t'_1) \cdots p(t'_l) \} | \Phi \rangle$$

definierten τ -Funktionen. Da der Verf. die Eigenwertbestimmung im Auge hat, benutzt er im folgenden nur die Funktionen $\tau(k, l)$, die sich durch Gleichsetzen aller Zeiten in (*) ergeben. Die Näherungsmethode besteht nun darin, gewisse Linearkombinationen $q(k, l)$ der $\tau(i, j)$ mit $i + k, j + l$ für $k + l = N$, wo N beliebig vorgegeben werden kann, gleich 0 zu setzen. Die Koeffizienten der τ 's in $q(k, l)$ sind Potenzprodukte von $\tau_{00}(2, 0)$ und $\tau_{00}(0, 2)$, wobei der Index 00 andeutet, daß auch für Φ in (*) der Vakuumzustand einzusetzen ist. Damit reduziert sich das Gleichungssystem auf ein endliches. Der Vergleich mit der numerischen Lösung des Problems zeigt, daß bei $N = 3$ der Fehler in den vier tiefsten Eigenwerten unter 10% liegt. In Teil II werden dieselben Methoden auf eine nichtlineare Spinorgleichung angewandt. Das Kernproblem ist die geeignete Bestimmung der τ_{00} (vgl. auch das folgende Referat).

F. Penzlin.

Heisenberg, W.: Zur Quantentheorie nichtrenormierbarer Wellengleichungen. Z. Naturforsch. **9a**, 292—303 (1954).

Die im vorhergeh. Referat vorgeschlagene Methode wird auf die Feldgleichung $\gamma_\mu \partial_\mu \psi + l^2 \psi(\psi^\dagger \psi) = 0$ angewandt. Insbesondere werden explizite Ausdrücke für die τ_{00} angegeben. Dabei spielt ein „symbolischer“ Hilbertraum eine Rolle, der im wesentlichen nur dazu dient, die bei kleinen Entfernungen auftretenden Divergenzen zu beseitigen. Schließlich werden die niedrigsten Masseneigenwerte für ein Fermiteilchen (explizit) und für ein Bosonenteilchen bestimmt.

F. Penzlin.

Freese, Ernst: Gebundene Teilchen und Streuprobleme in der Quantenfeldtheorie. Z. Naturforsch. **8a**, 776—790 (1953).

Zunächst werden die „Wellenfunktionen“ definiert durch:

$$\varphi(x_1 \cdots x_l | y_1 \cdots y_n | z_1 \cdots z_n) = (l! m! n!)^{-1/2} (\Psi_H^0 | A_H(x_1) \cdots \psi_H(y_1) \cdots \psi_H'(z_1) \cdots \Psi_H^s).$$

Dabei bedeuten die Doppelpunkte das S -Produkt von Wick [Phys. Review, II. Ser. 81, 115 (1951)]; der Index H deutet die Heisenbergdarstellung für die Operatoren an. Einige grundlegende Eigenschaften dieser Wellenfunktionen, sowie ihr Zusammenhang mit den Übergangsamplituden werden hergeleitet. Schließlich schreibt Verf. Differential- und Integralgleichungen für die Wellenfunktion an, die sich aus entsprechenden Gleichungen für die „ τ -Funktionen“ herleiten. Die τ -Funktionen sind wie die Wellenfunktionen definiert, nur daß an Stelle des S -Produktes ein T -Produkt (nach Wick) steht. Mit Hilfe der Wellenfunktionen lassen sich alle physikalisch interessanten Größen berechnen. Der Zusammenhang mit der Dyson'schen S -Matrix wird angegeben.

F. Penzlin.

Freese, Ernst: Die Wellengleichungen der Quantenelektrodynamik. Acta phys. Austr. 8, 289—308 (1954).

Der im vorstehenden Referat skizzierte Formalismus wird auf die Quantenelektrodynamik angewandt. Insbesondere werden berechnet: Grund- und angeregte Zustände eines an ein äußeres Feld gebundenen Elektrons, Zerfalls- und Übergangswahrscheinlichkeiten, Bindungsenergie und Zerfallswahrscheinlichkeit von Positronium und die Ausstrahlung eines äußeren Stromes. Die Endformeln sind mit den von anderen Autoren gewonnenen identisch.

F. Penzlin.

Newton, Roger G.: Radiative effects in a constant field. Phys. Review, II. Ser. 96, 523—528 (1954).

Der Verf. studiert den sogenannten Massenoperator des Elektrons in einem homogenen, äußeren magnetischen Feld. Hierbei wird das Strahlungsfeld nur in Näherung ϵ^2 berücksichtigt, während das äußere Feld mit größerer Genauigkeit behandelt wird. Speziell will der Verf. zeigen, daß die bei diesem Problem auftretenden „Ultrarotdivergenzen“, die bei einer direkten Entwicklung nach dem äußeren Feld erhalten werden, bei einer besseren Rechnung nicht auftreten. Statt einer solchen Entwicklung erhält der Verf. eine Reihe der Form $\sum_n a_n H^n + \sum_n b_n H^n \log |H|$, wo

die Koeffizienten a_n und b_n auch bei verschwindender Photonenmasse endlich bleiben. Für das anomale magnetische Moment des Elektrons und für die Ruhemasse werden die ersten Koeffizienten explizit angegeben. Ähnliche Ergebnisse sind schon früher von Gupta (dies. Zbl. 32, 238) und von Demeur [Acad. Roy. Belgique, Cl. Sci., Mém. Coll. 8 28, Nr. 5, 98 p. (1953)] erhalten worden. Die in der vorliegenden Arbeit gebrauchte Methode kann nicht bei räumlich variablen Feldern verwendet werden.

G. Källén.

Takahashi, Yasushi: On gauge invariance and the structure of elementary particles. Progress theor. Phys. 11, 251—263 (1954).

Verf. zeigt, daß man die nicht eichinvarianten Teile der zweiten Näherung in der Photonselbstenergie und im 2γ -Zerfall der π^0 -Mesonen durch den Vakuum Erwartungswert der Spur des Energie-Impulsensors $\langle T_{\mu\nu} \rangle_0$ ausdrücken kann (und seine Ableitungen nach z). Setzt man nun für $T_{\mu\nu} \rangle_0$ statt der bei der mathematischen Auswertung dieses Ausdrucks sich ergebenden Formeln den aus Dimensionsbetrachtungen folgenden Ausdruck $\langle T_{\mu\nu} \rangle_0 = \alpha z^4$ ein, so verschwinden diese Terme, wie es auf Grund der Eichinvarianz sein muß.

F. Penzlin.

Kothari, L. S.: Riesz potential and the elimination of divergences from quantum electrodynamics. Proc. phys. Soc., Sect. A 67, 17—24 (1954).

Le but de ce travail est de montrer que l'utilisation du potentiel de Riesz permet d'éviter l'introduction explicite des champs à masses auxiliaires des méthodes de régularisation. En effet, l'introduction de ce potentiel donne la possibilité de calculer les intégrales divergentes de la Théorie quantique des champs d'une façon cohérente. L'A. étudie d'abord la quantification de ce potentiel et l'élimination de ses composantes longitudinales. Puis, il montre que l'introduction de ce potentiel modifie le propagateur D_c du photon de telle sorte que l'intégrale donnant la masse propre de l'électron se trouve affectée d'un poids, fonction de la masse (variable) du photon: le résultat final obtenu est le résultat bien connu. Considérant le partie-sommet (vertex part), on obtient également le résultat habituel, mais avec l'avantage qu'au lieu d'introduire,

comme Feynman, une masse minimum pour les photons, on a simplement à prendre une valeur principale d'intégrale. L'étude de l'énergie propre du photon est renvoyée à une publication ultérieure. *A. Visconti.*

Kothari, L. S.: Riesz potential and the elimination of divergences from quantum electrodynamics. III. Proc. phys. Soc., Sect. A **67**, 1021—1023 (1954).

In Fortsetzung früherer Arbeiten (vorsteh. Referat und dies. Zbl. **55**, 428) erreicht Verf. durch eine geringe Modifikation des Verfahrens, daß die Photon-selbstenergie durch einen eichinvarianten Ausdruck dargestellt ist. *F. Penzlin.*

Tzou, K. H.: Sur les champs vectoriel et pseudovectoriel. J. Phys. Radium **15**, 559—562 (1954).

Verf. betrachtet ein Vektor- (bzw. Pseudovektor)-Feld in allgemeiner Kopplung an ein Diracfeld. Dabei wird jedoch nicht angenommen, daß eine Nebenbedingung bez. der Divergenz des Feldvektors besteht. Es gelingt, die Feldgleichungen bei voller Wechselwirkung aufzuspalten in eine skalare (bzw. pseudoskalare) und eine vektorielle (bzw. pseudovekterielle) Gleichung, wobei in der letzteren die bekannte Nebenbedingung gilt, so daß sie ein reines Spin-1-Feld darstellt. Die Arbeit schließt mit einigen Bemerkungen zur Wechselwirkungsdarstellung. *F. Penzlin.*

Utiyama, Ryôyû and Tsutomu Imamura: A remark on the infinities due to the new complex poles of modified propagators. Progress theor. Phys. **11**, 606—607 (1954).

Die vorliegende Arbeit stellt eine Ergänzung zu der Arbeit von G. Feldman über „modified propagators“ (dies. Zbl. **55**, 215) dar. Insbesondere wird nachgewiesen, daß die bei Feldman aufgetretenen Schwierigkeiten verschwinden, wenn die Störungsreihe gleichmäßig konvergiert(!). *F. Penzlin.*

Hain, Klaus: Über gebundene Zustände von π -Mesonen. Z. Naturforsch. **9a**, 495—508 (1954).

Diese für die Theorie der Kernkräfte sehr wichtige Arbeit untersucht die Möglichkeit, ob zwei pseudoskalare Mesonen, die durch Vermittlung eines Nukleon- und Antinukleonfeldes in Wechselwirkung stehen, einen gebundenen Zustand haben können oder nicht. Es zeigt sich, daß zwei verschiedene gebundene Zustände möglich sind, deren Eigenwerte durch Lösung der Bethe-Salpeter-Gleichung mit Hilfe des Ritzschen Verfahrens gewonnen werden. In erster störungstheoretischer Näherung besteht die Wechselwirkung zwischen den Pionen aus einer abstoßenden δ -artigen Kraft, die zur Erklärung der Absättigung der Kernkräfte dienen kann, und einer anziehenden sehr kurzreichenden Kraft. Der eine Bindungszustand kann als Doppelvektormeson angesprochen werden und kann vielleicht zur Erklärung der Spinbahnkopplung dienen. *F. Cap.*

Bonnevay, Georges: Sur la contribution de l'interaction méson-méson aux forces nucléaires. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 1641—1643 (1954).

Um bei der $PS\bar{p}s$ -Theorie eine Renormierung zu erreichen, ist bekanntlich die Einfügung eines nichtlinearen Meson-Meson-Wechselwirkungsterms notwendig. Im Anschluß an Arbeiten von Levy (dies. Zbl. **48**, 224, 226) wird der Einfluß dieses Terms auf die Nukleon-Nukleon-Kraft untersucht. Es zeigt sich, daß auch die Meson-Nukleon-Streuung beeinflusst werden muß. *F. Cap.*

Minami, Shigeo: Note on meson-nucleon interaction. Progress theor. Phys. **11**, 123—124 (1954).

Der Verf. untersucht, ob bei der Meson-Nukleon-Streuung P - oder D -Wellen eine Rolle spielen und kommt zum Schluß, daß bei Heranziehung anderer Meson-Nukleon-Reaktionen eine Entscheidung über die Wirksamkeit der D -Welle auf experimentellem Wege möglich sein müßte. *F. Cap.*

Eder, G.: Nukleon-Pion-Wechselwirkungen. Acta phys. Austr. **8**, 234—275 (1954).

Die Arbeit stellt einen ausgezeichneten Bericht über die in den letzten Jahren

bis Ende 1953) erzielten Fortschritte auf dem Gebiete der Nukleon-Pion-Wechselwirkung dar und umfaßt folgende Abschnitte: 1. freies Pionfeld, 2. der isotope spin, 3. die Neutron-Proton-Wechselwirkung bei niedriger und hoher Energie (inschließlich einer Besprechung der Tensorkraft beim Deuteron), 4. Proton-Proton-Streuung, 5. Pion-Nukleon-Streuung, 6. Photoerzeugung von Pionen. Der Bericht umfaßt ein ausführliches und wertvolles Literaturverzeichnis. *F. Cap.*

Chiba, Shin: Renormalization in the covariant treatment of pion-nucleon scattering. *Progress theor. Phys.* **11**, 494—496 (1954).

Ito, Daisuke and Hiroshi Tanaka: Covariant subtraction of „overlapping divergences“ appearing in the pion-nucleon scattering. *Progress theor. Phys.* **11**, 501—503 (1954).

Pandya, S. P.: Classical scattering of mesons. *Phys. Review, II. Ser.* **94**, 1037—1038 (1954).

Der Verf. zeigt für die skalare und vektorielle Mesontheorie, daß die Wirkungsquerschnitte für die Meson-Nukleonstreuung nach der von ihm behandelten klassischen Theorie und nach der „action at a distance theory“ verschieden groß sind und daß sich die Ergebnisse durch solche Terme unterscheiden, die die Wirkung des Mesonfeldes auf das Nukleon beinhalten. *F. Cap.*

Jean, Maurice: Sur la dérivation du potentiel nucléaire à partir de la théorie métrique pseudoscalaire. *C. r. Acad. Sci., Paris* **238**, 565—567 (1954).

Ebenso wie Klein (dies. Zbl. **50**, 440; *Phys. Review, II. Ser.* **91**, 1017 (1953)) untersucht Verf. das Nukleon-Nukleon-Potential der pseudoskalaren Mesonentheorie. Verf. wendet jedoch eine etwas andere Methode an und ist daher in der Lage, auch den Einfluß der „Dämpfung“ durch Nukleonenpaare zu erfassen. Es zeigt sich, daß in gewissen Grenzen die Reihenentwicklungen konvergieren und mit den bereits von anderen Autoren verschiedenen Graphen zugeordneten Termen übereinstimmen. *F. Cap.*

Jakšić, Borivoj: Selection rules for meson decays into two bosons imposed by the conservation of angular momentum and parity. *Soc. Sci. natur. Croatica, Period. mat.-phys. astron., II. Ser.* **9**, 27—33 und kroatische Zusammenfassg. 34 (1954).

Durand, Émile: Le champ \vec{E} et l'induction \vec{D} d'une charge électrique ponctuelle dans le vide. *C. r. Acad. Sci., Paris* **239**, 1478—1480 (1954).

L'A. étudie le potentiel de polarisation, ainsi que le potentiel scalaire et l'antipotential vecteur qui s'en déduisent, créé par une certaine distribution de dipôles tangents à une courbe arbitraire C passant par l'origine des coordonnées. Ses formules sont enfin étendues au système de deux courbes, symétriques par rapport à l'origine et polarisées en sens inverse. *A. Visconti.*

Braffort, Paul, Maurice Spighel et Christophe Tzara: Quelques conséquences de la théorie de l'action à distance en électro-dynamique classique. *C. r. Acad. Sci., Paris* **239**, 157—160 (1954).

Die Verf. untersuchen die elektromagnetische Feldenergie einer freien Punktladung und eines harmonischen Oszillators in der Absorbertheorie. Sie finden, daß diese divergieren kann, wenn die mittlere Energiedichte $K(\omega)$ (hervorgerufen durch die statistischen Bewegungen der Absorberteilchen) mit ω zu stark ansteigt. *H. Kümmel.*

Crownfield jr., Frederic R. and Peter Havas: The classical equations of motion of point particles in neutral meson fields. *Phys. Review, II. Ser.* **94**, 471—477 (1954).

Es wird die (relativistische) Bewegungsgleichung eines Mesons nach einer von Infeld und Wallace (dies. Zbl. **23**, 284) angegebenen, auf der (linearisierten Näherung) der allgemeinen Relativitätstheorie beruhenden Methode abgeleitet. Im Gegensatz zu anderen Methoden der Herleitung treten hier keine Mehrdeutigkeiten auf. Das Ergebnis stimmt mit dem nach der Methode von Dirac (dies. Zbl. **23**, 427) von verschiedenen Autoren gewonnenen überein. *F. Penzlin.*

Majumdar, R. C., S. Gupta and S. K. Trehan: The classical equations of a point particle in a symmetric meson field. *Progress theor. Phys.* **12**, 31—48 (1954).

Die Bewegungsgleichungen von Punktpartikeln in ladungssymmetrischer Wechselwirkung mit (vektoriellen und skalaren) Mesonen nach der Fernwirkungstheorie werden (analog der Fokkerschen Methode der Elektrodynamik) aus einem Variationsprinzip hergeleitet. Die Lagrange-Funktionen, Stromdichte und Dipoldichte werden durch Rieszsche Funktionen ausgedrückt. Gewisse formal eingeführte Größen — die „adjungierten Felder“ — erfüllen die Mesonenfeldgleichungen. Die Variation des Wirkungsintegrals liefert die Bewegungsgleichungen der Partikel. Die Streuung von Mesonen an Nukleonen wird untersucht. Eine Diskussion der gefundenen Wirkungsquerschnitte wird angekündigt.

H. Kümmel.

Broglie, Louis de: Considérations de mécanique classique préparant la justification de la mécanique ondulatoire des systèmes dans la théorie de la double solution. *C. r. Acad. Sci., Paris* **239**, 521—524 (1954).

Broglie, Louis de: Justification, du point de vue de la théorie de la double solution, de la mécanique ondulatoire des systèmes dans l'espace de configuration. *C. r. Acad. Sci., Paris* **239**, 565—567 (1954).

Ces deux Notes forment un tout, elles ont, en effet, pour but de justifier, du point de vue de la théorie de la double solution, l'emploi de la Mécanique ondulatoire des Systèmes dans l'espace de configuration. Dans la première Note, l'A. se place dans le cadre la Mécanique classique donc à l'approximation de l'Optique géométrique. Considérant un système formé de deux corpuscules en interaction, il étudie la relation entre la fonction de Jacobi totale du système (donc dépendant de 6 variables, coordonnées de chacun des points et de t) et les fonctions de Jacobi de chacun des corpuscules rapporté à un système d'axes de directions fixes et ayant comme origine l'autre des corpuscules. On obtient ce faisant la relation entre les phases des ondes π individuelles et celle de l'onde ρ du système à l'approximation indiquée. La deuxième Note étend ces résultats au delà des limites de l'optique géométrique. Un raisonnement du même type que celui précédemment indiqué utilise cette fois l'équation d'ondes (au lieu de l'équation de Jacobi). Finalement, on vérifie de cette façon les résultats de la Note (ce Zbl. **48**, 220) qui donnait les conditions nécessaires et suffisantes pour que soit justifié, du point de vue de la double solution, l'emploi de la Mécanique ondulatoire dans l'espace de configuration. Ces raisonnements, valables en l'absence d'un champ extérieur, demeurent valides quand les champs extérieurs sont sensiblement constants dans toute l'étendue du système et qu'il y a séparation entre le mouvement du centre de gravité et le mouvement relatif.

A. Visconti.

Fer, Francis: Construction d'une solution à singularité mobile de l'équation $\Delta u = (1/c^2) (\partial^2 u / \partial t^2) = 0$. *C. r. Acad. Sci., Paris* **238**, 567—569 (1954).

L'A. construit (et étudie les différentes propriétés), par une généralisation de la formule de Liénard-Wiechert, une solution de l'équation: $\square u = 0$ comportant une singularité linéaire mobile, dont le trajectoire obéit à la formule de guidage de L. de Broglie. L'existence de tels types de solutions est donc de ce fait démontrée.

A. Visconti.

Hellund, Emil J. and Katsumi Tanaka: Quantized space-time. *Phys. Review*, II. Ser. **94**, 192—195 (1954).

Die Verff. betrachten die Raum-Zeitkoordinaten als Operatoren. Speziell wird $x'_\mu = x_\mu - l^2 \dot{x}_\mu \dot{x}_\nu \dot{x}_\nu$ vorgeschlagen (x' sind die Operatoren, x aber c -Zahlen, l ist die Elementarlänge). Es werden die Vertauschungsrelationen mit dem Energie-Impulsvektor p_μ ($\hbar i$) \dot{x}_μ und Unschärferelationen aufgestellt. Eigenwerte und Eigenfunktionen dieser x' -Operatoren bestimmt. Nach Meinung der Verff. sind nur solche Lösungen von Feldgleichungen zulässig, die Eigenvektoren zu $x_\mu = i c t'$ sind, d. h. die „zeitlich lokalisierbar“ sind.

F. Penzlin.

Kernphysik:

Bloch, Ingram and Yü-Chang Hsieh: Some properties of nuclear normal modes. *Phys. Review*, II. Ser. **96**, 382—385 (1954).

Nimmt man an, daß von N Teilchen jedes an jedes elastisch gebunden ist — wobei die elastischen Konstanten von Fall zu Fall verschieden sein können —, so kann man durch Übergang

a Normalkoordinaten (bei $N = 2$ Abstand und Schwerpunkt) die Hamiltonfunktion in eine Summe von N unabhängigen Hamiltonfunktionen aufspalten, wobei jede wieder einen harmonischen Oszillator beschreibt. Auf die Quantenmechanik angewandt, bedeutet dies Separierbarkeit und Darstellbarkeit der Eigenfunktion als Produkt von Oszillatorfunktionen. In der vorliegenden Arbeit wird diese Vorstellung auf einen Kern angewandt, wobei zwei der Normalkoordinaten um den Schwerpunkt und durch Abstand Neutronenschwerpunkt — Protonenschwerpunkt gegeben sind und die übrigen weniger anschaulich bleiben. Dem Pauliprinzip wird genügt, indem die erzeugenden Funktionen für die hermiteschen Funktionen zu einem antisymmetrischen Produkt zusammengefaßt werden (wobei es nicht möglich ist, die Normalkoordinaten so zu wählen, daß der Vertauschung zweier Teilchen diejenige zweier Normalkoordinaten entspricht — ein Umstand, der das Arbeiten mit Normalkoordinaten in der Quantenmechanik unerfreulich macht). Die Termstruktur ist dieselbe wie von Teilchen ohne Wechselwirkung im gemeinsamen Oszillatorpotential, das gleiche gilt für Parität, Spin und Bahnmoment im Grundzustand. Das jedem Physiker vertraute Unbehagen bei der Vorstellung von einander unabhängiger Teilchen im gemeinsamen Potentialtopf erfährt hier eine Milderung: Läßt man eine Analogie gelten, so kann man sagen, daß der augenscheinliche Erfolg des Schalenmodells weniger auf dem Bilde dieses gemeinsamen Potentials als auf der Existenz weitgehend voneinander unabhängiger „Normalschwingungen“ beruht (deren Form und zugehörige Normalkoordinaten man freilich noch nicht kennt) — eine wenigstens dem Reiz sympathischere Darstellung. Das behandelte Modell ergibt natürlich weder treffende „magische Zahlen“ noch Sättigung. Schließlich ist die niedrigste Anregung diejenige, in der alle Protonen gegen alle Neutronen schwingen. Tatsächlich liegt die entsprechende Energie bei schon im Kontinuum oder ist positiv und wirkliche Kerne haben viele gegen Spaltung oder Emission stabile Anregungszustände unter dieser. Endlich kann ein solcher wie hier behandelter Kern überhaupt weder spalten noch emittieren. Alle diese Punkte ließen sich zweifellos verbessern durch Änderung der Potentialform, Spin-Bahn-Kopplung, Wechselwirkung der „Normalschwingungen“ untereinander usw.

R. Hagedorn.

Tauber, G. E. and Ta-You Wu: Magnetic moment of K^{40} in intermediate coupling. Phys. Review, II. Ser. 94, 1307—1310 (1954).

Die Lage der niedrigsten Energieniveaus für K^{40} werden in Abhängigkeit von der Art der Kopplung zwischen den Nukleonen ausgerechnet und gezeigt, daß für jede von der reinen $L - S$ -Kopplung in Richtung auf $j - j$ -Kopplung abweichende Kopplungsart der Zustand mit $I = 4$ der tiefste ist, wie es sein muß. Unter Annahme einer aus Bartlett- und Majoranateil (entsprechend Streuexperimenten) geeigneten zusammengesetzten Austauschkraft und verschiedener Potentiale (Exponential, Yukawa, Gauß) wird dann für $I = 4$ das magnetische Moment berechnet und für jede Potentialsorte als Funktion des Kopplungsparameters für einige verschiedene Potentialreichweiten dargestellt. In jedem Fall läßt schon eine geringe Abweichung von der LS -Kopplung das magnetische Moment den experimentellen Wert $\mu = -1,29 \mu_N$ erreichen.

R. Hagedorn.

Millard, F. J.: The odd-nucleon-plus-liquid-drop-model of heavy odd nuclei. Phys. Review, II. Ser. 93, 1297—1303 (1954).

Es wird die Wechselwirkung eines ungeraden Nukleons mit dem restlichen Kern untersucht, wobei dieser als deformierbar angesehen wird und Eigenzustände hat, die den niedrigsten Tropfenschwingungen entsprechen. Die Behandlung geschieht durch eine Störungsrechnung: Die ungestörten Zustände sind Linearkombinationen aus Produkten der Einteilchenwellenfunktionen mit den Eigenzuständen des schwingenden Tropfens. Als Störoperator wird die Wechselwirkung des ungeraden Nukleons mit der Abweichung des Potentials von der Form des kugelsymmetrischen Topfes benutzt und in erster Ordnung die Energien, magnetischen und Quadrupolmomente berechnet. Die Abweichung der magnetischen Momente von den Schmidt-Linien erfolgt im richtigen Sinne, ist aber zu klein, während die Quadrupolmomente zu groß herauskommen. Das liegt erstens an der vorausgesetzten schwachen Kopplung Nukleon-Tropfenschwingung und zweitens daran, daß nur ein freies Nukleon betrachtet wird, woraus folgt, daß die feineren Züge des Schalenmodells unterdrückt werden (z. B. Variation der Quadrupolmomente mit der Massenzahl besonders beim Passieren der magic numbers).

R. Hagedorn.

Brink, D. M.: Short range forces and nuclear energy levels in the neighbourhood of ^{208}Pb . Proc. phys. Soc., Sect. A 67, 757—772 (1954).

^{210}Bi hat neben zwei isomeren Zuständen, deren einer β - und ein anderer α -instabil ist, noch eine Reihe weiterer Zustände niedriger Energie ($< 40 \text{ MeV}$). Es wird versucht, die Klassifizierung dieser Zustände im Schalenmodell durchzuführen. ^{208}Pb hat mit 82 Protonen und 126 Neutronen eine doppelt abgeschlossene Schale und daher sollte das Bild von zwei Nukleonen im Potentialtopf des Blei-Rumpfes eine einigermaßen gute Näherung darstellen. Für diesen Potentialtopf wird Rechteckform angenommen, für die Wechselwirkung der beiden Nukleonen

untereinander ein Potential vom Rechtecktyp und auch Yukawatyp, deren Parameter aus Streuexperimenten bei niederen Energien entnommen werden. Alle vier Austauschformen werden in verschiedenen Kombinationen benutzt. Die Wechselwirkungsenergie der beiden Nukleonen wird in jj -Kopplung in erster Störungsnäherung ausgerechnet. Dabei erscheint das Matrixelement in einer Reihenentwicklung nach Potenzen der Reichweite der Kräfte zwischen den beiden Einzelnukleonen; diese Reichweite wird als klein angenommen. — Es zeigt sich eine größere Zahl von Konfigurationen mit niedriger Energie. Der Grundzustand kann entweder ungerader Parität mit Spin 0 oder 1 sein oder er hat einen hohen Spin (8, 9, 10), das Experiment spricht für die erste Möglichkeit.

R. Hagedorn.

Kanazawa, Akira and Masao Sugawara: Anomalous magnetic moment of nucleon and nucleon isobar. Progress theor. phys. **11**, 231—243 (1954).

Die Verff. beschreiben Nukleonenisobare durch die Spin-3 2-Gleichung von Rarita und Schwinger und leiten die anomalen magnetischen Momente der Nukleonen ab: +2,22 für das Proton und -2,20 für das Neutron. Während übliche störungstheoretische Methoden für die Berechnung des Momentes in einem schwachen magnetischen Feld und Abschneidemethoden verwendet werden, dürfte der einzig neue Gedanke eine Abänderung der Fortpflanzungsfunktion des Rarita-Schwinger-Feldes sein.

F. Cap.

Feshbach, H., C. E. Porter and V. F. Weisskopf: Model for nuclear reactions with neutrons. Phys. Review, II. Ser. **96**, 448—464 (1954).

Für die Reaktionen eines zusammengesetzten Atomkerns mit Neutronen ($E < 20$ MeV) wird durch geeignete Mittelung über die Resonanzstellen ein Grobstrukturproblem definiert. Die Lösung dieses Problems gestattet die Berechnung des mittleren totalen Wirkungsquerschnittes, des Wirkungsquerschnitts für die Bildung des Verbundkerns und des elastischen Streuquerschnitts, soweit dieser nicht durch den Verbundkern bestimmt ist. Die Wechselwirkung zwischen Neutron und Kern wird als Zweiteilchenproblem behandelt. Das Potential $V = V_0 - iV_1$ ist komplex. Der reelle Teil stellt das mittlere Potential im Kern dar, der imaginäre Teil bedingt Absorption, die zum Verbundkern führt. Beide werden in erster Näherung als rechteckige Potentialtöpfe gleicher Weite angesetzt. Es wird gezeigt, daß der totale Wirkungsquerschnitt und die Winkelabhängigkeit des Streuquerschnitts sowie die Neutronenresonanzen weitgehend durch die Grobstruktur bedingt sind und daher hier berechnet werden können.

K.-H. Höcker.

Turovcev, V. V. und I. S. Šapiro: Strahlender K-Einfang für verbotene Übergänge. Doklady Akad. Nauk SSSR. n. Ser. **95**, 777—779 (1954) [Russisch].

Mitter, H. und P. Urban: Zur Streuung schneller Elektronen. II. Bremsstrahlung. III. Strahlungskorrekturen. Acta phys. Austr. **7**, 436—445 (1953), **8**, 356—369 (1954).

II. Unter Benutzung der in I (dies. Zbl. **51**, 214) gewonnenen Resultate wird nach der Methode von Feynman und Dyson der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Bremsstrahlung in zweiter Bornscher Näherung berechnet. Der sich ergebende Ausdruck ist sehr unübersichtlich. Deshalb wird unter der Annahme eines reinen Coulombfeldes im extrem relativistischen Fall weiter gerechnet, und zwar a) für den Fall schwacher Bremsung und b) für den Fall starker Bremsung. III. Es werden auch noch die Strahlungskorrekturen für die Streuung schneller Elektronen in zweiter Näherung berechnet. Die außerordentlich unhandliche Formel wird auf den extrem relativistischen und den nichtrelativistischen Grenzfall spezialisiert. Verff. geben allerdings zu, daß eine experimentelle Überprüfung ihrer Resultate schwierig ist. Im Anhang wird das Herausfallen der Infrarotdivergenzen auch in zweiter Näherung nachgewiesen.

F. Penzlin.

Herbst, Roland F.: Nuclear forces and β decay matrix elements. Phys. Review, II. Ser. **96**, 372—373 (1954).

Rose, M. E. and R. K. Osborn: The pseudoscalar interaction and the beta spectrum of RaE. Phys. Review, II. Ser. **93**, 1315—1325 (1954).

Les AA. discutent la contribution d'un terme d'interaction pseudoscalaire dans le cas des transitions interdites dans la théorie de la radioactivité beta. On montre en utilisant la transformation de Foldy et Wouthuysen que l'interaction β ne peut se manifester que si les covariants associés aux leptons ne sont pas constants. La transformation canonique employée permet de préciser également les termes à considérer dans l'approximation non relativiste, pour tous les types d'interactions. Les éléments de matrices nucléaires sont calculés ensuite sans difficulté la méthode utilisée donnant automatiquement les tenseurs irréductibles et les effets de retard ne s'introduisant qu'en fin de calcul. La méthode appliquée au cas du radium E conduit à la conclusion que le spin du radium E ne peut être zéro mais est plutôt l'unité. *G. Petiau.*

Rose, M. E. and R. K. Osborn: Nuclear matrix elements in beta decay. *Phys. Review*, II. Ser. **93**, 1326—1336 (1954).

Les AA. évaluent en termes d'intégrales radiales en utilisant le modèle du couplage $j-j$ tous les éléments de matrices nucléaires intervenant dans la théorie de la radioactivité β dans le cas des configurations à un ou deux nucléons. Ces éléments de matrices sont exprimés complètement au moyen des coefficients de Racah et d'autres coefficients dérivés. *G. Petiau.*

Šklovskij, I. S.: Über die Natur der diskreten Quellen der kosmischen Radiostrahlung. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **98**, 353—356 (1954) [Russisch].

Ginsburg, V. L.: Über die Herkunft der kosmischen Strahlen. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **99**, 703—706 (1954) [Russisch].

Morrison, Philip, Stanislaw Albert and Bruno Rossi: The origin of cosmic rays. *Phys. Review*, II. Ser. **94**, 440—453 (1954).

Die von Fermi vorgeschlagene Theorie für die Entstehung und die Beschleunigung kosmischer Strahlung im interstellaren Raum wird genauer betrachtet und modifiziert, um insbesondere die experimentelle Beobachtung zu erklären, daß die primären Energiespektren für Protonen, Alphateilchen und schwere Kerne ganz ähnlich sind. Zur Erklärung dieser Tatsache wird angenommen, die mittlere Lebensdauer eines Höhenstrahlteilchens innerhalb der Milchstraße sei groß gegen die Zeit, die ein Teilchen benötigt, um auf geradem Wege aus der Milchstraße zu entweichen, und kurz gegenüber der mittleren Zeit zwischen zwei Stößen gegen interstellare Wasserstoff. Diese Annahme erfordert für die Beschleunigung der Teilchen beim Zusammenstoß mit den magnetisierten interstellaren Wolken einen wesentlich größeren Energiegewinn als die ursprüngliche Theorie, auf der anderen Seite aber auch geringere Injektionsenergien. Ein Diffusionsmodell auf Grund dieser Annahmen wird durchgerechnet und mit den experimentellen Tatsachen verglichen. Schließlich werden die astrophysikalischen Voraussetzungen diskutiert. *R. Lüst.*

Ott, Karl.: Numerische Rechnungen zur Kaskadentheorie. Energiebestimmung von π^0 -Mesonen. *Z. Naturforsch.* **9a**, 488—494 (1954).

In einer früheren Arbeit (in Heisenberg, Kosmische Strahlung, dies. Zbl. **50**, 444) wurde eine Theorie der Elektronen-Photonen-Kaskade für mittlere Energien (mit Berücksichtigung des Compton-Effekts) aufgestellt. In der vorliegenden Arbeit wird mit Hilfe einer elektronischen Rechenmaschine die nach dieser Theorie zu erwartende Anzahl der Elektronen einer Elektronen-Photonen-Kaskade in Blei als Funktion des Abstands vom Schauerursprung für einige Primärenergien (0.3 bis 300 GeV) numerisch berechnet, und zwar für den Fall eines primären Photons bzw. Elektrons und für ein primäres Spektrum von Photonen, wie es aus den beim Stoß zweier Nukleonen erzeugten π^0 -Mesonen durch $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ -Zerfall entsteht. Der Zweck dieser Rechnung ist hauptsächlich, aus Nebelkammeraufnahmen solcher Schauer den Energieinhalt der dabei erzeugten π^0 -Mesonen zu bestimmen. *P. Budini.*

Chartres, B. A. and H. Messel: Three dimensional theory of electron-photon showers. *Proc. phys. Soc., Sect. A* **67**, 158—166 (1954).

Die von Messel und Green entwickelte Methode (dies. Zbl. **47**, 452) zur Berechnung der verschiedenen Momente der Verteilungsfunktionen einer allgemeinen Kaskade wird auf die von einem Photon oder Elektron ausgelöste Elektronen-Pho-

tonen-Kaskade angewandt. Die zweiten Momente der Radial- und Winkelverteilung sind graphisch dargestellt als Funktion der Tiefe in der Kaskade und mit den früheren Rechnungen verglichen. *P. Budini.*

Tanaka, Katsumi: Čerenkov radiation. Phys. Review, II. Ser. **93**, 459–460 (1954).

Die Methode von V. L. Ginsburg [J. Physics Acad. Sci. USSR **3**, 95 (1940)] wird angewandt zur Berechnung der Čerenkov-Strahlung eines sich in einem isotropen Medium bewegenden Neutrons und derjenigen eines geladenen sich in beliebiger Richtung in einem einachsigen Kristall bewegenden Teilchens. *P. Budini.*

Bau der Materie:

Nikitin, A. A.: Über die verbotenen Linien Ca^+ im Sonnenspektrum. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **98**, 31–33 (1954) [Russisch].

Löwdin, Per-Olov: Studies of atomic self-consistent fields. II. Interpolation problems. Phys. Review, II. Ser. **94**, 1600–1609 (1954).

Teil I wurde in dies. Zbl. **50**, 232 angezeigt.

Tillieu, Jacques et Jean Guy: Calcul des susceptibilités et anisotropies magnétiques moléculaires en fonction de susceptibilités et anisotropies monoélectroniques. C. r. Acad. Sci., Paris **239**, 1283–1285 (1954).

Artmann, Kurt: Vervollständigte quantenmechanische Berechnung der Energie und der Normalschwingungen mehratomiger Moleküle. Z. Phys. **137**, 137–168 (1954).

Die quantentheoretischen Berechnungen der Kraftkonstanten mehratomiger Moleküle ergeben oft bedeutende Abweichungen gegenüber den empirischen Ergebnissen, die sich aus den Beobachtungen von Normalschwingungen sehr genau bestimmen lassen. Es ist das Verdienst des Verf., diese Schwierigkeiten beseitigt zu haben. Dies geschieht durch keinerlei neue physikalische Annahmen in der bisherigen Theorie, vielmehr war dies dadurch möglich, daß zwei rechnerische Vereinfachungen nicht mehr erlaubt sind, die bisher, ohne stichhaltig begründet worden zu sein, angewendet wurden. Nämlich erstens, daß die Eigenfunktionen des Zentralatoms aufeinander orthogonal sein sollen, und zweitens, daß nicht lokalisierte Valenzen ausgeschlossen werden können. Vielmehr ist Orthogonalität der Eigenfunktionen des Zentralatoms nach dem Pauliprinzip nur beim freien Atom zu fordern, während nach Eingehen der Bindung das Pauliprinzip auf das gesamte Molekül angewendet werden muß, wie es eben im Slaterischen Verfahren geschieht, wenn die Molekülfunktion des Vielelektronensystems antisymmetrisch ist, wobei die Eigenfunktionen des Zentralatoms keineswegs orthogonal zu sein brauchen. Bei der Berechnung der Energie selbst ist der Ansatz der lokalisierten Valenz ausreichend; die zu vernachlässigende Energiedifferenz gegenüber dem nichtlokalisierten Ansatz kann aber, wenn es die zweiten Ableitungen der Energie zu berechnen gilt, die für die Normalschwingungen des Moleküls entscheidend wichtig sind, diese sehr wesentlich abändern. Die Nichtorthogonalität und die Mitberücksichtigung der nichtlokalisierten Valenzen gehen als Ritzparameter in die Rechnungen ein, die auf H_2O und verwandte Moleküle wie H_2S und H_2Se angewendet werden. Der Verf. weist darauf hin, daß auch von dieser Seite her der unverständlich geringe Energieaufwand der N -Schwingung beim NH_3 , sowie eine geringere Ringspannung bei den Zykloparaffinen, verständlich gemacht werden könnten. Die Beseitigung der bisherigen Vernachlässigungen verringert nämlich die Kraftkonstanten, wie von der Erfahrung gefordert wird. Darüber hinaus ergeben die Rechnungen, daß beim H_2O (ebenso beim H_2S und H_2Se) mit nichthybridisierten Eigenfunktionen des Zentralatoms zu rechnen ist. Die erhebliche Spreizung des $\text{H}-\text{H}$ -Winkels im H_2O -Molekül ergibt sich schon bei Beseitigung der Vernachlässigungen. Die neue Theorie liefert eine dem Absolutbetrag nach kleinere Coulombenergie zwischen dem S- und H-Atom. Damit ergibt sich die in der alten Auffassung fehlende aber beobachtete Absättigung des H_2S -Moleküls. Als weiteres Resultat ergibt sich, daß, entgegen der Slater-Paulingsehen Auffassung, nach welcher die gewinkelte Valenz auf der Orthogonalität der Eigenfunktionen des Zentralatoms beruhen soll, auch der Heitler-Rumersche Näherungsansatz bei Berücksichtigung vierfacher Austauschintegrale die gewinkelte Valenz liefert, was nicht, wie im einzelnen gezeigt wird, mit der Orthogonalität der Zentralatomfunktionen zusammenhängt. In der Arbeit wird noch auf eine Reihe anderer, damit im Zusammenhang stehender physikalischer Fragen, eingegangen und durch eine Vielzahl von Rechnungen erläutert, die in einem mathematischen Anhang ausführlicher zu finden sind.

H. Preuss.

Artmann, Kurt: Hybridisierung, Gleichgewichtswinkel und Normalschwingungen von H_2O und verwandten Molekülen. Z. Phys. **138**, 640–675 (1954).

In dieser Arbeit wird auf die Hybridisation der beiden bindenden Eigenfunktionen des O-Atoms im H_2O (entsprechend im H_2S und H_2Se) eingegangen. Es zeigt sich, daß der H—H-Winkel durch eine Hybridisierung zwar eine Spreizung erfährt, die aber durch eine Hybridisierung des einsamen Elektronenpaares im wesentlichen wieder aufgehoben und im H_2S und H_2Se sogar überkompensiert wird. Da sich O- und H-Eigenfunktionen bei kleinen O—H-Abständen am meisten überlappen, könnte ein Maximum der Bindungsenergie von O—H bei kleinen Abständen auftreten, wenn nicht der Atomrumpf des O und besonders das Elektronenpaar, die H-Atome abstoßen. Damit der O—H-Abstand möglichst klein ausfallen kann, muß die wegdrückende Kraft der beiden H-Atome auf das Elektronenpaar möglichst groß sein, was dann erreicht ist, wenn ihre Wirkungen aus möglichst gleicher Richtung kommen. Damit ergibt sich eine Schrumpfung des Gleichgewichtswinkels durch Hybridisierung der Elektronenpaarschale. Die dargestellten Verhältnisse werden durch eine rechnerische Behandlung des Sechselektronenproblems ausführlich dargestellt. In diesem Rahmen wird auf die Frage der lokalisierten oder nichtlokalisierten Valenz sowie auf den Zusammenhang von zweiter Ableitung der Energie und Hybridisation eingegangen.

H. Preuss.

Fischer-Hjalmars, Inga: Hybridization of atomic orbitals in formation of molecules. Ark. Fys. 7, 165—183 (1954).

Der Verf. führt, ähnlich dem Prinzip der größten Überlappung (Überlappungsintegral), ein solches für ein bestimmtes Aggregat von Impuls- und Übergangsintegralen ein (the condition of maximum penetration), welches durch die self-consistent-field-Methode nahegelegt wird und vergleicht dieses Prinzip mit dem ersteren. Der Vergleich wird mittels der Hybridisation eines Zentralatoms durchgeführt, das Wasserstoffatome bindet, wie in den Molekülen LiH, HF, H_2O und NH_3 . Im einzelnen ist der Ausdruck (1) $P = \int q_a^* (-\frac{1}{2}) (1 - z_a r_1 - z_b r_b) q_a d\tau$ (z_a, z_b effektive Kernladungszahlen in den Eigenfunktionen des Zentralatoms q_a zum Minimum zu machen [I. Fischer, Ark. Fys. 5, 349—376 (1952)]), wobei q_a noch aus Linearkombinationen der Funktionen des ns - und np -Zustandes besteht. Der Hybridisationsparameter wird variiert. Der Verf. leitet eine allgemeinere Formel als (1) ab, die sich zu (2) $P = \int q_a^* (-\frac{1}{2}) (1 + V_a + V_b) q_n d\tau$ ergibt, wenn $V_b = -1/r_{1b} = \int q_b^* (2 - 1/r_{1b}) q_n (2) d\tau$ gesetzt wird und r_{1b} der Abstand des Elektrons 1 vom H-Atom und q_b die Funktion des H-Atoms ist. V_a bedeutet das Potential des Zentralatomumpfes. Die Rechnungen sind unter Vernachlässigung der H—H- und H-Elektronenpaar-Wechselwirkung durchgeführt worden. Bei mehreren Elektronen sind die Ausdrücke (2) zu addieren, wobei bei Elektronenpaaren $V_a = 0$ zu setzen ist. Es ergibt sich durchweg eine wesentlich geringere Hybridisation, als nach dem Prinzip der maximalen Überlappung. Der Unterschied beruht auf den verschiedenen Energien der $2s$ - und $2p$ -Elektronen. Die Untersuchungen werden auch auf die Berechnungen von Dipolmomenten ausgedehnt. Abschließend sind einige Zahlenwerte von Wechselwirkungsintegralen angegeben.

H. Preuss.

Lundqvist, Stig O.: A quantum mechanical investigation of the binding energy of the LiH-crystal. Ark. Fys. 8, 177—196 (1954).

Unter Verwendung der Eielektronenfunktionen der freien Ionen ist die Bindungsenergie des Lithiumhydridkristalls berechnet worden. Die Gesamtenergie wurde durch Variation der effektiven Ladungszahl des Wasserstoffions zum Minimum gemacht. Die Ergebnisse sind gleichzeitig in Abhängigkeit der Überlappung zwischen Nachbarn höherer Ordnung untersucht worden. Es ergab sich im Minimum eine Bindungsenergie von -205 kcal/Mol gegenüber dem Experimentalwert von -217 ± 7 kcal/Mol. Im Anhang wird auf die Berechnung von 3- und 4-Zentrenintegralen eingegangen.

H. Preuss.

Hurley, A. C.: The electrostatic calculation of molecular energies. I. Methods of calculating molecular energies. II. Approximate wave functions and the electrostatic method. III. The binding energies of saturated molecules. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 226, 170—178, 179—192, 193—205 (1954).

1. Neben dem üblichen Verfahren zur Berechnung der Molekülenergien, das mit Hilfe der durch den Hamilton-Operator entstehenden Integrale durchgeführt wird, werden die Virialmethode und die „elektrostatische Methode“ diskutiert. Die letztere wird vom Verf. in einer

Reihe von Arbeiten ausführlich behandelt. Der klassischen Kraft f_{α} zwischen den n Elektronen eines Moleküls und dem Kern α mit der Ladung Z_{α} , $f_{\alpha} = -Z_{\alpha} \sum_{a=1}^n \frac{\mathcal{R}_{\alpha}(a)}{R^3(a)}$ ($\mathcal{R}_{\alpha}(a) = \text{Vektor:}$

Elektron a — Kern α , $R = |\mathcal{R}|$) wird der Operator F zugeordnet, dessen wellenmechanischer Mittelwert $F = \int \psi F \psi d\tau$ mit einem geeigneten Funktionsansatz für die Molekülfunktion ψ gebildet wird. Wenn ρ die Summe aller Eielektronenladungsdichten darstellt, ergibt sich schließlich nach Addition der Kernwechselwirkungskraft $F_{\alpha n}$ für die auf einen Kern α eines Moleküls

wirkende Kraft zu $F_{\alpha} = F_{\alpha n} - Z_{\alpha} \int \frac{\mathcal{R}_{\alpha}(a)}{R^3(a)} \rho d\tau$. Dieser Berechnungsweg erfordert neben dem

Überlappungsintegral nur einige einfache Übergangsintegrale. Das Verfahren wurde auf das H_2 - und H_2^+ -Molekül angewendet. Einige Ergebnisse zeigen gute Übereinstimmung mit der Erfahrung, andere dagegen weichen sehr stark ab. So ergibt sich für H_2 unter Verwendung der „molecular orbitals“ im Grundzustand eine Bindungsenergie von etwa 3,7 eV bei einem Kernabstand von 0,95 Å (wirkliche Werte: 4,72 eV und 0,74 Å). Die Verwendung des Heitler-Londonschen Funktionsansatzes dagegen liefert 0,9 eV und 1,1 Å. Der Vergleich des $^3\Sigma_u^+$ -Zustandes für H_2 mit dem von James berechneten [J. Chem. Phys. 2, 794 (1934)] zeigt wieder gute Übereinstimmung. Dagegen weichen die Ergebnisse für den $^1\Sigma_u^+$ -Zustand des H_2 und für H_2^+ wiederum sehr stark ab. — II. Es wird auf die im Teil I auftretenden Unterschiede der Ergebnisse der verschiedenen Verfahren eingegangen und gezeigt, daß die elektrostatische Methode den üblichen Verfahren mit Hilfe des Hamiltonschen Integrals bezüglich der Ergebnisse äquivalent ist, wenn die in der ersten Methode verwendeten Funktionsansätze Variationsparameter (einschließlich eines Skalenfaktors) enthalten, deren Werte durch ein Variationsverfahren bestimmt worden sind (floating function). Dasselbe gilt für die Virialmethode. Als Beispiel werden die $^1\Sigma_u^+$ - und $^3\Sigma_u^+$ -Zustände des H_2 und des H_2^+ -Moleküls berechnet und dabei gewisse Anomalien in den früheren Rechnungen von Gurnee und Magee [J. Chem. Phys. 18, 142 (1950)] aufgeklärt. Abschließend werden Betrachtungen über die Dichteverteilungen bei kovalenten Bindungen angestellt. — III. Es wird ein allgemeiner Wellenfunktionsansatz gebildet, der, je nach Wahl der Parameter, die „molecular orbitals“-Funktionen oder die der „valence bond“ als Grenzfälle enthält. Die Bedeutung der Parameter wird diskutiert, sowie ihre Werte bezüglich der Bindungsstärken und der Ionenanteile der Bindungen angegeben. Als erstes Beispiel wird die Kraft zwischen zwei He-Atomen berechnet. Die Ergebnisse zeigen gute Übereinstimmung mit den Slaterschen Rechnungen [Phys. Review, II. Ser. 32, 349 (1928)]. Die Rechnungen am Li_2 -Grundzustand ergeben, daß der Heitler-Londonsche Funktionsansatz wiederum gute Übereinstimmung mit dem Experiment liefert, während nach der „molekular orbital“-Näherung keine Übereinstimmung zu erzielen war. Zum Vergleich mit der Erfahrung wurde die Morsekurve herangezogen. Beim LiH erwies sich der Ansatz der „molecular orbitals“ als günstiger. Der Vergleich mit dem Experiment wurde hier ebenfalls im Rahmen der Morsekurven vorgenommen und ergab gute Übereinstimmung. Abschließend wird auf die möglicherweise günstigen Funktionsansätze in dieser Methode zur Berechnung von anderen Molekülen eingegangen. Es scheint sehr angebracht, diese Möglichkeiten weiter zu verfolgen.

H. Preuss.

Pritchard, H. O. and F. H. Sumner: The application of electronic digital computers to molecular orbital problems. I. The calculation of bond lengths in aromatic hydrocarbons. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 226, 128—140 (1954).

Mit Hilfe des vereinfachten „self-consistent molecular orbitals“ (SCMO)-Verfahrens [Coulson und Longuet-Higgins, dies. Zbl. 29, 186; Pople, Trans. Farad. Soc. 49, 1375 (1953)] werden die Abstände in acht aromatischen Kohlenwasserstoffen (Ringsysteme) berechnet. Unter ihnen das Ovalen als 32-Zentrenproblem. Die auftretenden Säkulardeterminanten sind mit der Rechenmaschine MK II (Manchester) gelöst worden. Einzelheiten des Rechenprogramms werden diskutiert. Den experimentellen Werten (Röntgenstrahl-Kristallographie) sind die Ergebnisse der „molecular orbitals“ (Hückelsches Verfahren) und der SCMO gegenübergestellt worden. Die beiden Verfahren zeigen abwechselnd gute Übereinstimmung, doch treten auch stärkere Abweichungen auf. Die Verff. hoffen für die Zukunft weitere Klärungen der hier vorliegenden Verhältnisse durchführen zu können. H. Preuss.

Green, Louis C., Marjorie M. Mulder, Paul C. Milner, Margaret N. Lewis, John W. Woll jr., Eleanor K. Kolchin and David Mace: Analysis of the three parameter wave function of Hylleraas for the He I ground state in terms of central field wave functions. Phys. Review, II. Ser. 96, 319—325 (1954).

In dieser Arbeit werden die Folgerungen diskutiert, die sich durch die Ent-

wicklung der Hyllerausschen Funktion des Heliums $\Psi_H^N(r_1, r_2, r_{12})$ nach Wellenfunktionen $\Phi_i^N(r_1, r_2)$ ergeben. $\Psi_H^N(r_1, r_2, r_{12}) = \sum_i c_i \Phi_i^N(r_1, r_2) P_i^N(\cos \vartheta)$ (r_1, r_2 Kernabstände der beiden Elektronen, r_{12} Abstand der Elektronen), die wiederum nach radialen Eigenfunktionen R^N für diskrete und kontinuierliche Zustände des Zentralfeldes entwickelt werden. Unter Mitnahme angeregter Zustände des Zweielektronensystems wird die Abhängigkeit der Entwicklung von den effektiven Kernladungszahlen in R^N untersucht und die Zahlenwerte der Entwicklungskoeffizienten angegeben, wenn die Energie zum Minimum gemacht wird. Bei Berücksichtigung höherer Zustände ist die Übereinstimmung in den erhaltenen Energien mit der Erfahrung befriedigend.

H. Preuss.

Kaku, Koichi: Studies on the hydrogen bond. I. Potential function of the hydrogen bond. Kumamoto J. Sci., Ser. A 1, Nr. 4, 55–59 (1954).

Dalgarno, A.: Integrals occurring in problems of molecular structure. Math. Tables Aids Comput. 8, 203–212 (1954).

Bibliographie.

Fraser, P. A.: Vibrational transition probabilities of diatomic molecules. III. Proc. phys. Soc., Sect. A 67, 939–941 (1954).

Teil I und II wurden in dies. Zbl. 51, 225, 226 angezeigt.

Kazavčinskij, Ja. Z.: Über eine Methode zur Bestimmung der Konstanten der Virial-Form der Zustandsgleichung eines realen Gases. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 95, 1005–1008 (1954) [Russisch].

Bauer, Ernest and Ta-You Wu: The cooling of a gas by radiation. Proc. phys. Soc., Sect. A 67, 741–750 (1954).

Ware, A. A.: Galvanomagnetic and thermomagnetic effects in a plasma. Proc. phys. Soc., Sect. A 67, 869–880 (1954).

Davydov, sowie Tonks und Allis haben ausgehend von der Boltzmannschen Fundamentalgleichung ein geeignetes Verfahren zur Berechnung der Koeffizienten der Diffusion, sowie der thermischen und elektrischen Leitfähigkeit eines Plasmas im Magnetfeld angegeben. Der Verf. führt für eine spezielle, geeignet gewählte Anordnung eine Berechnung in enger Anlehnung an die genannten Untersuchungen durch und gibt gleichzeitig für die komplizierten Koeffizienten einfache Näherungsformeln an. Die verschiedenen galvano-magnetischen und thermo-magnetischen Effekte (Hall-, Ettinghausen-, Nernst-, Righi-Leduc-Effekt) werden berechnet und darauf hingewiesen, daß in den Gasentladungen, wie sie in Laboratorien untersucht werden, neben dem Hall-Effekt auch der Ettinghausen-Effekt von Bedeutung ist. Insbesondere kann der Verf. mit Hilfe des Ettinghausen-Effektes einen interessanten Deutungsvorschlag für die rückläufige Bewegung des Bogenansatzes im Magnetfeld geben.

G. Ecker.

Ramakrishnan, Alladi and P. M. Mathews: On the molecular distribution functions of a one-dimensional fluid. II. Philos. Mag., VII. Ser. 45, 1053–1058 (1954).

Die Methode der „basic functions“ (Teil I, dies. Zbl. 55, 239) wird benutzt, um die molekulare Verteilungsfunktion einer eindimensionalen Flüssigkeit zu berechnen, wenn ein intermolekulares Potential gegeben ist. In asymptotischer Näherung ergibt sich ein wesentlicher Unterschied zwischen positivem und negativem Potential.

K.-H. Hocker.

Baranowski, B.: Hittorf's effect in a binary electrolyte solution from the point of view of the thermodynamics of irreversible processes. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 2, 229–232 (1954).

Der Hittorf-Effekt, das Auftreten eines Konzentrationsgradienten in isothermer elektrolytischer Lösung bei Anwesenheit eines äußeren elektrischen Feldes, wird

untersucht und die Bedingung für den stationären Zustand wird angegeben und diskutiert. *J. Meixner.*

Prigogine, I.: On the theory of liquid helium. *Advances Phys., Quart. Suppl. philos. Mag.* **3**, 131—148 (1954).

Bericht über die Theorie des Heliums, die von Verf. und Mitarbeitern in den Jahren 1952—54 entwickelt worden ist (*Physica*). *G. Höhler.*

Herivel, J. W.: Thermodynamics of the two-fluid model of liquid helium II. *Nature* **174**, 322—323 (1954).

Rice, O. K.: The nature of higher-order phase transitions with application to liquid helium. *Phys. Review, II. Ser.* **93**, 1161—1168 (1954).

Fester Körper:

Zocher, H. und C. Török: Räumliche und zeitliche Asymmetriebetrachtungen in der Physik, insbesondere der Kristallphysik. *Z. Phys.* **139**, 147—162 (1954).

Die Kennzeichnung physikalischer Größen erfolgt zweckmäßigerweise durch ihre Asymmetrie. An räumlichen Richtungsasymmetrien sind fünf Arten zu unterscheiden, mit Hilfe deren sich auch die 32 Symmetrieklassen ableiten lassen. Die vollständige Kennzeichnung eines physikalischen Objektes ist nur durch die Angabe seiner räumlichen und zeitlichen Asymmetrie möglich. Hierdurch wird ein Fragenkomplex geklärt, der seit den Arbeiten von P. Curie und W. Voigt offen war, und der Weg zu einer einwandfreien Problemstellung betreffs neuer physikalischer Wirkungen vorgezeichnet. *W. Nowacki.*

Bingen, R.: Propriétés thermodynamiques des solides quantiques au zéro absolu. *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér.* **40**, 815—833 (1954).

Als Modell von Festkörpern wird eine Kette linearer anharmonischer Oszillatoren gewählt. Eine quantenmechanische Störungsrechnung in zweiter Näherung zeigt, daß für leichte Elemente der Einfluß der Anharmonizität auf die Nullpunktsenergie durchaus von Bedeutung ist. Eine Erweiterung der Ergebnisse auf die Berechnung der Exzessgrößen in Isotopenmischungen wird angedeutet. *J. Meixner.*

Buckingham, M. J. and M. R. Schafrath: The specific heat of metals at low temperatures. *Proc. phys. Soc., Sect. A* **67**, 828—836 (1954).

Mit Hilfe einer allgemeinen Entwicklung der freien Energie (Logarithmus der Zustandssumme) eines gestörten Systems nach Matrixelementen des Störoperators (gebildet mit den ungestörten Eigenfunktionen) wird die spezifische Wärme eines Elektronengases in Wechselwirkung mit Gitterschwingungen berechnet. Bei hohen Temperaturen hat die Wechselwirkung keinen Einfluß auf die spezifische Wärme, bei tiefen Temperaturen steigt sie auch linear mit der Temperatur, jedoch mit einem (auch bei nicht supraleitenden Elementen) merklich anderen Proportionalitätsfaktor als bei höheren Temperaturen. *W. Brenig.*

Penrose, O.: The quantization of sound waves. I. General theory. *Philos. Mag., VII. Ser.* **45**, 80—92 (1954).

Die Quantentheorie von Schallwellen wird behandelt in der Absicht, die Methode später auf Helium II anzuwenden. Mit Hilfe der Fourierkomponenten der Dichte und ihrer zeitlichen Ableitung werden Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Schallquanten (Phononen) aufgestellt. 3 Beispiele werden behandelt: Nichtideales Bosegas, nichtideales (lineares) Fermigas und ein ideales lineares Gitter. Bei der Behandlung der linearen Kette muß nach Meinung des Ref. ein Versehen vorliegen, denn Verf. erhält für die Phononen einen Impuls, obwohl vorausgesetzt wird, daß der Schwerpunkt des Gitters ruht. *G. Leibfried.*

Viswanathan, K. S.: The theory of elasticity and of wave-propagation in crystals from the atomistic standpoint. *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A* **39**, 196—213 (1954).

Die Formänderungsenergiefunktion eines Kristalls wird auf atomtheoretischer Grundlage in einer allgemeinen, in den Kernverschiebungen quadratischen Form aufgestellt und für kleine homogene Deformationen der Formänderungsenergie gegenüber gestellt, wie sie sich aus der Elastizitätstheorie ergibt. Hieraus, ebenso wie aus der Gegenüberstellung der Wellengleichungen ergeben sich Beziehungen, welche gestatten, die Konstanten der anisotropen Elastizitätstheorie auf die Atomkraftkonstanten zurückzuführen. Bei allgemeinerer Formulierung entsprechend neun linear unabhängigen Formänderungskomponenten besteht wegen des nicht-symmetrischen Aufbaus ohne zusätzliche Annahme keine unmittelbare Möglichkeit, Analogien zur Elastizitätstheorie zu gewinnen. Die auf dem ersten Wege gefundenen Beziehungen werden für Diamant ausgewertet und mit experimentellen Ergebnissen verglichen. *H. Neuber.*

Read Jr., W. T.: Theory of dislocations in germanium. Philos. Mag., VII. Ser. 45, 775—796 (1954).

Versetzungslinien mit Stufen-Komponenten in Germanium können Elektronen einfangen. Daher können Versetzungslinien eine negative Ladung tragen und erzeugen in ihrer Umgebung eine positive Raumladung. Elektrischer Widerstand und Halleffekt hängen so empfindlich von der Versetzungsstruktur ab. Bei plastischer Biegung sind die Elektronenbeweglichkeiten für Bewegungen senkrecht und parallel zur Biegeachse stark verschieden. Die Temperaturabhängigkeit wird diskutiert und es werden Experimente zur Prüfung der zugrunde liegenden Vorstellungen vorgeschlagen. *G. Leibfried.*

Bilby, B. A. and R. Bullough: The formation of twins by a moving crack. Philos. Mag., VII. Ser. 45, 631—646 (1954).

Das Spannungsfeld eines sich ausbreitenden Risses wird für elastische Isotropie berechnet. Die Zwillingsbildung an Spaltbrüchen wird diskutiert (speziell an Zink) unter der Annahme, daß die hohen lokalen Spannungen an den Enden des Risses die Zwillingsbildung einleiten. *G. Leibfried.*

Stroh, A. N.: The formation of cracks as a result of plastic flow. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 223, 404—414 (1954).

Die Rißbildung durch die Spannungsüberhöhung an aufgestauten Versetzungen wird diskutiert. *G. Leibfried.*

Hosemann, R. and S. N. Bagchi: Diffraction effects of crystals with deformation faults. Phys. Review, II. Ser. 94, 71—74 (1954).

Die Theorie des idealen Parakristalles wird auf das Problem der Diffraktionseffekte von flächenzentrierten kubischen Kristallen mit Deformationsfehlern (im Gegensatz zu Wachstumsfehlern) in der Ebene (111) angewandt. Es wird gezeigt, daß die von M. S. Paterson (dies. Zbl. 48, 236) angegebenen Formeln mit Hilfe dieser Theorie leichter abgeleitet werden können und daß Patersons Problem nur ein Spezialfall (d. i. der Fall von unendlich großen Kristallen und einer durch Spitzenfunktionen gegebenen Koordinationsstatistik) der allgemeinen in dieser Theorie postulierten Deformationseffekte ist. *W. Nowacki.*

Grenville-Wells, H. Judith and Kathleen Lonsdale: Determination of absolute configuration by Laue photographs. Nature 173, 1145—1146 (1954).

Niehrs, H.: Das Strahlungsfeld auf der Kristallrückseite bei Elektroneninterferenzen. Z. Phys. 138, 570—597 (1954).

Theoretische Untersuchungen über die in elektronenmikroskopischen Aufnahmen von Kristallen (meist MgO) beobachtete Kantenstreuung. Die nicht voll befriedigenden bisherigen Deutungen, welche einfach den in die Objektivapertur fallenden Anteil der Stromdichte in der Austrittsfläche des Kristalls als Maß für die Helligkeit der entsprechenden Bildpunkte annahmen, werden durch eine Berechnung des aus 4 Wellen bestehenden Wellenfeldes im Raum hinter dem Kristall ersetzt. Das Elektronenmikroskop erzeugt ein Bild der in seiner Brennebene herrschenden Stromdichte. Geht diese Brennebene durch den Kristall, so beobachtet man im elektronenmikroskopischen Bild die analytische Fortsetzung des außerhalb des Kristalls herrschenden Wellenfeldes in den Kristall hinein. Für die Falle der Hellfeldabbildung mit kleiner Apertur und der Dunkelfeldabbildung mit definierten

Reflexen werden Formeln für die Streifenabstände abgeleitet, die mit den nach der bisherigen Deutung berechneten in erster Näherung übereinstimmen. In den Abbildungen werden schöne neue elektronenmikroskopische Aufnahmen der Kantenstreifung an MgO gezeigt. *F. Lenz.*

Niehrs, H.: Elektronen-Doppelinterferenz unter Auslöschung des dritten Wellenfeldes. *Z. Phys.* **139**, 88—102 (1954).

Bei der Beobachtung der Kantenstreifung im elektronenmikroskopischen Bild von Kristallen zeigt sich, daß diejenigen Kristallstellungen relativ zum Elektronenstrahl, in denen die Streifungen besonders gut zu beobachten sind, häufig dem Fall einer Doppelinterferenz entsprechen, in welchem man für die Helligkeitsschwankungen im elektronenmikroskopischen Bild zunächst nicht die beobachtete sinusförmige Periodizität erwartet. Die Bedingungen dafür, daß auch im Fall der Doppelinterferenz nur zwei Wellenfelder im Bildraum auftreten, werden untersucht. Die Analyse ergibt, daß bei der Kantenstreifung in elektronenmikroskopischen Kristallbildern auch bei starker Doppelinterferenz nur zwei sich überlagernde Nullwellen auftreten, daß also die Helligkeitsschwankungen auch in diesem Fall einfach sinusförmig periodisch sind, und zwar mit kleinerer Periode als bei der Einfachinterferenz. *F. Lenz.*

Herman, Frank: Calculation of the energy band structures of the diamond and germanium crystals by the method of orthogonalized plane waves. *Phys. Review*, **II, Ser. 93**, 1214—1225 (1954).

Eine gruppentheoretische Untersuchung und näherungsweise Bestimmung von Wellenfunktionen in Gittern vom Diamanttyp. Es zeigt sich, daß bei Abänderung des Potentials die Flächen konstanter Energie $\varepsilon_{\lambda}(k) = \text{const}$ innerhalb der einzelnen Bänder λ stark verändert werden, dagegen sind die Verhältnisse der $\varepsilon_{\lambda}(k)$ verschiedener Bänder bei festem k in der Hauptsache durch die Symmetrien des Gitters bestimmt. *W. Brenig.*

Gold, Louis: Direct cellular evaluation of the density of states in phase space and the accurate calculation of Fermi levels. *J. appl. Phys.* **25**, 1278—1280 (1954).

Verf. kommt durch eine falsche Abzählung (s. S. 1279: Rigorous treatment of the extra-cubical cells) zu dem Resultat, daß die Ersetzung der Fermizone durch Kugeln im k -Raum auch bei makroskopischen Körpern noch einen Fehler von 3° in der Fermienergie liefert. *W. Brenig.*

Liberberg, T. I. und K. B. Tolpygo: Mehrelektronen-Untersuchung der Bewegung eines Elektrons (Loches) im gestörten Kristall. *Žurn. eksper. teor. Fiz.* **26**, 35—41 (1954) [Russisch].

Ein ideales Gitter, dessen Ionen fest in ihrer Ruhelage sitzen, enthält ein zusätzliches Elektron und befindet sich in einem äußeren Feld (Störstelle). Die Wechselwirkung des zusätzlichen Elektrons mit den andern Elektronen wird gewöhnlich pauschal als Elektronenpolarisation in Rechnung gestellt. Verf. rechnen genauer in der Näherung starker Bindung und finden zwar wieder eine Schrödingergleichung mit effektiver Masse, jedoch mit einem effektiven Potential, das sich i. a. wesentlich von dem sonst benutzten mit $(1/n^2)$ multiplizierten äußeren Potential (n = Brechungsindex) unterscheidet. Es wird auch der Fall eines Loches behandelt; er ist dem eines zusätzlichen Elektrons nicht vollständig analog. *G. Höhler.*

Wieringen, J. S. van: Justification of the use of perturbation theory in metallic conductivity. *Proc. phys. Soc., Sect. A* **67**, 206—216 (1954).

Verf. diskutiert die Gültigkeitsgrenze für die Anwendbarkeit der Störungsrechnung in der Theorie der metallischen Leitung. Er führt die Störungsrechnung einen Schritt weiter als üblich und findet, daß die hinzukommenden Terme klein sind, weil die ursprünglich von Landau angegebene Bedingung $\tau \gg \hbar/E_F$ für alle Metalle erfüllt ist. (τ = mittlere Zeit zwischen zwei Stößen, E_F = Fermi-Energie.) *G. Höhler.*

Schaffner, J. S. and J. J. Suran: Steady-state solution of the two-dimensional diffusion equation for transistors. *J. appl. Phys.* **25**, 863—867 (1954).

Die Diffusionsgleichung für Schicht-Transistoren wird a) für den Fall linearer Strömung und b) für den beim Anlegen eines Metallkontaktes an die Transistorbasis auftretenden Fall mehrdimensionaler Strömung der Minderheitsladungsträger gelöst. — Das Stromtransportverhältnis β wird für beide Fälle in Abhängigkeit von der Frequenz berechnet. Die eindimensionale Lösung stimmt mit der experimentellen Frequenzcharakteristik gut überein, wenn das Verhältnis von Basislänge zu Basisweite größer als 10 ist und die Oberflächenrekombination vernachlässigt werden kann. Wenn diese Bedingungen nicht erfüllt sind, muß für die Berechnung von β die 2-dimensionale Diffusionsgleichung herangezogen werden. *W. Oldekop.*

Haken, H.: Eine Methode zur strengen Behandlung der Wechselwirkung zwischen einem Elektron und mehreren Gitteroszillatoren. *Z. Phys.* **138**, 56—70 (1954).

Die Schrödingergleichung für ein Elektron in Wechselwirkung mit Gitterschwingungen wird mit der Greenschen Funktion in ein System von Integralgleichungen übergeführt und allgemein mit Hilfe der Fredholmschen Auflösungssätze behandelt. Ein Rechenbeispiel für den linearen Fall wird vorgeführt. *W. Brenig.*

Fröhlich, H.: Electrons in lattice fields. *Advances Phys., Quart. Suppl. philos. Mag.* **3**, 325—361 (1954).

Bericht über die Elektron-Gitter-Wechselwirkung und die Leitfähigkeitstheorie für polare Kristalle. Die neueren Ergebnisse Pekars sind noch nicht enthalten [s. *Fortschr. Phys.* **1**, 367—419 (1954)]. Anderweitig nicht veröffentlicht ist die eingehende Diskussion über die Erhaltungssätze für Impuls und Weilenzahl. *G. Höhler.*

Wolkenstein, F. F. und W. L. Bontsch-Brujewitsch: Das Verhalten der Elektronen in Ionenkristallen. (Übersetzt von H. Vogel.) *Sowjetwiss., naturw. Abt.* **7** (1954), 363—377 (1954).

[Das Original dieser Übersetzung ist erschienen in *Žurn. eksper. teor. Fiz.* **20**, 624—635 (1950).] Zwei zusätzlich in einen idealen, isolierenden Kristall gebrachte Elektronen finden ein periodisches Potential vor und stoßen sich außerdem auf Grund der Coulombwechselwirkung ab. Verff. behandeln das Problem in der Heitler-London-Näherung, also analog zur Spinwellentheorie von Bloch und Bethe und beschränken sich auf den linearen Fall. Sie finden neben Zuständen, wie sie auch im Bändermodell vorkommen, solche, bei denen die Elektronen sich gemeinsam durch den Kristall bewegen. („Dublonen“, vgl. Bethes Spinkomplexe). Das Energiespektrum der Dublonen umfaßt zwei Bänder, eines für parallele, eines für antiparallele Spins. *G. Höhler.*

Haga, Ejirō: Note on the slow electrons in a polar crystal. *Progress theor. Phys.* **11**, 449—460 (1954).

Verf. berechnet die tiefsten Zustände des Polarons nach einer neuen Störungsmethode. Nach Ansicht des Ref. ist die Näherung bei der Berechnung der Masse schon unterhalb des kritischen Wertes 6 für die Kopplungsstärke nicht mehr gültig. *G. Höhler.*

Kinoshita, Toichiro and Yoichiro Nambu: The collective description of many particle systems. (A generalized theory of Hartree fields.) *Phys. Review, II. Ser.* **94**, 598—617 (1954).

A systematic method of handling a system composed of a number of particles and an intermediary Bose field has been developed. The main idea consists in linearizing the interaction by taking certain average values so that it may be amalgamated to the free Hamiltonian. Only the remaining fluctuational interaction is treated by perturbation theory. The effect of the averaged interaction appears in the form of two generalized Hartree fields associated with the particle and the Bose quantum respectively. The self consistent equations for these Hartree fields are derived from an analysis of the *S*-matrix, keeping close analogy to the renormalization procedure in quantum electrodynamics. The formalism includes such approximations as the Bohm-Pines, Hartree-Fock and Thomas-Fermi theories as special cases. *Zusammenfassung der Autoren.*

Fieschi, R., S. R. de Groot and P. Mazur: Thermodynamical theory of galvanomagnetic and thermomagnetic phenomena. I. Reciprocal relations in anisotropic metals. *Physica* 20, 67—76 (1954).

Fieschi, R., S. R. de Groot, P. Mazur and J. Vlieger: Thermodynamical theory of galvanomagnetic and thermomagnetic phenomena. II. Reciprocal relations for moving anisotropic mixtures. *Physica* 20, 245—258 (1954).

Fieschi, R., S. R. de Groot and P. Mazur: Thermodynamical theory of galvanomagnetic and thermomagnetic phenomena. III. Explicit expressions for the measurable effects in isotropic metals. *Physica* 20, 259—273 (1954).

I. Die galvanomagnetischen und thermomagnetischen Effekte in anisotropen Metallen lassen sich aus vier Tensoren herleiten, dem elektrischen und dem thermischen Leitfähigkeitstensor und einem Paar von Tensoren, welche die Kopplung zwischen thermischen und elektrischen Erscheinungen im Magnetfeld beschreiben. Für diese Tensoren werden, ausgehend vom Prinzip der mikroskopischen Reversibilität, in Verallgemeinerung der ursprünglichen Onsagerschen Überlegungen, gewisse Symmetriebeziehungen neu begründet. — II. Anisotrope Mischungen von mehreren geladenen Komponenten im elektromagnetischen Feld mit Wärmeleitung, Diffusion, Viskosität werden mit den Methoden der Thermodynamik der irreversiblen Prozesse behandelt. Aus den Schwankungen der Zustandsvariablen in solchen Systemen und ihrer Regression ergeben sich dann die Onsagerschen Reziprozitätsbeziehungen. — III. Herleitung der beobachtbaren Koeffizienten für die galvanomagnetischen und thermomagnetischen Effekte in isotropen Metallen. *J. Meixner.*

Dempsey, E. and D. ter Haar: The three-dimensional body-centred cubic ferromagnet. *Physica* 20, 667—668 (1954).

Kondorskij, E. und A. Pachomov: Zur Theorie der Abhängigkeit der spontanen Magnetisierung von Metallen und Legierungen von der Temperatur im Gebiet niedriger Temperaturen. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* 96, 1139—1142 (1954) [Russisch].

Die frühere Arbeit der beiden Verff., *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* 93, 431—434 (1953), wird ausgedehnt auf Kristalle, in denen jedes Atom die gleiche, aber beliebige Zahl von Valenzelektronen besitzt, sowie auf geordnete binäre Legierungen. Der Einfluß der Ordnung auf die spontane Magnetisierung (Temperatur-Abhängigkeit) wird kurz diskutiert. Für folgende Legierungstypen werden die Spinwellenzustände und die Magnetisierungs-Temperatur-Gesetze genähert angegeben: NaCl-, CsCl-, FeNi₃-Gitter. Während bei den ersten beiden pro Atom nur 1 Valenzelektron zugelassen wird, darf bei der letzten Legierung eines der beiden Atome auch 2 Valenzelektronen besitzen. Für genügend tiefe Temperaturen ergibt sich stets das $T^{3/2}$ -Gesetz der spontanen Magnetisierung. *G. Heber.*

Tsuya, Noboru: On the spin wave field theory and its application to the microwave resonance. *Progress theor. Phys.* 12, 1—9 (1954).

Der Hamiltonoperator bezüglich der Spinbewegung in Ferro-, Antiferro- und Ferrimagnetika wird in einheitlicher Weise mit Hilfe von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren formuliert. Dabei sind Austausch-Wechselwirkungen zwischen beliebig fernen Nachbarn, ein äußeres Magnetfeld, Dipolwechselwirkungen und eine gewisse Anisotropieenergie zugelassen. Mittels kanonischer Transformationen wird dieser Operator in allen 3 Fällen für die Umgebung des Temperatur-Nullpunktes genähert diagonalisiert. Die Resultate verwendet Verf. zu einer kurzen Diskussion der Theorie der Mikrowellen-Resonanzen in den betreffenden Substanzen. *G. Heber.*

Nagamiya, Takeo: Theory of antiferromagnetic resonance in $\text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$. *Progress theor. Phys.* 11, 309—327 (1954).

Die Theorie der antiferromagnetischen Resonanzen von Nagamiya und Yosida (s. z. B. Yosida, dies. Zbl. 47, 237) wird durch Einführung eines anisotropen

g-Faktors erweitert. Sie enthält dann als Grenzfall für verschwindende (absolute) Temperatur auch die Gorter-Ubbinkische Theorie der Resonanzen von $\text{Cu Cl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$. Auch für höhere Temperaturen treten ähnliche Erscheinungen auf, wie bei Gorter-Ubbink (s. z. B. Ubbink, dies. Zbl. 51, 233) diskutiert. Durch Anpassung der eingehenden Parameter (2 Anisotropiekonstanten und das Verhältnis zwischen „paralleler“ und „senkrechter“ Suszeptibilität) können die Resonanzdaten weitgehend wiedergegeben werden.

G. Heber.

Devonshire, A. F.: Theory of ferroelectrics. *Advances Phys.*, Quart. Suppl. philos. Mag. 3, 85—130 (1954).

Bericht über die thermodynamische und die atomistische Behandlung der Ferroelektrizität.

G. Höhler.

Piekara, A.: Nonlinearity of the polarization of ferroelectric titanates in weak fields above the Curie point. *Bull. Akad. Polon. Sci., Cl. III* 2, 127—131 (1954).

Arganovič, V. M.: Über die Dispersion der natürlichen optischen Aktivität von Kristallen, die aus inaktiven Molekülen bestehen. *Doklady Akad. Nauk SSR, n. Ser.* 97, 797—800 (1954) [Russisch].

Homilius, J. und W. Franz: Theorie der inneren Feldemission in kubischen Kristallen. *Z. Naturforsch.* 9a, 205—210 (1954).

Es werden Formeln für die Richtungsabhängigkeit des elektrischen Durchschlags in kubisch raum- und flächenzentrierten Gittern abgeleitet und diskutiert.

G. Leibfried.

Tewordt, Ludwig: Theorie der Stoßionisation durch Elektronen in isolierenden Kristallen. *Z. Phys.* 138, 499—514 (1954).

Mit Hilfe der Fockschen Einelektronenapproximation wird die Übergangswahrscheinlichkeit für den Stoßionisationsprozeß im Isolator berechnet. Die Elektronen im Leitfähigkeitsband werden durch ebene Wellen beschrieben. Die Auswertung der Integrale führt zu Ausdrücken, wie sie aus einer Theorie der Sekundäremission bekannt sind. Als wichtigstes Ergebnis zeigen die Rechnungen, daß die Stoßionisationswahrscheinlichkeit merklich zu werden beginnt, wenn die Energie des ionisierenden Elektrons die Ionisationsenergie überschreitet. Auf dieser Tatsache basieren u. a. die neueren Theorien des dielektrischen Durchschlags.

W. Brauer.

Wolff, P. A.: Theory of secondary electron cascade in metals. *Phys. Review*, II. Ser. 95, 56—66 (1954).

Unter Benutzung der Boltzmannschen Transportgleichung wird der Prozeß der Bewegung der Sekundärelektronen in einem Metall berechnet. Durch sphärisch symmetrische Streuprozesse mit den Metallelektronen verlieren dieselben Energie und erzeugen dabei eine Elektronenkaskade. Die so berechneten Energieverteilungen, Ausbeuteabhängigkeiten von der Austrittsarbeit und absoluten Ausbeutewerte sind in befriedigender Übereinstimmung mit entsprechenden Messungen.

W. Brauer.

Schultz, W.: Zur Theorie der Gleichrichtung am Kontakt Metall-Halbleiter. *Z. Phys.* 138, 598—612 (1954).

Es wird gezeigt, daß unter vereinfachenden Annahmen, die für Halbleiter mit hoher Beweglichkeit und großer Diffusionslänge im wesentlichen erfüllt sind, die Gleichrichtung am Kontakt Metall-Überschußhalbleiter so beschrieben werden kann, daß für den Elektronenstrom die Diodentheorie und für den Löcherstrom die *p-n*-junction-Theorie von Shockley anzuwenden ist. Die Sperrschichtkapazität pro Fläche C_{Sp} als Funktion der angelegten Vorspannung U_- ergibt sich zu $1/C_{Sp}^2 = (8\pi/\epsilon N e) \cdot (V - U_-)$, wobei beim Vorhandensein einer Inversionsschicht die Größe V schwach spannungsabhängig ist. Es werden Näherungsformeln für $V(U_-)$ angegeben. Die Temperaturabhängigkeit von V sollte durch das Vorhandensein einer Inversionsschicht wesentlich beeinflusst werden.

W. Oldekop.

Astronomie. Astrophysik. Geophysik.

Merman, G. A.: Neue Kriterien für die hyperbolische und die hyperbolisch-elliptische Geschwindigkeit beim Dreikörperproblem. (Übersetzt von F. Bartels.) Sowjetwiss., naturw. Abt. **7** (1954), 407—414 (1954).

Das Original dieser Übersetzung befindet sich in Astron. Žurn. **30**, 332—339 (1953). An Stelle der von G. F. Chilmi [Astron. Žurn. 1953] angegebenen Kriterien für das Zustandekommen hyperbolischer bzw. hyperbolisch-elliptischer Geschwindigkeiten im Dreikörperproblem gibt Verf. neue, erheblich gelockerte Bedingungen an, die auch in Fällen noch gelten, wo die früheren Kriterien versagen.

K. Stumpff.

Ževakin, S. A.: Über die Phasenverschiebung zwischen Schwankungen der Helligkeit und Schwankungen der Radialgeschwindigkeit bei veränderlichen Sternen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **99**, 353—356 (1954) [Russisch].

Neyman, Jerzy and Elizabeth L. Scott: Spatial distribution of galaxies. Analysis of the theory of fluctuations. Proc. nat. Acad. Sci. USA **40**, 873—881 (1954).

Lundmark, Knut: Metagalactic distance indicators and spatial distribution of galaxies. 12. Skand. Mat.-Kongr., Lund 1953, 195—210 (1954).

Schumann, Winfried Otto: Über die Strahlung langer Wellen des horizontalen Dipols in dem Lufthohlraum zwischen Erde und Ionosphäre. I. Z. angew. Phys. **6**, 225—229 (1954).

Mit einem radialen Vektorpotential $\pi = r \cdot u$, für die magnetische Induktion B , und einem zweiten $\bar{\pi} = r \cdot v$, für das elektrische Feld E , erhält man zwei verschiedene Familien von Lösungen der Wellengleichung in Kugelkoordinaten. Für den radialen Anteil von u bzw. v müssen Bessel- und Hankel-Funktionen angesetzt werden; sie werden den Grenzbedingungen an Unter- bzw. Oberseite des Luftraums (Erde bzw. Ionosphäre) angepaßt; dadurch werden die möglichen Werte für die Ordnung n der Funktionen festgelegt. Mit Hilfe der Orthogonalität der Bessel-Funktionen kann u bzw. v als Reihe dieser „angepaßten“ Funktionen an die gegebene Ausstrahlung der Quelle angeschlossen werden. u gilt für den Vertikalen, v für den horizontalen Dipol. Im ersten Fall gibt es immer mindestens einen n -Wert (Grundfeld), weitere (Oberfelder) treten jeweils nur oberhalb einer Grenzfrequenz auf (in Analogie zu den Hohlleiter-Wellen). Im zweiten Fall existiert selbst das Grundfeld bis zur Frequenz Null hinab. Einzelheiten siehe in den beiden folgenden Arbeiten.

K. Rawer.

Schumann, Winfried Otto: Über die Oberfelder bei der Ausbreitung langer, elektrischer Wellen im System Erde-Luft-Ionosphäre und 2 Anwendungen (horizontaler und senkrechter Dipol). Z. angew. Phys. **6**, 35—43 (1954).

Schumann, Winfried Otto: Über die Ausbreitung langer elektrischer Wellen um die Erde und einige Anwendungen auf Senderinterferenzen und Blitzsignale. Z. angew. Phys. **6**, 346—352 (1954).

Lehman, R. Sherman: Developments in the neighborhood of the beach of surface waves over an inclined bottom. Commun. pure appl. Math. **7**, 393—439 (1954).

Die Näherung von Lösungen des Oberflächenwellenproblems über geneigtem ($0 < \pi\alpha < \pi$) Küstengrund wird durch asymptotische Entwicklungen in der Nähe der Schnittlinie von Küstengrund und Wasseroberfläche dargestellt. Dazu wird die von H. Lewy (dies. Zbl. **49**, 62) für rechten Stoßwinkel $\alpha = \frac{1}{2}$ benutzte Methode verallgemeinert. Die Konvergenz der asymptotischen Entwicklungen gegen die Lösungen wird mit Hilfe der Theorie der Gleichverteilung und der Diophantischen Näherungen entschieden. Die exakten Konvergenzradien der Entwicklungen werden für jedes irrationale α bestimmt. Allgemein kann die Arbeit als Beitrag zur Lösung partieller Differentialgleichungen betrachtet werden, wenn verschiedene Teile der Berandung verschiedenen Randbedingungen unterliegen.

J. Pretsch.